РГР по ЛААГ. Вариант 7 (*Выполнять на листах А4, сдавать на проверку поэтапно*)

1. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ с помощью обратной матрицы, вычисленной через присоединённую. Сделать проверки обратной матрицы и матрицы-решения.

2,3. Решить две системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Указания: (2) методами Крамера и Гаусса найти единственное решение, сделать проверку; (3) методом Гаусса найти ранг системы и её общее решение, выделить из последнего частное решение и все фундаментальные решения соответствующей однородной системы, сделать проверку каждого.

4. Найти все собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, проверить их. *Указание*: После получения характеристического уравнения сделать проверки его свободного члена (должно быть $\det A$) и его коэффициента при λ^2 (должно быть $\operatorname{tr} A$). При решении этого уравнения подобрать первый корень λ_1, выбрав его среди делителей свободного члена, и понизить степень уравнения, разделив его левую часть на линейный двучлен $\lambda - \lambda_1$ «уголком» или по Горнеру.

5. Для каждого собственного значения λ матрицы A из задачи 4 методом Гаусса найти все её собственные векторы $\overline{x} \neq \overline{0}$ и сделать проверки всех найденных пар $\{\lambda, \overline{x}\}$ (должно быть $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$).

6. *Даны вершины тетраэдра* $A(5;5;3)$, $B(3;2;2)$, $C(4;4;0)$, $D(8;6;4)$. Вычислить:

а) Скалярное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, их длины, а также косинус угла между ними.

б) Векторное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, площадь образуемой ими грани ACD и синус угла между ними. Последний проверить с помощью основного тригонометрического тождества.

в) Смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ через определитель, проверив его с помощью найденного выше векторного произведения, а также объём тетраэдра *ABCD* и его высоту, опущенную на плоскость грани *ABD*.

7. Используя общее и каноническое уравнения прямой на плоскости, в треугольнике с вершинами $A(5;6), B(3;-2), C(-1;4)$, найти координаты проекции точки *A* на *медиану*, проведённую из точки *B*, а также расстояние от точки *B* до прямой (*AC*). Аналитическое решение задачи проверить с помощью крупного рисунка на листе миллиметровки формата А4. (*Задание переписать*)

8. Найти расстояние между прямыми L_1: $x - y + 6z + 11 = 0$, $2x + y + 6z + 4 = 0$ и L_2: $\dfrac{x-2}{-4} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{1}$.

Показать, что они лежат в одной плоскости и получить её общее уравнение. (*Задание переписать*)

9. Привести уравнение кривой $x^2 - 2x - 4y^2 = 0$ к каноническому виду, определить её тип, расположение на плоскости (размеры, смещение), построить кривую и проверить координаты точек её пересечения с осями координат по исходному уравнению.

10. Привести уравнение поверхности $3x^2 + y^2 + 12x - 6y + 2z + 19 = 0$ к каноническому виду, определить её тип и расположение в пространстве (ориентация, смещение). Изобразить эскиз этой поверхности, учтя только смещение и ориентацию.