

## Домашня контрольна робота (ДКР)

з курсу «Загальна фізика» (розділ «Механіка матеріальної точки»).

За заданими рівняннями руху  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  (та  $z=z(t)$  для 2 рівня складності) матеріальної точки масою  $m=1$  кг встановити:

1. Рівняння та вид траєкторії точки; побудувати графік.
2. Вектори переміщення, середньої швидкості та їх модулі в інтервалі часу  $\Delta t = t_2 - t_1$ .
3. Для моментів часу  $t=t_1$  і  $t=t_2$  знайти:
  - 3.1. координати точки;
  - 3.2. вектори її швидкості;
  - 3.3. повне, нормальне та тангенціальне прискорення;
  - 3.4. радіуси кривизни траєкторії.
4. Шлях, який проходить точка за інтервал часу  $\Delta t$ .
5. Силу, яка діє на точку та її потужність для моменту часу  $t=t_1$ .
6. Роботу знайденої сили за час  $\Delta t$ ; середню потужність за цей час.
7. Зміну кінетичної енергії точки, та зробити висновок, щодо виконання закону збереження енергії.
8. Зміну імпульсу точки за інтервал  $\Delta t$  та показати, що він дорівнює імпульсу сили за цей час.
9. Зміну моменту імпульсу точки відносно початку системи координат за інтервал часу  $\Delta t$  та показати, що він обумовлений дією моменту сили.

Дані, для виконання роботи взяти в табл. 1 у відповідності до свого варіанту.

### Вказівки до виконання роботи:

- Робота виконується українською або російською мовами на папері формату А4 з одного боку. Аркуші не зшиваються, а вкладаються у файл або папку.
- На титульному аркуші вказується назва університету, факультету, номеру групи, прізвище та ім'я студента, назва роботи, номер варіанту, рік.
- Нумерація сторінок – обов'язкова. На титулі номер не ставиться.
- Робота виконується в пакеті Word Windows, MathCAD, Maple та ін. Як виняток, дозволяється написання від руки.
- Графіки друкуються на принтері, або будуються на міліметровому папері формату А4.
- Всі аналітичні перетворення і обчислення наводяться повністю. У разі використання комп'ютерних математичних програм наводиться лістинг програм та таблиці значень для побудови графіків, якщо вони будуються на міліметровому папері.
- Виконана та належним чином оформлена робота здається в термін, вказаний викладачем.

Табл. 1.

Номер варіанту	Рівняння руху			$t_1, c$	$t_2, c$
	$x=x(t), m$	$y=y(t), m$	$z=z(t), m$		
1	$-2t^2 + 3$	$-5t$	$3t$	0,5	1
2	$4\cos^2\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 2$	$4\sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$2t$	1	1,5
3	$-\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) + 3$	$\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) - 1$	$3t/2$	1	2
4	$4t + 4$	$-\frac{4}{t+1}$	$4t + 4$	2	3
5	$2\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$-3\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 4$	$t$	1	1,5
6	$3t^2 + 2$	$-4t$	$3t$	0,5	1
7	$3t^2 - t + 1$	$5t^2 - \frac{5t}{3} - 2$	$5t/2$	1	1,5
8	$7\sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right) + 3$	$2 - 7\cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)$	$5t$	1	2
9	$-\frac{3}{t+2}$	$3t + 6$	$4t + 8$	2	3
10	$-4\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$-2\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) - 3$	$t$	1	2
11	$-4t^2 + 1$	$-3t$	$2t$	0	0,5
12	$5\sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$-5\cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) - 3$	$3t$	1	2
13	$5\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)$	$-5\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)$	$3t/2$	1	1,5
14	$-2t - 2$	$-\frac{2}{t+1}$	$2t + 2$	2	3
15	$4\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$-3\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$3t$	1	2
16	$3t$	$4t^2 + 1$	$3t/2$	0,5	1
17	$7\sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) - 5$	$-7\cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$5t$	1	2
18	$1 + 3\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)$	$3\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) + 3$	$7t/2$	1	2
19	$-5t^2 - 4$	$3t$	$6t$	0	1

20	$2 - 3t - 6t^2$	$3 - \frac{3t}{2} - 3t^2$	$2t$	0	1
21	$6\text{Sin}\left(\frac{\pi t^2}{6}\right) - 2$	$6\text{Cos}\left(\frac{\pi t^2}{6}\right) + 3$	$4t$	0	1
22	$7t^2 - 3$	$5t$	$t$	0,25	1
23	$3 - 3t^2 + 1$	$4 - 5t^2 + 5t/3$	$3t/2$	1	3
24	$-4\text{Cos}\left(\frac{\pi t}{3}\right) - 1$	$-4\text{Sin}\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$2t$	1	2
25	$-6t$	$-2t^2 - 4$	$5t$	1	2
26	$8\text{Cos}^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 2$	$-8\text{Sin}^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) - 7$	$6t$	1	3
27	$-3 - 9\text{Sin}\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)$	$-9\text{Cos}\left(\frac{\pi t^2}{6}\right) + 5$	$7t/2$	1	2
28	$-4t^2 + 1$	$-3t$	$4t$	1	2
29	$5t^2 + \frac{5t}{3} - 3$	$3t^2 + t + 3$	$5t$	1	3
30	$2\text{Cos}\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) - 2$	$-2\text{Sin}\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) + 3$	$3t/2$	1	2

**Приклад виконання завдання (1 рівень).**

**Дано:**  $m = 1\text{ кг}$ ;  $t_1 = 0,5\text{ с}$ ;  $t_2 = 1\text{ с}$ ;

$$\begin{cases} x = 4t; \\ y = 16t^2 - 1; \end{cases} \quad (1)$$

**Розв'язання:**

1. Рівняння руху (1) можна розглядати як параметричні рівняння траєкторії точки. Щоб отримати рівняння траєкторії у координатній формі, виключимо час  $t$  із рівнянь (1).

Отримаємо

$$y = x^2 - 1, \quad (2)$$

тобто траєкторія точки є парабола, яка зображена на мал. 1.

2. Запишемо залежність радіус-вектора точки в залежності від часу у координатному вигляді, використовуючи дані варіанту (1):

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = 4t\vec{i} + (16t^2 - 1)\vec{j}. \quad (3)$$

Тоді:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1) = 2\vec{i} + 3\vec{j}; \quad \vec{r}_2 = \vec{r}(t_2) = 4\vec{i} + 15\vec{j}.$$

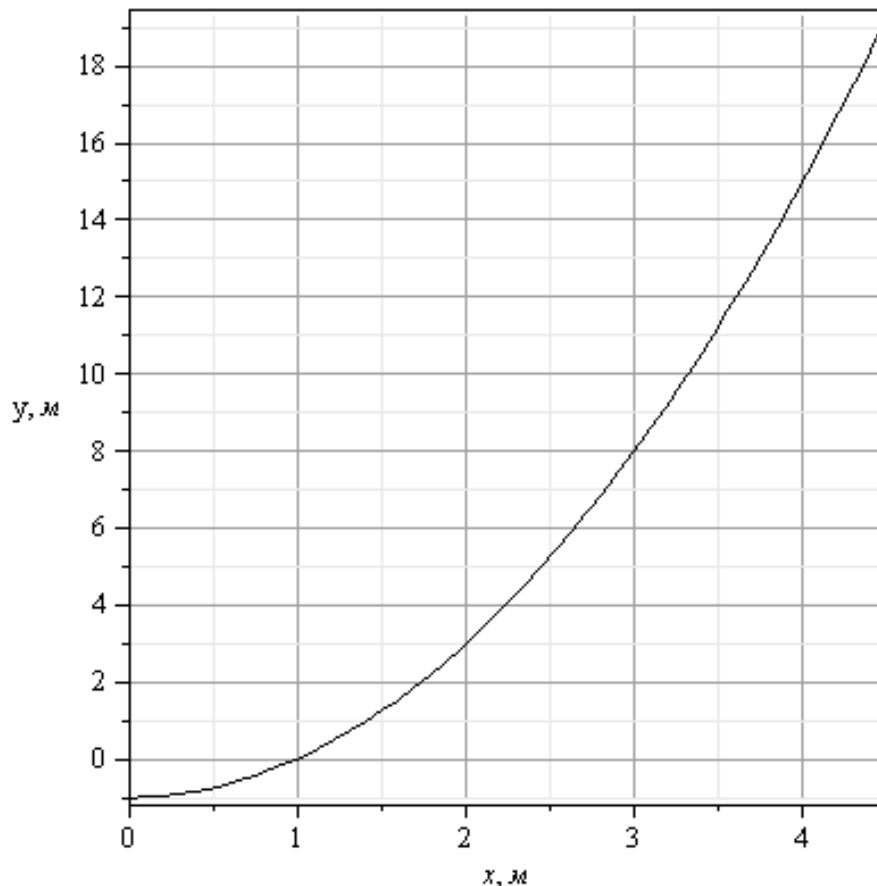
$$\text{Вектор переміщення точки } \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 2\vec{i} + 12\vec{j}. \quad (4)$$

Модуль переміщення  $\Delta r = \sqrt{x^2 + y^2} = 12,17\text{ м}$ .

Вектор середньої швидкості:  $\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = 4\vec{i} + 24\vec{j}$ .

Модуль вектора середньої швидкості:  $|\langle \vec{v} \rangle| = \sqrt{592} = 24,33\text{ м/с}$ .

Покажемо знайдені вектори на мал. 1.



3. 3.1. За даними варіанту (1) знаходимо координати точки:

$$x_1=2 \text{ м}, y_1=3 \text{ м}; x_2=4 \text{ м}, y_2=15 \text{ м}.$$

3.2. Вектор швидкості точки

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}. \quad (5)$$

Вектор прискорення

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}. \quad (6)$$

Знайдемо їх, взяв першу і другу похідну по часу рівнянь (1):

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = 4 \text{ м/с} \\ v_y = \dot{y} = 32t \text{ м/с} \end{cases} \quad \begin{cases} a_x = \ddot{x} = 0; \\ a_y = \ddot{y} = 32 \text{ м/с}^2 \end{cases} \quad (7)$$

Обчислимо:

$$\begin{cases} v_{x1} = 4 \text{ м/с} \\ v_{y1} = 32 \cdot 0,5 = 16 \text{ м/с} \end{cases} \quad \begin{cases} v_{x2} = 4 \text{ м/с} \\ v_{y2} = 32 \cdot 1 = 32 \text{ м/с} \end{cases}$$

За знайденими проекціями визначаються модуль вектора швидкості:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad (8)$$
$$v_1 = \sqrt{16 + 256} \approx 16,49 \text{ м/с}; \quad v_2 = \sqrt{16 + 1024} \approx 32,25 \text{ м/с}.$$

3.3. Модуль прискорення точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 32 \text{ м/с}^2. \quad (9)$$

Модуль тангенціального (дотичного) прискорення точки

$$a_\tau = \left| \frac{dv}{dt} \right| = \left| \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} \right| = \left| \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} \right|, \quad (10)$$

Додатне значення похідної  $dv/dt$  означає, що рух точки прискорений, і напрямки векторів  $\vec{v}$  і  $\vec{a}_\tau$  співпадають; від'ємне – що рух сповільнений.

$$a_{\tau 1} = \left| \frac{4 \cdot 0 + 16 \cdot 32}{16,49} \right| \approx 31,05 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \quad a_{\tau 2} = \left| \frac{4 \cdot 0 + 32 \cdot 32}{32,25} \right| \approx 31,75 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Модуль нормального (доцентрового) прискорення точки

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \left| \frac{[\vec{v}; \vec{a}]}{v} \right|. \quad (11)$$

При плоскому русі формула (11) приймає вид

$$a_n = \left| \frac{v_x a_y - v_y a_x}{v} \right|, \quad (12)$$

$$a_{n1} = \left| \frac{4 \cdot 32 - 16 \cdot 0}{16,49} \right| \approx 7,75 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \quad a_{n2} = \left| \frac{4 \cdot 32 - 32 \cdot 0}{32,25} \right| \approx 3,98 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Модуль нормального прискорення можна визначити і через тангенціальне прискорення:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}. \quad (13)$$

$$a_{n1} = \sqrt{32^2 - 31,05^2} \approx 7,75 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \quad a_{n2} = \sqrt{32^2 - 31,75^2} \approx 3,98 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Значення, які були знайдені різними способами, співпадають.

3.4. Після того, як за формулами (12) і (13) знайдено нормальне прискорення, радіус кривизни траєкторії визначається з формули (11):

$$R = \frac{v^2}{a_n}, \quad (14)$$

$$R_1 = \frac{16,49^2}{7,75} \approx 35,09 \text{ м}; \quad R_2 = \frac{32,25^2}{3,98} \approx 261,32 \text{ м}.$$

Результати обчислень за формулами (1), (7) - (10) та (12) - (14) для моменту часу  $t_1=0,5\text{с}$  наведені у табл. 1 а для моменту часу  $t_2=1,0\text{с}$  - у табл. 2.

табл. 1.

Координати, м		Швидкість, м/с			Прискорення, м/с <sup>2</sup>					Радіус кривизни, м
$x_1$	$y_1$	$v_{x1}$	$v_{y1}$	$v_1$	$a_{x1}$	$a_{y1}$	$a_1$	$a_{\tau 1}$	$a_{n1}$	$R_1$
2,0	3,0	4,0	16,0	16,49	0	32,0	32,0	31,05	7,75	35,09

табл. 2.

Координати, м		Швидкість, м/с			Прискорення, м/с <sup>2</sup>					Радіус кривизни, м
$x_2$	$y_2$	$v_{x2}$	$v_{y2}$	$v_2$	$a_{x2}$	$a_{y2}$	$a_2$	$a_{\tau 2}$	$a_{n2}$	$R_2$
4,0	15,0	4,0	32,0	32,25	0	32,0	32,0	31,75	3,98	261,32

4. Знайдемо шлях, яких пройшла точка за проміжок часу від  $t_1$  до  $t_2$ :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt \quad (15)$$

Тоді:

$$s = \int_{0,5}^1 \sqrt{4^2 + (32t)^2} dt$$

$$s = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{2} \left[ 32t \sqrt{4^2 + (32t)^2} + 16 \ln \left( 32t + \sqrt{4^2 + (32t)^2} \right) \right] = 12,17 \text{ м} \quad (16)$$

Відмітимо, що значення (16) пройденого шляху співпадає зі значенням, яке можна знайти через середню швидкість:

$$s = \langle v \rangle \Delta t = 24,33 \cdot 0,5 \approx 12,17 \text{ м.}$$

**5.** За другим законом Ньютона сила, яка діє на частинку масою  $m$ :

$$\vec{F} = m\vec{a} = 32\vec{j} \text{ [Н]} \quad (17)$$

Потужність сили

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 32\vec{j}(4\vec{i} + 32t\vec{j}) = 1024t \text{ Вт}$$

Для моменту часу  $t=t_1$

$$P_1 = 512 \text{ Вт.}$$

**6.** Робота

$$A = \int \vec{F} d\vec{r} = \int (F_x dx + F_y dy) = \int_3^{15} 32 dy = 384 \text{ Дж.} \quad (18)$$

Середня потужність

$$\langle P \rangle = \frac{A}{\Delta t} = \frac{384}{0,5} = 768 \text{ Вт.}$$

**7.** Кінетична енергія матеріальної точки

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2).$$

Обчислимо:

$$K_1 = 136 \text{ Дж}, \quad K_2 = 520 \text{ Дж.}$$

Зміна кінетичної енергії точки

$$\Delta K = K_2 - K_1 = 384 \text{ Дж,}$$

що дорівнює роботі зовнішньої сили (18), як і повинно бути у відповідності до закону збереження енергії.

**8.** Зміна імпульсу

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = 32m(t_2 - t_1)\vec{j} = 16\vec{j} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} \quad (19)$$

Покажемо, що зміна імпульсу обумовлена силою, яка діяла на точку на протязі часу  $\Delta t$ :

$$\Delta \vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} 32\vec{j} dt = 16\vec{j},$$

що дорівнює (19).

**9.** Момент імпульсу точки відносно початку координат

$$\vec{L} = [\vec{r}; \vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 4m & 32mt & 0 \end{vmatrix} = 4m(16t^2 + 1)\vec{k}, \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}.$$



Для моментів часу  $t_1$  і  $t_2$ :  $L_1 = 20 \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}}$ ,  $L_2 = 68 \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}}$ .

$$\text{Тоді: } \Delta L = 48 \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}}. \quad (20)$$

Момент сили, яка діє на точку

$$\vec{M} = [\vec{r}; \vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 0 & 32 & 0 \end{vmatrix} = 128t\vec{k}.$$

Покажемо, що приріст моменту імпульсу  $\Delta \vec{L}$  обумовлений дією моменту сили:

$$\Delta \vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \int_{0,5}^1 128t\vec{k} dt = 64(t_2^2 - t_1^2)\vec{k} = 48\vec{k},$$

що співпадає з (20).

Вказівка:

У разі виконання завдання 2 рівня складності руху точки у тривимірному просторі загальний порядок виконання такий самий, як і в розглянутому прикладі.