МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)»
(СПбГТИ(ТУ))

**Механический факультет**

**А.В. Марков, Н.А. Марцулевич**

# ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

## ПРИМЕРЫ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

**Методические указания**

**для студентов заочной формы обучения**

Санкт-Петербург

2013

ББК 22.1

Марков, А.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Примеры и контрольные задания: методические указания / А.В. Марков, Н.А. Марцулевич. – Изд. 2-е, испр. и доп. – СПб.: СПбГТИ (ТУ), 2013. – 30 с.

В методические указания включены варианты контрольных заданий и примеры их решения по темам «Аналитическая геометрия» и «Линейная алгебра». Рассмотрены задачи написания уравнения прямой в пространстве, уравнения плоскости, определения расстояний, углов, площади треугольника, а также операции над матрицами, решение систем линейных алгебраических уравнений.

Методические указания предназначены для студентов первого курса заочной формы обучения механического факультета СПбГТИ(ТУ) и соответствуют требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению подготовки 151000 «Технологические машины и оборудование» по циклу математических и естественнонаучных дисциплин. Методические указания направлены на формирование следующих общекультурных компетенций в соответствии с ФГОС ВПО: ОК-6 и ОК-9.

Ил.1, табл. 3,библиогр. 4 назв.

Рецензент: А.И.Лосев, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры
экономики и организации производства СПбГТИ(ТУ)

Утверждено на заседании учебно-методической комиссии
механического факультета СПбГТИ(ТУ) 07.06.2013.

Рекомендовано к изданию РИСо СПбГТИ(ТУ).

# ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Высшая математика» относится к циклу математических и естественнонаучных дисциплин. Цель курса – формирование у студентов математических знаний, умений и навыков, необходимых для изучения других общенаучных и специальных дисциплин, а также формирование научного мировоззрения студентов и навыков самостоятельной работы.

В методические указания включены задания контрольной работы по темам «Аналитическая геометрия» и «Линейная алгебра». Рассмотрены задачи написания уравнения прямой в пространстве, уравнения плоскости, определения расстояний, углов, площади треугольника, а также операции над матрицами, решение систем линейных алгебраических уравнений. Каждое задание включает сто различных вариантов. Свой вариант студент выбирает по двум последним цифрам зачетки. Приведены подробные примеры решения каждого задания, позволяющие студенту самостоятельно разобраться в изучаемом материале при выполнении своего варианта.

Контрольная работа может быть либо написана от руки, либо распечатана на одной стороне листа белой бумаги формата А4. На титульном листе указываются название факультета, фамилия, имя, отчество студента, номер учебной группы, номер варианта и ставится личная подпись студента. При оформлении каждого задания необходимо переписать текст задания, подставив в него численные значения заданных величин своего варианта. Решение задания необходимо сопровождать краткими пояснениями, в конце дать ответ.

# 1 КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

## ЗАДАНИЕ № 1

**Номер варианта задания (предпоследняя цифра зачетки)**

1. Написать уравнение прямой, проходящей через точки M и N.
2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M перпендикулярно плоскости $\alpha$.
3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M, N и K.
4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно прямой p.
5. Определить расстояние от точки M до плоскости $\alpha$.
6. Определить расстояние от точки M до прямой p.
7. Определить угол между плоскостями $\alpha$ и $\beta$.
8. Определить угол между прямой p и плоскостью $\alpha$.
9. Определить угол между прямыми p и q.
0. Определить площадь треугольника MNK.

**Координаты точек, уравнения прямых и плоскостей (номер варианта – последняя цифра зачетки)**

**1.** M(1, 0, 2), N(2, 1, 3), K(-1, 2, 1);

p: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{3}$, q: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{-1}$;

$\alpha$: $x+2y+3z=3$, $\beta$: $4x-2y+5z=22$.

**2.** M(1, 1, 1), N(5, 1, -2), K(7, 9, 1);

p: $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$, q: $\frac{x+4}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{2}$;

$\alpha$: $2x-y+z=3$, $\beta$: $2x-5y+2z=-5$.

**3.** M(4, 1, 2), N(2, -1, 1), K(-1, -5, 1);

p: $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$, q: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-5}$;

α: $x+2y+4z=8$, β: $3x-8y+z=3$.

**4.** M(3, 1, 4), N(- 4, 5, 3), K(0, 6, 0);

p: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-1}$, q: $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z-1}{1}$;

α: $x+y-z=6$, β: $2x-y+z=0$.

**5.** M(3, 5, -7), N(1, -3, 0), K(- 4, 2, 2);

p: $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{-2}$, q: $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-1}{-3}$;

α: $x-y+z=1$, β: $2x+y-3z=0$.

**6.** M(2, -1, 0), N(-1, 4, -7), K(-2, 2, -5);

p: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-8}=\frac{z-2}{4}$, q: $\frac{x}{7}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{5}$;

α: $2x+y-z=-1$, β: $2x+3y-5z=-1$.

**7.** M(3, -1, 0), N(2, 1, -7), K(1, 2, 0);

p: $\frac{x-1}{7}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{5}$, q: $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$;

α: $x+y+z=-1$, β: $2x-y+z=2$.

**8.** M(2, 3, 0), N(4, -1, 7), K(0, 5, 3);

p: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$, q: $\frac{x-7}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-2}$;

α: $2x+3y-5z=31$, β: $3x-4y+7z=33$.

**9.** M(8, 2, 3), N(3, 7, 4), K(-1, 0, 1);

p: $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$, q: $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{-3}$;

α: $4x-y+3z=1$, β: $2x+z=3$.

**0.** M(1, - 2, 1), N(3, - 3, -1), K(4, 0, 3);

p: $\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{2}$, q: $\frac{x-1}{7}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+21}{5}$;

α: $x+3y-z=7$, β: $3x-2y=24$.

## ЗАДАНИЕ № 2

**Даны матрицы A, B, C, D, H. Выполнить, если возможно, действия, указанные в таблице 1.**

Таблица 1 – Варианты задания 2

| Номер варианта (предпоследняя цифра зачетки) | Действия |
|---|---|
| 1 | A+2B, A–D, AB, BC, HD |
| 2 | A–C, A+2D, AC, AD, BH |
| 3 | B+2C,B–2H, AD, DH, HD |
| 4 | B–C, 2C–A, BH, CD, DA |
| 5 | A+D, 2B–A, AH, BC, HD |
| 6 | A–2D, A+H, CB, DA, DH |
| 7 | C+2A, C–2B, AD, CH, HB |
| 8 | 2C-B, D+2H, BC, DA, HC |
| 9 | D–2A, H–2A, AD, AH, CB |
| 0 | B+2H, C–2B, BD, BH, CB |

**Матрицы A, B, C, D, H (номер варианта – последняя цифра зачетки):**

**1.**

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ 5 & -1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 3 & 4\\ -5 & -6\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}$$

**2.**

$$A=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&4&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\\2&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&4\\-1&0\\5&3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-1&0&1\\5&3&2\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}2&1&3\\5&3&2\\1&4&3\end{pmatrix}$$

**3.**

$$A=\begin{pmatrix}7&3&4\\5&2&6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&4\\4&0\\0&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\3&2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0&-2&1\\2&0&1\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}2&5&6\\1&2&5\\1&3&2\end{pmatrix}$$

**4.**

$$A=\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2&2\\3&4\\-5&-6\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2\\5&-2\\-6&3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&2&1\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}5&8&-4\\6&9&-5\\4&7&-3\end{pmatrix}$$

**5.**

$$A=\begin{pmatrix}-1&3&5\\1&6&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&1\\-3&2\\3&-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5&-4\\3&4\\2&5\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&-1\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}3&2&5\\4&-1&3\\9&6&5\end{pmatrix}$$

**6.**

$$A=\begin{pmatrix}5&2&1\\6&1&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&2\\-1&-6\\2&7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&3\\-4&4\\5&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}4&1&3\\1&2&-3\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

**7.**

$$A=\begin{pmatrix}-2&6&1\\2&9&-3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5&2\\-8&2\\-1&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4&2\\-3&-5\\-3&4\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2&5&1\\3&10&1\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}1&4&1\\-1&1&5\\4&2&3\end{pmatrix}$$

**8.**

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-1\\-2&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2&1\\-5&-1\\2&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&2&3\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}3&-2&7\\2&1&5\\4&3&2\end{pmatrix}$$

**9.**

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\3&1&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\\1&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2\\1&-5\\0&6\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2&-3&1\\4&-5&3\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}1&-5&4\\3&2&2\\-4&6&-8\end{pmatrix}$$

**0.**

$$A=\begin{pmatrix}2&-7&3\\4&5&-6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&4\\-3&-5\\1&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4&6\\-5&1\\2&-4\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&-3&6\\-5&-4&6\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}3&2&-4\\4&1&2\\5&3&-3\end{pmatrix}$$

**ЗАДАНИЕ № 3**

**Решить систему уравнений по формулам Крамера (номер варианта задания – предпоследняя цифра зачетки):**

**1.** $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = b_1 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = b_2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = b_3 \end{cases}$,

**2.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = b_1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = b_2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = b_3 \end{cases}$,

**3.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = b_1 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = b_2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = b_3 \end{cases}$,

**4.** $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = b_1 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = b_2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = b_3 \end{cases}$,

**5.** $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = b_1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = b_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = b_3 \end{cases}$,

**6.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = b_1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = b_2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = b_3 \end{cases}$,

**7.** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = b_1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = b_2 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = b_3 \end{cases}$,

**8.** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = b_2 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = b_3 \end{cases}$,

**9.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = b_1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = b_2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = b_3 \end{cases}$**,**

**0.** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = b_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = b_2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = b_3 \end{cases}$

**Вектор свободных членов b приведен в таблице 2.**

Таблица 2 –Варианты задания 3

| Номер варианта (последняя цифра зачетки) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Вектор свободных членов | $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ | $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ | $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ | $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ |
| Номер варианта (последняя цифра зачетки) | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |
| Вектор свободных членов | $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ | $b = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ | $b = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ |

**ЗАДАНИЕ № 4**

**Исследовать и решить систему уравнений методом Гаусса (номер варианта задания – предпоследняя цифра зачетки):**

**1.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = b_1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = b_2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = b_3 \end{cases}$,

**2.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = b_1 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_4 = b_2 \\ 2x_1 + x_3 = b_3 \end{cases}$,

**3.** $\begin{cases} 4x_2 + x_3 - x_4 = b_1 \\ 2x_1 - x_4 = b_2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = b_3 \end{cases}$,

**4.** $\begin{cases} 3x_1 + x_3 = b_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = b_2 \\ x_3 + x_4 = b_3 \end{cases}$,

**5.** $\begin{cases} x_2 + x_4 = b_1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = b_2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = b_3 \end{cases}$,

**6.** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = b_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = b_2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = b_3 \end{cases}$,

**7.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = b_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = b_2 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = b_3 \end{cases}$,

**8.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = b_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = b_2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = b_3 \end{cases}$,

**9.** $\begin{cases} x_1 - 3x_3 + 3x_4 = b_1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = b_2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = b_3 \end{cases}$,

**0.** $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 = b_1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = b_2 \\ x_1 - x_2 + 4x_4 = b_3 \end{cases}$.

**Вектор свободных членов b приведен в таблице 3.**

Таблица 3 –Варианты задания 4

| Номер варианта (последняя цифра зачетки) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Вектор свободных членов | $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ | $b = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ | $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ |
| Номер варианта (последняя цифра зачетки) | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |
| Вектор свободных членов | $b = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $b = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ | $b = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ | $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ | $b = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ |

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ

### Задание № 1

**Вариант № 1**

**Написать уравнение прямой, проходящей через точки M(2; 3; –1) и N(3; 2; 1).**

### Решение

Каноническое уравнение прямой линии в пространстве имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

где $x_0$, $y_0$, $z_0$ – координаты любой точки, лежащей на прямой;
$l, m, n$ – координаты направляющего вектора прямой, т.е. координаты любого не нулевого вектора, параллельного прямой.

В качестве точки, лежащей на прямой, возьмем точку M(2; 3; –1), а качестве направляющего вектора прямой – вектор $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=(3-2)\cdot\vec{i}+(2-3)\cdot\vec{j}+(1-(-1))\cdot\vec{k}=\vec{i}-\vec{j}+2\cdot\vec{k}.$$

Следовательно, уравнение прямой, проходящей через точки M и N, имеет вид:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}.$$

**Ответ:** $\mathbf{\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}}$.

**Вариант № 2**

**Написать уравнение прямой, проходящей через точку M(2; 5; – 1) перпендикулярно плоскости $\alpha$: $\mathbf{14x-2y-25z=35}$.**

**Решение**

Каноническое уравнение прямой линии в пространстве имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

где $x_0$, $y_0$, $z_0$ – координаты любой точки, лежащей на прямой;

$l, m, n$ – координаты направляющего вектора прямой, т.е. координаты любого не нулевого вектора, параллельного прямой.

В уравнении плоскости $14x-2y-25z=35$ коэффициенты при переменных x, y, z являются координатами вектора $\vec{a}=\{14,-2,-25\}$, перпендикулярного плоскости и, следовательно, параллельного искомой прямой. Таким образом, уравнение прямой, проходящей через точку M(2,5, –1) перпендикулярно плоскости $\alpha$: $14x-2y-25z=35$, имеет вид:

$$\frac{x-2}{14}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+1}{-25}.$$

**Ответ:** $\mathbf{\frac{x-2}{14}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+1}{-25}}$.

**Вариант № 3**

**Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M(2; 4; 6), N(3; 1; – 4) и K(– 3; – 5; 1).**

**Решение**

Уравнение плоскости имеет вид:

$$Ax+By+Cz=D,$$

где A, B, C – координаты вектора $\vec{a}$, перпендикулярного плоскости,

$D=Ax_0+By_0+Cz_0$,

$x_0$, $y_0$, $z_0$ – координаты любой точки, лежащей на плоскости.

В качестве точки, лежащей на плоскости, возьмем точку M(2; 4; 6).

Векторы $\overrightarrow{MN} = (3-2)\cdot\vec{i} + (1-4)\cdot\vec{j} + (-4-6)\cdot\vec{k} = \vec{i} - 3\cdot\vec{j} - 10\cdot\vec{k}$ и $\overrightarrow{MK} = (-3-2)\cdot\vec{i} + (-5-4)\cdot\vec{j} + (1-6)\cdot\vec{k} = -5\cdot\vec{i} - 9\cdot\vec{j} - 5\cdot\vec{k}$ параллельны искомой плоскости, следовательно, их векторное произведение будет вектором $\vec{a}$, перпендикулярным плоскости.

Вычислим вектор $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MK} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & -10 \\ -5 & -9 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -10 \\ -9 & -5 \end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -5 & -9 \end{vmatrix}\cdot\vec{k} =$$

$$= [-3\cdot(-5) - (-10)\cdot(-9)]\cdot\vec{i} - [1\cdot(-5) - (-10)\cdot(-5)]\cdot\vec{j} + [1\cdot(-10) - (-3)\cdot(-5)]\cdot\vec{k} =$$

$$= (15-90)\cdot\vec{i} - (-5-50)\cdot\vec{j} + (-10-15)\cdot\vec{k} = -75\cdot\vec{i} + 55\cdot\vec{j} - 25\cdot\vec{k}.$$

Вектор $\vec{b} = -\frac{1}{5}\cdot\vec{a} = 15\cdot\vec{i} - 11\cdot\vec{j} + 5\cdot\vec{k}$ также будет перпендикулярным искомой плоскости.

Вычислим величину $D$:

$$D = 15\cdot 2 - 11\cdot 4 + 5\cdot 6 = 16.$$

Таким образом, уравнение искомой плоскости имеет вид:

$$15x - 11y + 5z = 16.$$

**Ответ:** $\mathbf{15x - 11y + 5z = 16}$.

## Вариант № 4

**Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M(– 1; 1; 0) перпендикулярно прямой** $\mathbf{\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}}$**.**

### Решение

Уравнение плоскости имеет вид:

$$Ax + By + Cz = D,$$

где A, B, C – координаты вектора $\vec{a}$, перпендикулярного плоскости,

$D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$,

$x_0$, $y_0$, $z_0$ – координаты любой точки, лежащей на плоскости.

В качестве точки, лежащей на плоскости, возьмем точку M(– 1; 1; 0).

В уравнении прямой $\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}$ величины, стоящие в знаменателях, являются координатами вектора $\vec{s} = \{8, 4, 1\}$ параллельного прямой и, следовательно, перпендикулярного искомой плоскости, т.е. $\vec{a} = \vec{s} = \{8, 4, 1\}$.

Вычислим величину $D$:

$$D = 8 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -4.$$

Таким образом, уравнение искомой плоскости имеет вид:

$$8x + 4y + z = -4.$$

**Ответ:** $\mathbf{8x + 4y + z = -4}$.

**Вариант № 5**

**Определить расстояние от точки M(2; 0; 1) до плоскости α:** $x + y - 2z = 9$.

## Решение

Расстояние от точки M($x_1$, $y_1$ $z_1$) до плоскости $Ax + By + Cz = D$ рассчитывается по формуле:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Следовательно,

$$d = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 9|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{4}{3}\sqrt{6}.$$

**Ответ:** $d = \dfrac{4}{3}\sqrt{6}$ .

## Вариант № 6

**Определить расстояние от точки M(-1; 3; 2) до прямой $\mathbf{\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{-1}}$.**

### Решение

Расстояние от точки $M(x_1, y_1\ z_1)$ до прямой $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ рассчитывается по формуле:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{MM_0} \times \vec{s}\right|}{\left|\vec{s}\right|},$$

где $\vec{s} = \{l, m, n\}$ – направляющий вектор прямой,

$\overrightarrow{MM_0} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$.

Рассчитаем координаты вектора $\overrightarrow{MM_0}$ :

$$\overrightarrow{MM_0} = \{-1-3,\ 3-2,\ 2-(-1)\} = \{-4,1,3\}.$$

Рассчитаем модуль векторного произведения:

$$\left|\overrightarrow{MM_0} \times \vec{s}\right| = \begin{vmatrix} \bar{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2} =$$

$$=\sqrt{(1\cdot(-1)-1\cdot 3)^2+(-4\cdot(-1)-2\cdot 3)^2+(-4\cdot 1-2\cdot 1)^2}=$$

$$=\sqrt{4^2+2^2+6^2}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}\,.$$

Рассчитаем модуль вектора $\vec{s}$:

$$\left|\vec{s}\right|=\sqrt{l^2+m^2+n^2}=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}\,.$$

Следовательно,

$$d=\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{6}}=2\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{21}\,.$$

**Ответ:** $d=\frac{2}{3}\sqrt{21}$.

**Вариант № 7**

**Определить угол между плоскостями $\alpha$: $\mathbf{3x+y+2z=11}$ и $\beta$: $\mathbf{x-y+3z=21}$.**

**Решение**

Угол между плоскостью $\alpha$: $A_1x+B_1y+C_1z=D_1$ и плоскостью $\beta$: $A_2x+B_2y+C_2z=D_2$ определяется по формуле:

$$\angle(\alpha,\beta)=\arccos\frac{\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}}{\left|\overrightarrow{a_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{a_2}\right|},$$

где $\overrightarrow{a_1}=\{A_1,\,B_1,\,C_1\}$, $\overrightarrow{a_2}=\{A_2,\,B_2,\,C_2\}$ – векторы, перпендикулярные плоскостям $\alpha$ и $\beta$.

В рассматриваемой задаче $\overrightarrow{a_1}=\{3,1,2\}$, $\overrightarrow{a_2}=\{1,-1,3\}$.

Рассчитаем скалярное произведение:

$$\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=3\cdot 1+1\cdot(-1)+2\cdot 3=8\,.$$

Рассчитаем модули векторов $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$:

$$\left|\overrightarrow{a_1}\right| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14},$$

$$\left|\overrightarrow{a_2}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}.$$

Следовательно,

$$\angle(\alpha, \beta) = \arccos\frac{8}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{11}} = \arccos\frac{8 \cdot \sqrt{14 \cdot 11}}{14 \cdot 11} = \arccos\frac{4 \cdot \sqrt{154}}{77}.$$

**Ответ:** $\boldsymbol{\angle(\alpha, \beta) = \arccos\frac{4 \cdot \sqrt{154}}{77}}$.

### Вариант № 8

**Определить угол между прямой $\mathbf{\frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}}$ и плоскостью $\mathbf{2x - y + 3z} = 7$.**

### Решение

Угол между прямой p: $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ и плоскостью $\alpha$: $Ax + By + Cz = D$ определяется по формуле:

$$\angle(p, \alpha) = \arcsin\frac{\left|\vec{a} \cdot \vec{s}\right|}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{s}\right|},$$

где $\vec{s} = \{l, m, n\}$ – направляющий вектор прямой p,

$\vec{a} = \{A, B, C\}$ – вектор, перпендикулярный плоскости $\alpha$.

В рассматриваемой задаче $\vec{s} = \{-1, 1, 2\}$, $\vec{a} = \{2, -1, 3\}$.

Рассчитаем модуль скалярного произведения:

$$\left|\vec{a} \cdot \vec{s}\right| = \left|-1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3\right| = 3.$$

Рассчитаем модули векторов $\vec{s}$ и $\vec{a}$:

$$\left|\vec{s}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6},$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}\,.$$

Следовательно,

$$\angle(p,\alpha) = \arcsin\frac{3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}} = \arcsin\frac{3}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}} = \arcsin\frac{3\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{7\cdot 2\cdot 3} = \arcsin\frac{\sqrt{21}}{14}\,.$$

**Ответ:** $\boldsymbol{\angle(p,\alpha) = \arcsin\frac{\sqrt{21}}{14}}$.

## Вариант № 9

**Определить угол между прямыми p: $\boldsymbol{\frac{x-2}{3} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+9}{-1}}$ и q: $\boldsymbol{\frac{x+8}{2} = \frac{y-11}{-1} = \frac{z+23}{3}}$.**

### Решение

Угол между прямой p: $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ и прямой q: $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ определяется по формуле:

$$\angle(p,q) = \arccos\frac{\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}}{\left|\vec{s_1}\right|\cdot\left|\vec{s_2}\right|},$$

где $\vec{s_1} = \{l_1,\, m_1,\, n_1\}$, $\vec{s_2} = \{l_2,\, m_2,\, n_2\}$ – направляющие векторы прямых p и q.

В рассматриваемой задаче $\vec{s_1} = \{3, 2, -1\}$, $\vec{s_2} = \{2, -1, 3\}$.

Рассчитаем скалярное произведение:

$$\vec{s_1}\cdot\vec{s_2} = 3\cdot 2 + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 3 = 1\,.$$

Рассчитаем модули векторов $\vec{s_1}$ и $\vec{s_2}$:

$$\left|\vec{s_1}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}\,,$$

$$\left|\overrightarrow{s_2}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

Следовательно,

$$\angle(p, q) = \arccos\frac{1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \arccos\frac{1}{14}.$$

**Ответ:** $\angle(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{arccos}\,\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{14}}$.

**Вариант № 0**

**Определить площадь треугольника MNK, где.M(5, –2, 3), N(4, 6, 1), K(3, 7, –8).**

### Решение

Площадь треугольника определяется по формуле:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MK}\right|.$$

Рассчитаем координаты векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MK}$:

$$\overrightarrow{MN} = \{4-5,\ 6-(-2),\ 1-3\} = \{-1,\ 8,\ -2\},$$

$$\overrightarrow{MK} = \{3-5,\ 7-(-2),\ -8-3\} = \{-2,\ 9,\ -11\}.$$

Рассчитаем модуль векторного произведения:

$$\left|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MK}\right| = \begin{vmatrix} \bar{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 8 & -2 \\ -2 & 9 & -11 \end{vmatrix} = \sqrt{\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 9 & -11 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -11 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 9 \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \sqrt{(8\cdot(-11) - 9\cdot(-2))^2 + (-1\cdot(-11) - (-2)\cdot(-2))^2 + (-1\cdot 9 - (-2)\cdot 8)^2} =$$

$$= \sqrt{70^2 + 7^2 + 7^2} = \sqrt{7^2\left(10^2 + 1^2 + 1^2\right)} = 7\sqrt{102}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{102} = \frac{7}{2}\sqrt{102}.$$

**Ответ:** $\mathbf{S_{\Delta} = \frac{7}{2}\sqrt{102}}$.

**Задание № 2**

**Даны матрицы:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -6 \\ -2 & 7 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Выполнить, если возможно, следующие действия:**
**2B + D, 2B + C, BA, DB, HA.**

**Решение**

Сумма матриц определена только для матриц, имеющих равное число строк и столбцов, следовательно, сумма 2B + D не определена.

Вычислим вторую сумму:

$$2 \cdot B + C = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -6 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -12 \\ -4 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4+3 & 2-3 \\ 2-4 & -12+1 \\ -4+6 & 14+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -2 & -11 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц определено, только если в первом сомножителе столько столбцов, сколько во втором строк. Следовательно, произведения BA и DB определены, а произведение HA неопределенно.

Вычислим E = BA (элемент матрицы произведения, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце равен $e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \cdot a_{kj}$ ):

$$\mathrm{B} \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -6 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 2\cdot 5 + 1\cdot 3 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 4 \\ 1\cdot 1 + (-6)\cdot 2 & 1\cdot 5 + (-6)\cdot 3 & 1\cdot(-1) + (-6)\cdot 4 \\ (-2)\cdot 1 + 7\cdot 2 & (-2)\cdot 5 + 7\cdot 3 & (-2)\cdot(-1) + 7\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 13 & 2 \\ -11 & -13 & -25 \\ 12 & 11 & 30 \end{pmatrix}.$$

Аналогично

$$\mathrm{D} \cdot \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -6 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)\cdot 2 + 3\cdot 1 + 1\cdot(-2) & (-1)\cdot 1 + 3\cdot(-6) + 1\cdot 7 \\ 2\cdot 2 + (-2)\cdot 1 + 5\cdot(-2) & 2\cdot 1 + (-2)\cdot(-6) + 5\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ -8 & 25 \end{pmatrix}.$$

**Ответ: сумма 2B + D и произведение HA не определены;**

$$\mathbf{2 \cdot B + C} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-11} \\ \mathbf{2} & \mathbf{14} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B \cdot A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{13} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-11} & \mathbf{-13} & \mathbf{-25} \\ \mathbf{12} & \mathbf{11} & \mathbf{30} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D \cdot B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{12} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{25} \end{pmatrix}.$$

## Задание № 3

**Решить систему уравнений по формулам Крамера:**

$$\begin{cases} \mathbf{2x_1 - 3x_2 - x_3 = b_1} \\ \mathbf{5x_1 - 4x_2 = b_2} \\ \mathbf{7x_1 - 8x_2 + 6x_3 = b_3} \end{cases}, \text{ где } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}.$$

**Решение**

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Если главный (основной) определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных величинах $x_1$, $x_2$, $x_3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

не равен нулю ($\Delta \neq 0$), то система имеет единственное решение, которое можно определить по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ – дополнительные определители третьего порядка, получающиеся из главного определителя заменой столбца коэффициентов при соответствующем неизвестном на столбец свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Определитель третьего порядка, например, главный определитель системы, определяется равенством:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Знаки, с которыми произведения элементов входят в последнюю формулу, легко запомнить, пользуясь схемой, представленной на рисунке 1.

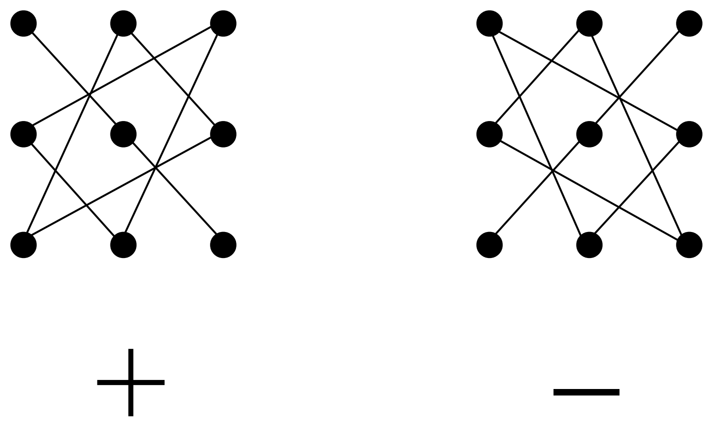

Рисунок 1 – Определение знаков слагаемых при вычислении определителя (“правило треугольников”)

Составим и вычислим главный определитель рассматриваемой системы уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -4 & 0 \\ 7 & -8 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4)\cdot 6 + 3\cdot 0\cdot 7 + (-1)\cdot 5\cdot(-8) -$$

$$-(-1)\cdot(-4)\cdot 7 - 3\cdot 5\cdot 6 - 2\cdot 0\cdot(-8) = -48 + 0 + 40 - 28 - 90 - 0 = -126 \neq 0.$$

Поскольку $\Delta \neq 0$ система уравнений имеет единственное решение.

Составим и вычислим дополнительные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & -8 & 6 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-4)\cdot 6 + 3\cdot 0\cdot 3 + (-1)\cdot 1\cdot(-8) -$$

$$-(-1)\cdot(-4)\cdot 3 - 3\cdot 1\cdot 6 - (-2)\cdot 0\cdot(-8) = 48 + 0 + 8 - 12 - 18 - 0 = 26,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 6 + (-2)\cdot 0\cdot 7 + (-1)\cdot 5\cdot 3 -$$

$$-(-1)\cdot 1\cdot 7 - (-2)\cdot 5\cdot 6 - 2\cdot 0\cdot 3 = 12 + 0 - 15 + 7 + 60 - 0 = 64,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \\ 7 & -8 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4)\cdot 3 + 3\cdot 1\cdot 7 + (-2)\cdot 5\cdot(-8) -$$

$$-(-2)\cdot(-4)\cdot 7 - 3\cdot 5\cdot 3 - 2\cdot 1\cdot(-8) = -24 + 21 + 80 - 56 - 45 + 16 = -8.$$

По формулам Крамера находим решение системы уравнений:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{26}{-126} = -\frac{13}{63},\; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{64}{-126} = -\frac{32}{63},\; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-8}{-126} = \frac{4}{63},$$

**Проверка.**

Подставим найденные значения $x_1,\ x_2,\ x_3$ в уравнения системы:

$$\begin{cases} 2\cdot\left(-\frac{13}{63}\right) + 3\cdot\left(-\frac{32}{63}\right) + \frac{4}{63} = \frac{-26-96-4}{63} = -\frac{126}{63} = -2, \text{ верно,} \\ 5\cdot\left(-\frac{13}{63}\right) - 4\cdot\left(-\frac{32}{63}\right) + 0\cdot\frac{4}{63} = \frac{-65+128+0}{63} = \frac{63}{63} = 1, \text{ верно,} \\ 7\cdot\left(-\frac{13}{63}\right) - 8\cdot\left(-\frac{32}{63}\right) + 6\cdot\frac{4}{63} = \frac{-91+256+24}{63} = \frac{189}{63} = 3, \text{ верно.} \end{cases}$$

**Ответ:** $\mathbf{x_1 = -\frac{13}{63},\ x_2 = -\frac{32}{63},\ x_3 = \frac{4}{63}}$.

## Задание № 4

**Исследовать и решить методом Гаусса систему уравнений:**

$$\begin{cases} \mathbf{3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = b_1} \\ \mathbf{x_2 - 2x_3 + 3x_4 = b_3} \\ \mathbf{x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = b_2} \end{cases}, \text{ где } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}.$$

## Решение

Запишем расширенную матрицу системы и, используя элементарные преобразования, приведем ее к трапециевидной форме:

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{поменяем местами первую} \\ \text{и третью строки} \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{вычтем из третьей строки первую,} \\ \text{умноженную на три} \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

.

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -10 & -4 & 8 & 6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{делим третью строку на два и прибавим} \\ \text{к ней вторую строку, умноженную на пять} \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 19 & 8 \end{array}\right)$$

Ранг матрицы основной системы равен рангу расширенной системы и равен трем. Символически это можно записать так: $\mathrm{rg\,A} = \mathrm{rg\,B}$.

Число неизвестных равно четырем, следовательно, три неизвестные – базисные, одно – свободное. Базисный минор:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -12 \end{vmatrix}$$

состоит из коэффициентов при неизвестных $x_1$, $x_2$ и $x_3$, следовательно, именно они – базисные, а $x_4$ – свободный. Пусть $x_4 = a$ – произвольное число.

Из последней строки преобразованной матрицы получим:

$$-12x_3 + 19x_4 = 8.$$

Откуда

$$x_3 = -\frac{19}{12}a - \frac{2}{3}$$

или

$$x_3 = -19c - \frac{2}{3},$$

где $c = \frac{a}{12}$ – также произвольное число.

Аналогично из второй строки преобразованной матрицы получим:

$x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1$.

Подставим значения $x_3$ и $x_4$ и определим значение $x_2$:

$$x_2 = 1 + 2x_3 - 3x_4 = 1 + 2 \cdot \left(-19c - \frac{2}{3}\right) - 3 \cdot 12 \cdot c = -74 \cdot c - \frac{1}{3}.$$

Из первой строки преобразованной матрицы получим:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1$$

или

$$x_1 = -1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1 - 3 \cdot \left(-74 \cdot c - \frac{1}{3}\right) - 2 \cdot \left(-19 \cdot c - \frac{2}{3}\right) + 3 \cdot 12 \cdot c =$$

$$= 296 \cdot c + \frac{4}{3}.$$

**Ответ: Общее решение системы имеет вид:**

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 = 296 \cdot c + \frac{4}{3}} \\ \mathbf{x_2 = -74 \cdot c - \frac{1}{3}} \\ \mathbf{x_3 = -19 \cdot c - \frac{2}{3}} \\ \mathbf{x_4 = 12 \cdot c} \end{cases}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / Д.В. Беклемишев. – М.: Физматлит, 2005. – 303 с.
2. Слободинская, Т.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие для студентов заочной формы обучения / Т.В. Слободинская, Ю.А. Необердин, А.В. Ржонсницкий. – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2008. – 51 с.
3. Шляпина, О.В. Типовые варианты контрольной работы по теме векторная алгебра и аналитическая геометрия: методические указания / О.В. Шляпина, Н.Н. Гизлер, В.С. Капитонов. – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2009. – 23 с.
4. Привалов, И.И. Аналитическая геометрия: учебник / И.И. Привалов. – СПб.: Лань, 2010. – 304 с.

**СОДЕРЖАНИЕ**

Механический факультет

Методические указания
для студентов заочной формы обучения

Линейная алгебра и аналитическая геометрия.
Примеры и контрольные задания

Андрей Викторович Марков
Николай Александрович Марцулевич

Отпечатано с оригинал – макета. Формат 60x90 $^1/_{16}$
Печ.л. 2,0. Тираж 30 экз.  Заказ №

Санкт – Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)

190013, Санкт – Петербург, Московский пр., 26
Типография издательства СПбГТИ(ТУ), тел. 494-93-65