ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2
РАСЧЕТ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК И ЭНТРОПИИ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1.1 Изучение способов описания *непрерывных случайных величин*.

1.2 Приобретение практических навыков расчета *числовых характеристик* и *энтропии* непрерывной случайной величины по ее *плотности распределения вероятности*.

2. ХОД РАБОТЫ

Ход данной лабораторной работы аналогичен ходу лабораторной работы №1; поскольку рассмотрению подлежит непрерывная случайная величина, а не дискретная, то *ряд распределения заменяется плотностью распределения, а энтропия – дифференциальной энтропией*.

3. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

3.1 Непрерывные случайные величины. Плотность распределения вероятностей.

Случайные величины, возможные значения которых *непрерывно* заполняют некоторый промежуток, называются *непрерывными случайными величинами*. Для непрерывных случайных величин справедливо следующее положение: *вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю*. Механическая интерпретация непрерывной случайной величины сводится к *непрерывному* распределению единичной массы (суммарной вероятности, равной единице) по оси абсцисс, причем *ни одна* точка не обладает конечной массой. Подавляющее число непрерывных случайных величин, встречающихся в задачах практики, имеют *непрерывный и дифференцируемый* интегральный закон распределения $F(x)$.

Пусть имеется непрерывная случайная величина ξ с интегральной функцией распределения $F(x)$, которая является непрерывной и дифференцируемой. Функция

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x) \qquad (2.1)$$

носит название *плотность распределения вероятностей*. Иногда функцию $p(x)$ называют *дифференциальной функцией распределения* или *дифференциальным законом распределения*. С точки зрения механической интерпретации распределения функция $p(x)$ характеризует *линейную плотность* распределения единичной массы по оси абсцисс.

Вероятность попадания случайной величины ξ на отрезок $[x_1, x_2]$ можно выразить через плотность вероятности $p(x)$ следующим образом:

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx \,. \tag{2.2}$$

Зная дифференциальный закон распределения, можно получить интегральный закон:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx \,. \tag{2.3}$$

Плотность распределения вероятностей обладает следующими основными свойствами:

1) условие неотрицательности: $p(x) \geq 0$,
2) условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \,. \tag{2.4}$$

3.2 Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Начальным моментом s-го порядка непрерывной случайной величины ξ называется интеграл вида

$$\alpha_s(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s p(x)dx \,. \tag{2.5}$$

Первый начальный момент случайной величины ξ называется ее *математическим ожиданием*:

$$\alpha_1(\xi) = M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \,. \tag{2.6}$$

Центральным моментом s*-го порядка* непрерывной случайной величины ξ называется интеграл вида

$$\mu_s(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(\xi)]^s \, p(x) dx \,. \tag{2.7}$$

Второй центральный момент случайной величины ξ называется ее *дисперсией*:

$$\mu_2(\xi) = D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(\xi)]^2 \, p(x) dx \,. \tag{2.8}$$

Такие числовые характеристики как *среднее квадратическое отклонение*, *коэффициент асимметрии* и *коэффициент эксцесса* для непрерывных случайных величин определяются *аналогично* соответствующим числовым характеристикам дискретных случайных величин (см. методические указания к лабораторной работе №1).

3.3 Дифференциальная энтропия

Дифференциальной энтропией непрерывной случайной величины ξ, характеризуемой плотностью вероятности $p(x)$, называется величина

$$H(\xi) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x) dx \,. \tag{2.9}$$

Дифференциальная энтропия является мерой априорной неопределенности непрерывной случайной величины.

В отличие от энтропии дискретной случайной величины дифференциальная энтропия является *относительной* мерой неопределенности. Ее значение зависит от масштаба случайной величины, а, следовательно, и от выбора единицы измерения. Дифференциальная энтропия может принимать положительные, отрицательные и нулевые значения. Как и энтропия дискретной случайной величины, дифференциальная энтропия не зависит от математического ожидания случайной величины.

3.4 Некоторые законы распределения непрерывной случайной величины

1. *Закон арксинуса*

$$p(x)=\begin{cases}0,\ x\in(-\infty,-a)\cup(a,\infty),\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}},\ x\in(-a,a),\end{cases} \tag{2.10}$$

где $a>0$.

2. *Экспоненциальный односторонний закон*

$$p(x)=\begin{cases}0,\ x\in(-\infty,0),\\ ae^{-ax},\ x\in(0,\infty),\end{cases} \tag{2.11}$$

где $a>0$.

3. *Показательно-степенной закон*

$$p(x)=\begin{cases}0,\ x\in(-\infty,0),\\ \dfrac{x^m}{m!}e^{-x},\ x\in(0,\infty),\end{cases} \tag{2.12}$$

где m − целое неотрицательное число.

4. *Закон Рэлея*

$$p(x)=\begin{cases}0,\ x\in(-\infty,0),\\ \dfrac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right),\ x\in(0,\infty),\end{cases} \tag{2.13}$$

где $\sigma>0$.

5. *Закон Максвелла*

$$p(x)=\begin{cases}0,\ x\in(-\infty,0),\\ \dfrac{4x^2}{\sqrt{\pi}\left(2\sigma^2\right)^{3/2}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right),\ x\in(0,\infty),\end{cases} \tag{2.14}$$

где $\sigma>0$.

6. *Логарифмически-нормальный закон*

$$p(x)=\begin{cases}0,\ x\in(-\infty,0),\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left[-\dfrac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],\ x\in(0,\infty),\end{cases}\qquad(2.15)$$

где $\sigma>0$.

3.5 Пример расчета числовых характеристик и дифференциальной энтропии непрерывной случайной величины, распределенной по логарифмически-нормальному закону

Распределение непрерывной случайной величины, подчиненной логарифмически-нормальному закону, описывается формулой (2.15).

3.5.1 Опишем *ограничения*, накладываемые на параметры распределения (2.15)

```
> assume(x>0); # при x<0 плотность вероятности равна нулю
> assume(sigma>0); # параметр логнормального распределения
```

3.5.2 Проверка ограничений

```
> about(x,sigma);
Originally x, renamed x~:
  is assumed to be: RealRange(Open(0),infinity)

Originally sigma, renamed sigma~:
  is assumed to be: RealRange(Open(0),infinity)
```

3.5.3 Напишем функцию, определяющую *плотность распределения вероятностей* (2.15)

```
> p:=(x,sigma,mu)->(1/(sqrt(2*Pi)*sigma*x))*exp(-((ln(x)-
mu)^2)/(2*(sigma^2)));
```

$$p := (x,\sigma,\mu) \to \frac{e^{\left(-1/2\,\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{\sigma^2}\right)}}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma\,x}$$

3.5.4 Выполним проверку *условия нормировки*

```
> int(p(x,sigma,mu),x=0..infinity); # проверка условия нормировки
```

$$1$$

3.5.5 Напишем функцию для определения *начального момента s-го порядка*

Очевидно, с учетом (2.15) выражение для начального момента s-го порядка (2.5) можно записать в виде

$$\alpha_s(\sigma,\mu)=\int_0^\infty x^s p(x,\sigma,\mu)dx\,. \tag{2.16}$$

```
> alpha:=(sigma,mu,s)->int((x^s)*p(x,sigma,mu),x=0..infinity); # начальный момент s-го порядка
```

$$\alpha := (\sigma, \mu, s) \rightarrow \int_0^\infty x^s\, \mathrm{p}(x, \sigma, \mu)\, dx$$

```
> simplify(alpha(sigma,mu,s));
```

$$e^{(1/2\, s\, (s\, \sigma\sim^2 + 2\, \mu))}$$

Итак, для начального момента s-го порядка можно выписать следующую формулу:

$$\alpha_s(\sigma,\mu)=\exp\left[\frac{s}{2}\left(s\sigma^2+2\mu\right)\right]. \tag{2.17}$$

3.5.6 Найдем *начальный момент нулевого порядка*

```
> alpha(sigma,mu,0); # начальный момент нулевого порядка
```

$$1$$

```
> # соответствует условию нормировки
```

3.5.7 Напишем функцию для определения *математического ожидания*

```
> M:=(sigma,mu)->alpha(sigma,mu,1); # математическое ожидание
```

$$M := (\sigma, \mu) \rightarrow \alpha(\sigma, \mu, 1)$$

```
> simplify(M(sigma,mu));
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> 1/sigma^2*mu+1
Will now try indefinite integration and then take limits.
```

$$e^{(\mu + 1/2\, \sigma\sim^2)}$$

Таким образом, для математического ожидания справедливо выражение

$$M(\sigma,\mu)=\alpha_1(\sigma,\mu)=\exp\left(\mu+\sigma^2/2\right). \tag{2.18}$$

3.5.8 Построим график зависимости математического ожидания от параметров σ и μ распределения

```
> plot3d(M(sigma,mu),sigma=0..1.2,mu=-
2..2,axes=BOXED,axesfont=[COURIER,BOLD,12],font=[TIMES,ITALIC,14],
labels=["sigma","mu","M"],orientation=[225,50],shading=ZGRAYSCALE,
title="график зависимости МО от параметров\nлогнормального
распределения",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.1.

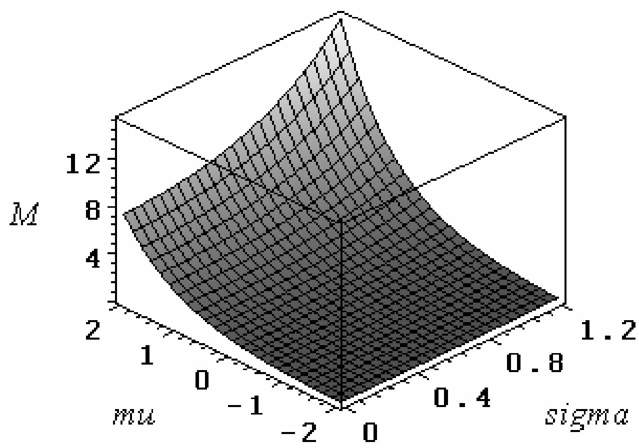

Рисунок 1.1 – График зависимости математического ожидания от параметров σ и μ логнормального распределения

3.5.9 Напишем функцию для определения *центрального момента s-го порядка*

Очевидно, с учетом (2.15) выражение для центрального момента s-го порядка (2.7) можно записать в виде

$$\mu_s(\sigma, \mu) = \int_0^\infty [x - M(\sigma, \mu)]^s \, p(x, \sigma, \mu) dx \,. \qquad (2.19)$$

```
> mu:=(sigma,mu,s)->int(((x-
M(sigma,mu))^s)*p(x,sigma,mu),x=0..infinity); # центральный момент
s-го порядка
```

$$\mu := (\sigma, \mu, s) \to \int_0^\infty (x - \mathrm{M}(\sigma, \mu))^s \, \mathrm{p}(x, \sigma, \mu) \, dx$$

```
> simplify(mu(sigma,mu,s));
```

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\left(x\sim - e^{(1/2\,\sigma\sim^2+\mu)}\right)^s \sqrt{2}\, e^{\left(-1/2\,\frac{(\ln(x\sim)-\mu)^2}{\sigma\sim^2}\right)}}{\sqrt{\pi}\,\sigma\sim\, x\sim}\, dx\sim$$

3.5.10 Найдем *центральный момент нулевого порядка*

```
> simplify(mu(sigma,mu,0)); # центральный момент нулевого порядка
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> 1/sigma^2*mu+1
Will now try indefinite integration and then take limits.
```

$$1$$

3.5.11 Найдем *центральный момент первого порядка*

```
> simplify(mu(sigma,mu,1)); # центральный момент первого порядка
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> 1/sigma^2*mu+1
Will now try indefinite integration and then take limits.
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> 1/sigma^2*mu
Will now try indefinite integration and then take limits.
```

$$0$$

3.5.12 Напишем функцию для определения *дисперсии*

```
> Dsp:=(sigma,mu)->mu(sigma,mu,2); # дисперсия
```

$$Dsp := (\sigma, \mu) \rightarrow \mu(\sigma, \mu, 2)$$

```
> simplify(Dsp(sigma,mu));
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> 1/sigma^2*mu+1
Will now try indefinite integration and then take limits.
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> 1/sigma^2*mu+2
Will now try indefinite integration and then take limits.
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> 1/sigma^2*mu+1
Will now try indefinite integration and then take limits.
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> 1/sigma^2*mu
Will now try indefinite integration and then take limits.
```

$$e^{(2\mu+2\sigma\sim^2)} - e^{(\sigma\sim^2+2\mu)}$$

Итак, оказалось, что для дисперсии справедливо следующее выражение:

$$D(\sigma, \mu) = \mu_2(\sigma, \mu) = \exp\left(2\mu + \sigma^2\right)\left[\exp\left(\sigma^2\right) - 1\right]. \qquad (2.20)$$

3.5.13 Построим график зависимости дисперсии от параметров σ и μ распределения

```
> plot3d(Dsp(sigma,mu),sigma=0..1,mu=-
0.8..0.8,axes=BOXED,axesfont=[COURIER,BOLD,12],font=[TIMES,ITALIC,
14],labels=["sigma","mu","D"],orientation=[200,50],shading=ZGRAYSC
ALE,title="график зависимости дисперсии от
параметров\nлогнормального
распределения",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.2.

Рисунок 1.2 – График зависимости дисперсии
от параметров σ и μ логнормального распределения

3.5.14 Напишем функцию для определения *среднего квадратического отклонения*

```
> Sko:=(sigma,mu)->(Dsp(sigma,mu))^(1/2);
```

$$Sko := (\sigma, \mu) \rightarrow \sqrt{\mathrm{Dsp}(\sigma, \mu)}$$

```
> simplify(Sko(sigma,mu));
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> 1/sigma^2*mu+1
Will now try indefinite integration and then take limits.
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> 1/sigma^2*mu+2
Will now try indefinite integration and then take limits.
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> 1/sigma^2*mu+1
Will now try indefinite integration and then take limits.
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> 1/sigma^2*mu
Will now try indefinite integration and then take limits.
```

$$\sqrt{e^{(\sigma\sim^2)} - 1}\,\sqrt{e^{(\sigma\sim^2 + 2\,\mu)}}$$

Для определения среднего квадратического отклонения можно выписать следующее выражение:

$$Sko(\sigma,\mu)=\sqrt{D(\sigma,\mu)}=\sqrt{\exp\left(2\mu+\sigma^2\right)\left[\exp\left(\sigma^2\right)-1\right]}. \qquad (2.21)$$

3.5.15 Построим график зависимости среднего квадратического отклонения от параметров σ и μ распределения

```
> plot3d(Sko(sigma,mu),sigma=0..1,mu=-
0.8..0.8,axes=BOXED,axesfont=[COURIER,BOLD,12],font=[TIMES,ITALIC,
14],labels=["sigma","mu","СКО"],orientation=[200,50],shading=ZGRAY
SCALE,title="график зависимости СКО от параметров\nлогнормального
распределения",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.3.

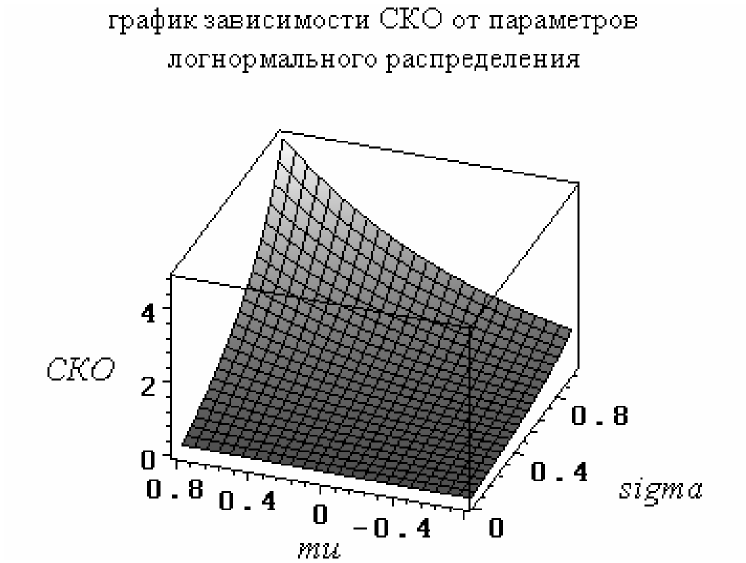

Рисунок 1.3 – График зависимости СКО
от параметров σ и μ логнормального распределения

3.5.16 Напишем функцию для определения *коэффициента асимметрии*

```
> Sk:=(sigma,mu)->mu(sigma,mu,3)/((Sko(sigma,mu))^3); #
коэффициент асимметрии
```

$$Sk := (\sigma,\mu) \to \frac{\mu(\sigma,\mu,3)}{\mathrm{Sko}(\sigma,\mu)^3}$$

```
> simplify(Sk(sigma,mu));
```

$$\frac{\left(e^{(9/2\,\sigma\sim^2+3\,\mu)}-3\,e^{(5/2\,\sigma\sim^2+3\,\mu)}+2\,e^{(3\,\mu+3/2\,\sigma\sim^2)}\right)e^{(-3/2\,\sigma\sim^2)}}{\sqrt{e^{(6\,\mu)}}\,\left(e^{(\sigma\sim^2)}-1\right)^{(3/2)}}$$

Очевидно, для коэффициента асимметрии можно выписать следующую формулу:

$$Sk(\sigma,\mu)=\frac{\mu_3(\sigma,\mu)}{\left[Sko(\sigma,\mu)\right]^3}=\frac{\exp\left(\sigma^2\right)\left[\exp\left(2\sigma^2\right)-3\right]+2}{\left[\exp\left(\sigma^2\right)-1\right]^{3/2}}. \qquad (2.22)$$

Оказывается, что *коэффициент асимметрии непрерывной случайной величины, распределенной по логнормальному закону, зависит только от параметра* σ *и не зависит от параметра* μ. При $\sigma = 0$ распределение расположено *симметрично* относительно математического ожидания; при $\sigma > 0$ распределение имеет *положительную асимметрию* («скошено влево» относительно математического ожидания).

3.5.17 Построим график зависимости коэффициента асимметрии от параметра σ распределения

```
>
plot(Sk1(sigma),sigma=0..2,axes=BOXED,axesfont=[COURIER,BOLD,12],color=black,font=[TIMES,ITALIC,14],labels=["sigma","Sk"],linestyle=[SOLID,DOT,DASHDOT],thickness=2,title="графики зависимости коэф. асимметрии\n от параметра sigma\nлогнормального распределения",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.4.

Рисунок 1.4 – График зависимости коэффициента асимметрии от параметра σ логнормального распределения

3.5.18 Напишем функцию для определения *коэффициента эксцесса*

```
> Ex:=(sigma,mu)->(mu(sigma,mu,4)/((Sko(sigma,mu))^4))-3; # коэффициент эксцесса
```

$$Ex := (\sigma, \mu) \to \frac{\mu(\sigma, \mu, 4)}{\mathrm{Sko}(\sigma, \mu)^4} - 3$$

```
> simplify(Ex(sigma,mu));
```

$$-\frac{-e^{(8\sigma\sim^2+4\mu)} + 4\,e^{(4\mu+5\sigma\sim^2)} - 12\,e^{(4\mu+3\sigma\sim^2)} + 6\,e^{(4\mu+2\sigma\sim^2)} + 3\,e^{(4\mu+4\sigma\sim^2)}}{\left(-e^{(2\mu+2\sigma\sim^2)} + e^{(2\mu+\sigma\sim^2)}\right)^2}$$

Очевидно, для коэффициента эксцесса можно выписать следующую формулу:

$$Ex(\sigma,\mu)=\frac{\mu_4(\sigma,\mu)}{[Sko(\sigma,\mu)]^4}-3=\frac{\exp(6\sigma^2)-4\exp(3\sigma^2)-3\exp(2\sigma^2)+12\exp(\sigma^2)-6}{[\exp(\sigma^2)-1]^2}. \quad (2.23)$$

Таким образом, *коэффициент эксцесса непрерывной случайной величины, распределенной по логнормальному закону, как и коэффициент асимметрии, зависит только от параметра* σ *и не зависит от параметра* μ. При $\sigma=0$ островершинность распределения такая же, как и для соответствующего нормального распределения; при $\sigma>0$ островершинность логнормального распределения превосходит островершинность соответствующего нормального распределения.

3.5.19 Построим график зависимости коэффициента эксцесса от параметра σ распределения

```
>
plot(Ex1(sigma),sigma=0..1,axes=BOXED,axesfont=[COURIER,BOLD,12],c
olor=black,font=[TIMES,ITALIC,14],labels=["sigma","Ex"],linestyle=
[SOLID,DOT,DASHDOT],thickness=2,title="графики зависимости коэф.
эксцесса\n от параметра sigma\nлогнормального
распределения",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.5.

Рисунок 1.5 – График зависимости коэффициента эксцесса от параметра σ логнормального распределения

3.5.20 Построим графики плотности распределения вероятностей для различных значений параметров σ и μ

```
> plot3d(p(x,0.1,mu),x=0.4..1.5,mu=-
0.5..0.3,axes=BOXED,axesfont=[COURIER,BOLD,12],font=[TIMES,ITALIC,
14],labels=["x","mu","p(x)"],orientation=[220,45],shading=ZGRAYSCA
LE,title="плотность распределения
вероятностей",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.6.

Рисунок 1.6 – График плотности распределения вероятностей, $\sigma = 0{,}1$

```
> plot3d(p(x,0.7,mu),x=0..3,mu=-
0.5..0.3,axes=BOXED,axesfont=[COURIER,BOLD,12],font=[TIMES,ITALIC,
14],labels=["x","mu","p(x)"],orientation=[250,55],shading=ZGRAYSCA
LE,title="плотность распределения
вероятностей",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.7.

Рисунок 1.7 – График плотности распределения вероятностей, $\sigma = 0{,}7$

```
> plot3d(p(x,1,mu),x=0..2,mu=-
0.3..1,axes=BOXED,axesfont=[COURIER,BOLD,12],font=[TIMES,ITALIC,14
],labels=["x","mu","p(x)"],orientation=[240,50],shading=ZGRAYSCALE
,title="плотность распределения
вероятностей",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.8.

Рисунок 1.8 – График плотности распределения вероятностей, $\sigma = 1$

3.5.21 Напишем функцию, определяющую *интегральный закон распределения* непрерывной случайной величины, распределенной по логнормальному закону

```
> F:=(x,sigma,mu)->int(p(chi,sigma,mu),chi=0..x); >  #
интегральный закон распределения
```

$$F := (x, \sigma, \mu) \to \int_0^x \mathrm{p}(\chi, \sigma, \mu)\, d\chi$$

```
> simplify(F(x,sigma,mu)); >
simplify(F(0,sigma,mu));simplify(F(infinity,sigma,mu));
```

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\,(\ln(x\sim) - \mu)}{\sigma\sim}\right) + \frac{1}{2}$$

$$0$$

$$1$$

Таким образом, для интегральной функции можно выписать следующую формулу:

$$F(x) = \frac{1}{2}\,erf\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{1}{2}, \qquad (2.24)$$

где $erf(x)$ – интеграл вероятностей.

3.5.22 Построим графики интегральной функции для различных значений параметров σ и μ

```
> plot3d(F(x,0.1,mu),x=0.4..1.5,mu=-
0.5..0.3,axes=BOXED,axesfont=[COURIER,BOLD,12],font=[TIMES,ITALIC,
14],labels=["x","mu","F(x)"],orientation=[220,45],shading=ZGRAYSCA
LE,title="интегральный закон
распределения",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.9.

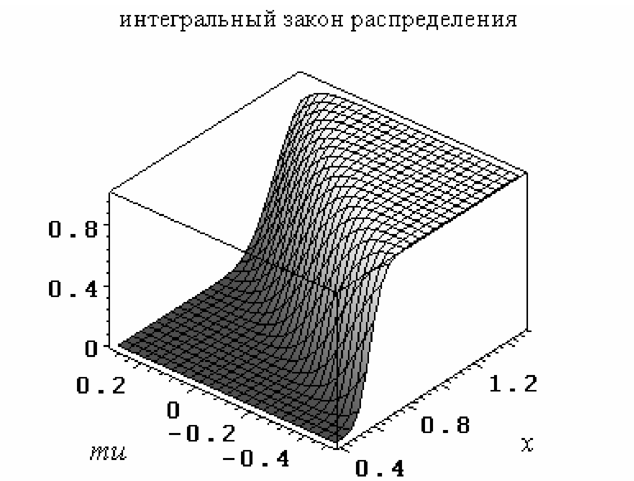

Рисунок 1.9 – График интегральной функции, $\sigma = 0{,}1$

```
> plot3d(F(x,0.7,mu),x=0..4,mu=-
0.5..0.3,axes=BOXED,axesfont=[COURIER,BOLD,12],font=[TIMES,ITALIC,
14],labels=["x","mu","F(x)"],orientation=[250,55],shading=ZGRAYSCA
LE,title="интегральный закон
распределения",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.10.

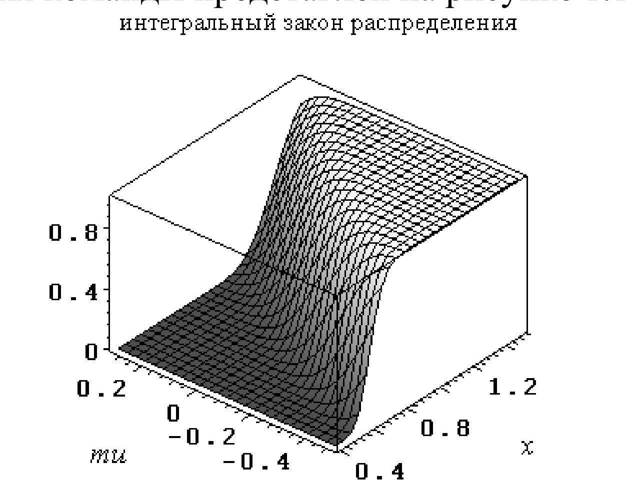

Рисунок 1.10 – График интегральной функции, $\sigma = 0{,}7$

```
> plot3d(F(x,1,mu),x=0..5,mu=-
0.3..1,axes=BOXED,axesfont=[COURIER,BOLD,12],font=[TIMES,ITALIC,14
],labels=["x","mu","F(x)"],orientation=[240,50],shading=ZGRAYSCALE
,title="интегральный закон
распределения",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.11.

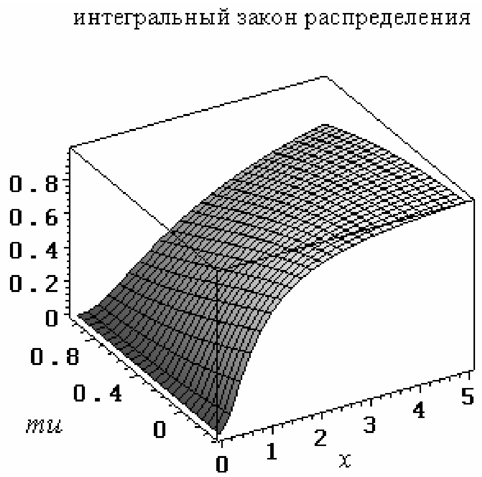

Рисунок 1.11 – График интегральной функции, $\sigma = 1$

3.5.23 Напишем функцию для вычисления *дифференциальной энтропии*

```
> H:=(sigma,mu)->-
int(p(x,sigma,mu)*ln(p(x,sigma,mu)),x=0..infinity);
```

$$H := (\sigma, \mu) \to -\int_0^\infty \mathrm{p}(x, \sigma, \mu)\ \ln(\mathrm{p}(x, \sigma, \mu))\, dx$$

```
> simplify(H(sigma,mu));
```

$$-\int_0^\infty -\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{2}\, e^{\left(-1/2\,\frac{(-\ln(x\sim)+\mu)^2}{\sigma\sim^2}\right)}\left(\ln(2)+\ln(\pi)+2\ln(\sigma\sim)+2\ln(x\sim)-2\ln\left(e^{\left(-1/2\,\frac{(-\ln(x\sim)+\mu}{\sigma\sim^2}\right.}\right.\right.}{\sqrt{\pi}\ \sigma\sim\ x\sim}$$

$$dx\sim$$

```
> with(student);
```

[D, *Diff*, *Doubleint*, *Int*, *Limit*, *Lineint*, *Product*, *Sum*, *Tripleint*, *changevar*, *completesquare*, *distance*, *equate*, *integrand*, *intercept*, *intparts*, *leftbox*, *leftsum*, *makeproc*, *middlebox*, *middlesum*, *midpoint*, *powsubs*, *rightbox*, *rightsum*, *showtangent*, *simpson*, *slope*, *summand*, *trapezoid*]

```
> changevar(x=ln(u),H(sigma,mu),u);
```

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\sigma\sim\ln(2)\sqrt{\pi}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sigma\sim\ln(\pi)\sqrt{\pi}\sqrt{2}-\sigma\sim\mu\sqrt{\pi}\sqrt{2}-\sigma\sim\ln(\sigma\sim)\sqrt{\pi}\sqrt{2}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\sigma\sim\sqrt{\pi}\sqrt{2}\right)\Big/\left(\sqrt{\pi}\ \sigma\sim\right)$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(\pi)+\mu+\ln(\sigma\sim)+\frac{1}{2}$$

```
> H1:=(sigma,mu)->1/2*ln(2)+1/2*ln(Pi)+mu+ln(sigma)+1/2;
```

$$H1 := (\sigma, \mu) \rightarrow \frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(\pi)+\mu+\ln(\sigma)+\frac{1}{2}$$

Итак, для дифференциальной энтропии справедлива следующая формула:

$$H(\sigma, \mu) = \ln\sqrt{2\pi\sigma} + \mu + 1/2. \tag{2.25}$$

3.5.24 Построим графики зависимости дифференциальной энтропии от параметров σ и μ

```
> plot([H1(0.01,mu),H1(1,mu),H1(5,mu)],mu=-
7..7,axes=NORMAL,axesfont=[COURIER,BOLD,12],color=black,font=[TIME
S,ITALIC,14],labels=["mu","H"],linestyle=[SOLID,DOT,DASHDOT],thick
ness=2,title="дифференциальная энтропия\n (логнормальное
распределение, sigma=0.01,1,5)",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.12.

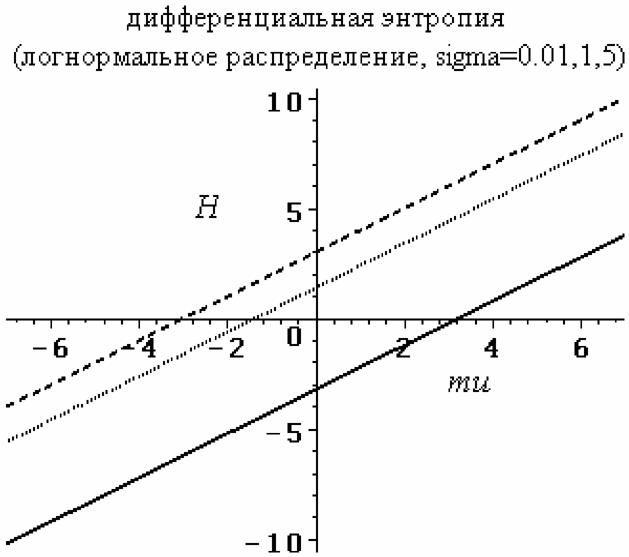

Рисунок 1.12 – Графики зависимости дифференциальной энтропии от параметров σ и μ

4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое случайное событие?
2. Что такое исход? Что понимают под пространством исходов?
3. Охарактеризуйте операции над событиями: объединение, пересечение, дополнение.
4. Что понимают под вероятностью случайного исхода?

5. Что понимают под вероятностью случайного события?
6. Что такое случайная величина?
7. Какие случайные величины называют непрерывными?
8. Охарактеризуйте дифференциальный закон распределения и его свойства.
9. Охарактеризуйте интегральную функцию распределения непрерывной случайной величины.
10. Перечислите и охарактеризуйте числовые характеристики непрерывных случайных величин: моменты, математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, коэффициент асимметрии, коэффициент эксцесса.
11. Что называют дифференциальной энтропией?
12. Какова связь между энтропией дискретной случайной величины и дифференциальной энтропией?
13. Перечислите свойства дифференциальной энтропии.