ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1
РАСЧЕТ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК И ЭНТРОПИИ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1.1 Изучение способов описания *дискретных случайных величин*.

2.2 Приобретение практических навыков расчета *числовых характеристик* и *энтропии* дискретной случайной величины по ее *закону распределения*.

2. ХОД РАБОТЫ

1. Получить у преподавателя вариант задания.
2. Написать функцию, определяющую *распределение вероятностей дискретной случайной величины* в соответствии с заданным законом распределения.
3. Проверить *условие нормировки*.
4. Написать функцию для определения *начального момента s-го порядка*. Выписать соответствующую формулу.
5. Найти *начальный момент нулевого порядка*. Объяснить результат.
6. Написать функцию для определения *математического ожидания*. Выписать соответствующую формулу.
7. Построить графики зависимости математического ожидания от параметров распределения.
8. Написать функцию для определения *центрального момента s-го порядка*. Выписать соответствующую формулу.
9. Найти *центральный момент нулевого порядка*. Объяснить результат.
10. Найти *центральный момент первого порядка*. Объяснить результат.
11. Написать функцию для определения *дисперсии*. Выписать соответствующую формулу.
12. Построить графики зависимости дисперсии от параметров распределения.
13. Написать функцию для определения *среднего квадратического отклонения*. Выписать соответствующую формулу.
14. Построить графики зависимости среднего квадратического отклонения от параметров распределения.
15. Написать функцию для определения *коэффициента асимметрии*. Выписать соответствующую формулу.
16. Построить графики зависимости коэффициента асимметрии от параметров распределения.
17. Написать функцию для определения *коэффициента эксцесса*. Выписать соответствующую формулу.
18. Построить графики зависимости коэффициента эксцесса от параметров распределения.

19. Построить графики распределения вероятностей для разных параметров распределения.
20. Написать функцию, определяющую *интегральный закон распределения* дискретной случайной величины, подчиненной заданному закону распределения.
21. Построить графики интегрального закона распределения для разных параметров распределения
22. Написать функцию для вычисления *энтропии*.
23. Построить графики зависимости энтропии от параметров распределения.
24. Сделать развернутые выводы по результатам исследований.

3. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

3.1 Событие и пространство исходов эксперимента

В основе теории вероятностей лежит понятие *случайного события*. Случайное событие, как правило, связывается с *результатом проведения некоторого эксперимента (опыта)*.

Будем предполагать, что при определенной совокупности условий результатами эксперимента являются некоторые *элементарные события (исходы)* z_1, z_2, …, z_n, множество которых обозначим через $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. Множество Z называется *пространством исходов*. Очевидно, что результатом проведения эксперимента является какой-либо *один* исход $z_i \in Z$, и *не может быть осуществим* эксперимент, результатом которого является два и более исходов.

Обычно интерес представляют не сами исходы $z_i \in Z$, а некоторые их множества $S \subseteq Z$, которые называются *событиями*. Осуществление события $S \subseteq Z$ означает, что результатом проведения эксперимента является *один* из исходов $z_i \in S$.

Для любых двух событий $S_1 \subseteq Z$ и $S_2 \subseteq Z$ имеют место следующие определения.

Объединением (суммой) событий S_1, S_2, …, S_m называется событие $\bigcup_{i=1}^{m} S_i$, состоящее в осуществлении *хотя бы одного* из событий S_1, S_2, …, S_m.

Совмещением (произведением) событий S_1, S_2, …, S_m называется событие $\bigcap_{i=1}^{m} S_i$, состоящее в осуществлении *каждого* из событий S_1, S_2, …, S_m. События S_1, S_2, …, S_m называются *несовместными*, если $\bigcap_{i=1}^{m} S_i$ является пустым множеством.

Дополнением события S называется событие $\overline{S}$, состоящее в *неосуществлении* события S.

Осуществление *хотя бы одного* из событий пространства исходов Z является *достоверным событием*. Так что множество Z играет роль универсального множества.

3.2 Вероятность случайного исхода

В теории вероятностей каждый исход $z_i \in Z$ рассматривается как *случайный*. Это означает, что *заранее (априори) неизвестно*, какой из исходов $z_i \in Z$ будет иметь место в результате проведения эксперимента. Однако совершенно очевидно, что результатом каждого испытания обязательно должен быть *один и только один* исход $z_i \in Z$.

Интуитивно под *вероятностью исхода* понимают численную меру, характеризующую объективную возможность этого исхода. Это означает, что каждому исходу $z_i \in Z$ ставится в соответствие некоторый *вес* P_i, который представляет собой *неотрицательное вещественное число*. На веса P_i наложены следующие ограничения:

1) вес P_i тем больше, чем больше объективная возможность того, что результатом проведения эксперимента будет исход $z_i \in Z$;

2) сумма весов P_i для всех возможных исходов эксперимента должна быть равна единице, т. е. $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$.

Если $P_i = 0$, то исход $z_i \in Z$ *невозможен*, т. е. представляет собой *невозможное событие*. Если $P_i = 1$, то исход $z_i \in Z$ представляет собой *достоверное событие*.

Совокупность весов P_i, приписываемых исходам $z_i \in Z$, образует множество $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, причем $0 \le P_i \le 1 \; \forall \, i = 1, 2, \dots, n$, $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$. Таким образом, можно говорить об отображении множества Z на множество P: $P_i = P(z_i)$. Отображение $P(z_i)$ называется *распределением вероятностей* на пространстве исходов Z, а каждый вес $P_i = P(z_i)$, приписываемый исходу $z_i \in Z$, называется *вероятностью* этого исхода.

3.3 Вероятность случайного события

Очевидно, случайное событие $S \subseteq Z$ представляет собой множество, состоящее из части элементов пространства исходов Z. Так как исходы $z_i \in Z$ несовместны, то под вероятностью события $S \subseteq Z$ понимают сумму вероятностей всех исходов $z_i \in S$: $P(S) = P_S = \sum_{z_i \in S} P(z_i)$.

3.4 Дискретные случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины

Случайной величиной называется величина, которая в результате проведения эксперимента может принять то или иное значение, причем *неизвестно заранее*, какое именно. Случайные величины, принимающие значения из *дискретного множества*, называются *дискретными случайными величинами*.

Рассмотрим дискретную случайную величину ξ, принимающую значения из дискретного множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. В результате проведения эксперимента случайная величина ξ примет одно из значений $x_i \in X$. Таким образом, множество X образует пространство исходов, которому можно поставить в соответствие множество вероятностей $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$. Число $P_i = P(\xi = x_i) = P(x_i)$ есть вероятность того, что в результате проведения эксперимента случайная величина ξ примет значение $x_i \in X$.

Законом распределения дискретной случайной величины называется зависимость $P(\xi = x_i)$, устанавливающая связь между возможными значениями $x_i \in X$ случайной величины ξ и соответствующими им вероятностями $P_i \in P$. Закон распределения является *исчерпывающей характеристикой* дискретной случайной величины, так как полностью характеризует последнюю с вероятностной точки зрения.

Чтобы придать закону распределения наглядный вид, часто прибегают к его *графическому изображению*: по оси абсцисс откладывают возможные значения случайной величины (x_i), а по оси ординат – вероятности этих значений (P_i). С точки зрения физической наглядности удобной является *механическая интерпретация* закона распределения: закон распределения интерпретируется как *система материальных точек*, расположенных вдоль оси абсцисс, имеющих массы P_i и координаты x_i соответственно, причем $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$.

Для количественной характеристики распределения вероятностей случайной величины ξ удобно пользоваться вероятностью $P(\xi < x)$ (вероятность того, что случайная величина ξ принимает значения, *меньшие* x), где x − некоторая текущая переменная. Функция $F(x) = P(\xi < x)$ называется *интегральным законом (функцией) распределения* случайной величины ξ.

Интегральная функция распределения $F(x)$ обладает следующими свойствами: $F(x)$ есть неубывающая функция своего аргумента, $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$.

3.5 Числовые характеристики дискретной случайной величины

Законы распределения случайной величины являются *полными, исчерпывающими* вероятностными характеристиками последней. Однако во многих вопросах практики нет необходимости характеризовать случайную величину полностью. Зачастую достаточно бывает указать только отдельные числовые параметры, характеризующие *наиболее существенные стороны распре-*

деления случайной величины. Такие параметры, выражающие в *сжатой форме* наиболее существенные особенности распределения, называются *числовыми характеристиками* случайной величины.

Вид и разнообразие числовых характеристик случайных величин обусловлены *аналогией между распределением случайной величины и системой материальных точек*. В механике для описания *распределения масс* широко используется понятие *момента* (статические моменты, моменты инерции и т. д.). Совершенно теми же приемами пользуются в теории вероятностей для описания основных свойств *распределения случайной величины*. Чаще всего на практике применяются моменты двух видов: *начальные* и *центральные*.

Начальным моментом s-го порядка дискретной случайной величины ξ называется сумма вида

$$\alpha_s(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i^s P_i . \tag{1.1}$$

Первый начальный момент называется *математическим ожиданием* случайной величины:

$$\alpha_1(\xi) = M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i . \tag{1.2}$$

Очевидна механическая *интерпретация начального момента первого порядка*: математическое ожидание случайной величины ξ, принимающей значения из множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ с соответствующими вероятностями $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ есть *абсцисса центра масс* системы материальных точек, расположенных вдоль оси абсцисс, имеющих массы P_i и координаты x_i соответственно.

Используя понятие математического ожидания, можно записать:

$$\alpha_s(\xi) = M\left(\xi^s\right). \tag{1.3}$$

Центрированной случайной величиной $\hat{\xi}$, соответствующей случайной величине ξ, называется отклонение случайной величины ξ от ее математического ожидания:

$$\hat{\xi} = \xi - M(\xi). \tag{1.4}$$

Очевидно, что *математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю*: $M\left(\hat{\xi}\right) = 0$.

Начальные моменты центрированной случайной величины носят название *центральных моментов*. Они аналогичны *моментам относительно центра тяжести* в механике.

Таким образом, *центральным моментом s-го порядка* случайной величины ξ называется *начальный момент s-го порядка* соответствующей *центрированной* случайной величины $\hat{\xi} = \xi - M(\xi)$:

$$\mu_s(\xi) = \alpha_s(\hat{\xi}) = M(\hat{\xi}^s) = M\{[\xi - M(\xi)]^s\} = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(\xi)]^s P_i . \qquad (1.5)$$

Очевидно, для *любой* случайной величины *центральный момент первого порядка равен нулю*: $\mu_1(\xi) = M(\hat{\xi}) = M[\xi - M(\xi)] = 0$.

Второй центральный момент называется *дисперсией* случайной величины:

$$\mu_2(\xi) = D(\xi) = \alpha_2(\hat{\xi}) = M(\hat{\xi}^2) = M\{[\xi - M(\xi)]^2\} = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(\xi)]^2 P_i . \qquad (1.6)$$

Дисперсия случайной величины есть характеристика *рассеяния*, разбросанности значений случайной величины около ее математического ожидания. Если обратиться к механической интерпретации распределения, то дисперсия представляет собой *момент инерции* соответствующей системы материальных точек относительно центра масс (математического ожидания).

Для наглядной характеристики рассеяния удобно пользоваться величиной, *размерность которой совпадает с размерностью случайной величины*. Для этого из дисперсии извлекают квадратный корень. Полученная величина называется *средним квадратическим отклонением* случайной величины:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} . \qquad (1.7)$$

Математическое ожидание и дисперсия – наиболее часто применяемые характеристики случайной величины. Они характеризуют наиболее важные черты распределения: его *положение* и *степень разбросанности*. Для более подробного описания распределения применяются моменты высших порядков.

Для характеристики *асимметрии* (скошенности) распределения относительно математического ожидания используют *коэффициент асимметрии*:

$$Sk = \frac{\mu_3(\xi)}{[\sigma(\xi)]^3} . \qquad (1.8)$$

Для характеристики *островершинности* распределения по сравнению с *нормальным распределением* используют *коэффициент эксцесса*:

$$Ex = \frac{\mu_4(\xi)}{[\sigma(\xi)]^4} - 3. \qquad (1.9)$$

3.6 Энтропия дискретной случайной величины

Энтропия *дискретной случайной величины* ξ, принимающей значения из множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ с соответствующими вероятностями $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, есть сумма произведений вероятностей различных значений случайной величины на логарифмы этих вероятностей, взятая с обратным знаком:

$$H(\xi) = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log P_i . \qquad (1.10)$$

Логарифм в формуле (1.10) может быть взят при любом основании, большем единицы. Выбор основания логарифма равносилен выбору определенной *единицы измерения* энтропии. Если за основание выбрано число 10, то говорят о «десятичных единицах» (*дитах*), если 2 – о «двоичных единицах» (*битах*).

Энтропия (1.10) является *мерой априорной неопределенности дискретной случайной величины*. К основным свойствам энтропии дискретной случайной величины можно отнести следующие:

1. Энтропия есть величина вещественная, ограниченная и неотрицательная.
2. Энтропия минимальна и равна нулю, если значение случайной величины ξ известно заранее.
3. Энтропия максимальна, если все значения случайной величины ξ равновероятны.
4. Энтропия не зависит от математического ожидания случайной величины ξ.

3.7 Некоторые законы распределения дискретной случайной величины

Во многих задачах практики приходится иметь дело со случайными величинами, распределенными по некоторым своеобразным законам. Ниже описаны некоторые из них.

1. *Геометрический закон*

$$P(\xi = k) = \begin{cases} 0, \; k \in (-\infty, 0], \\ p(1-p)^{k-1}, \; k \in (0, \infty), \end{cases} \qquad (1.11)$$

где k − целое число, p − параметр, принадлежащий интервалу $(0,1)$.

2. *Биномиальный закон (закон Бернулли)*

$$P(\xi = k) = \begin{cases} 0,\ k \in (-\infty, 0), \\ C_m^k p^k (1-p)^{m-k},\ k \in [0, m], \\ 0,\ k \in (m, \infty), \end{cases} \tag{1.12}$$

где k − целое число, m − натуральное число, p − параметр, принадлежащий интервалу $(0,1)$, C_m^k − биномиальный коэффициент.

3. *Гипергеометрический закон*

$$P(\xi = k) = \begin{cases} 0,\ k \in (-\infty, 0), \\ \dfrac{C_m^k C_{N-m}^{r-k}}{C_N^r},\ k \in [0, m], \\ 0,\ k \in (m, \infty), \end{cases} \tag{1.13}$$

где k − целое число, m, r, N − натуральные числа, C_i^j − биномиальный коэффициент, $m \le r \le N-m$.

4. *Закон Пуассона*

$$P(\xi = k) = \begin{cases} 0,\ k \in (-\infty, 0), \\ \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ k \in [0, \infty), \end{cases} \tag{1.14}$$

где k − целое число, $\lambda > 0$.

3.7 Пример расчета числовых характеристик и энтропии дискретной случайной величины, подчиненной биномиальному закону распределения

Распределение дискретной случайной величины, подчиненной биномиальному закону, описывается формулой (1.12).

3.7.1 Опишем *ограничения*, накладываемые на параметры распределения (k − *целое* число, m − *натуральное* число, p − параметр, принадлежащий *интервалу* $(0,1)$, $P(\xi = k) \ne 0$ при $k \in [0, m]$)

```
> assume(m::integer,m>0); # параметр m - натуральное число
> assume(k::integer,k>=0,k<=m); # значение случайной величины
> assume(p>0,p<1); # параметр p лежит в интервале (0,1)
```

3.7.2 Проверка ограничений

```
> about(k,m,p);
Originally k, renamed k~:
  Involved in the following expressions with properties
    -m+k assumed RealRange(-infinity,0)
  is assumed to be: AndProp(integer,RealRange(0,infinity))
  also used in the following assumed objects
  [-m+k] assumed RealRange(-infinity,0)

Originally m, renamed m~:
  Involved in the following expressions with properties
    -m+k assumed RealRange(-infinity,0)
  is assumed to be: real
  also used in the following assumed objects
  [-m+k] assumed RealRange(-infinity,0)

Originally p, renamed p~:
  is assumed to be: RealRange(Open(0),Open(1))
```

3.7.3 Напишем функцию, определяющую *распределение вероятностей дискретной случайной величины* в соответствии с *биномиальным законом* распределения

```
> P:=(k,m,p)->binomial(m,k)*(p^k)*((1-p)^(m-k));
  # биномиальный закон распределения
```

$$P := (k, m, p) \to \mathrm{binomial}(m, k)\, p^k\, (1-p)^{(m-k)}$$

3.7.4 Выполним проверку *условия нормировки*

Очевидно, с учетом (1.12) условие нормировки можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{m} P(k, m, p) = 1. \qquad (1.15)$$

```
> sum(P(k,m,p),k=0..m); # проверка условия нормировки
```

$$\left(1 + \frac{p\sim}{1-p\sim}\right)^{m\sim} (1-p\sim)^{m\sim}$$

```
> simplify(%);
```

$$1$$

```
> # условие нормировки выполняется
```

3.7.5 Напишем функцию для определения *начального момента s-го порядка*

Очевидно, с учетом (1.12) выражение для начального момента s-го порядка (1.1) можно записать в виде

$$\alpha_s(m,\,p)=\sum_{k=0}^{m} k^s P(k,\,m,\,p). \qquad (1.16)$$

```
> alpha:=(m,p,s)->sum((k^s)*P(k,m,p),k=0..m);
  # начальный момент s-го порядка
```

$$\alpha := (m, p, s) \to \sum_{k=0}^{m} k^s \, \mathrm{P}(k, m, p)$$

```
> simplify(alpha(m,p,s));
```

$$\sum_{k\sim=0}^{m\sim} k\sim^s \, \mathrm{binomial}(m\sim, k\sim)\, p\sim^{k\sim} (1-p\sim)^{(m\sim-k\sim)}$$

Итак, для начального момента s-го порядка можно выписать формулу

$$\alpha_s(m,\,p)=\sum_{k=0}^{m} k^s C_m^k p^k (1-p)^{m-k}\,. \qquad (1.17)$$

3.7.6 Найдем *начальный момент нулевого порядка*:

```
> alpha(m,p,0); # начальный момент нулевого порядка
```

$$\left(1+\frac{p\sim}{1-p\sim}\right)^{m\sim}(1-p\sim)^{m\sim}$$

```
> # соответствует условию нормировки
> simplify(alpha(m,p,0));
```

$$1$$

Такой результат и следовало ожидать, так как в соответствии с (1.16)

$$\alpha_0(m,\,p)=\sum_{k=0}^{m} P(k,\,m,\,p), \qquad (1.18)$$

что полностью эквивалентно условию нормировки (1.15).

3.7.7 Напишем функцию для определения *математического ожидания*

```
> M:=(m,p)->alpha(m,p,1);
  # математическое ожидание - начальный момент 1-го порядка
```

$$M := (m, p) \to \alpha(m, p, 1)$$

```
> simplify(M(m,p));
```

$$m\sim p\sim$$

Итак, оказалось, что для математического ожидания справедливо выражение

$$M(m,\,p)=\alpha_1(m,\,p)=mp\,. \qquad (1.19)$$

Формула (1.19) показывает, что *математическое ожидание дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону, находится в прямой зависимости от параметров m и p распределения*.

3.7.8 Построим графики зависимости математического ожидания от параметров m и p распределения

```
> plot([M(5,p),M(10,p),M(15,p)],p=0..1,axes=BOXED,
       axesfont=[COURIER,BOLD,12],color=black,
       font=[TIMES,ITALIC,14],labels=["p","M"],
       linestyle=[SOLID,DOT,DASHDOT],thickness=2,
       title="график зависимости мат. ожидания от параметра
              p\n(биномиальный закон распределения,m=5,10,15)",
       titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.1.

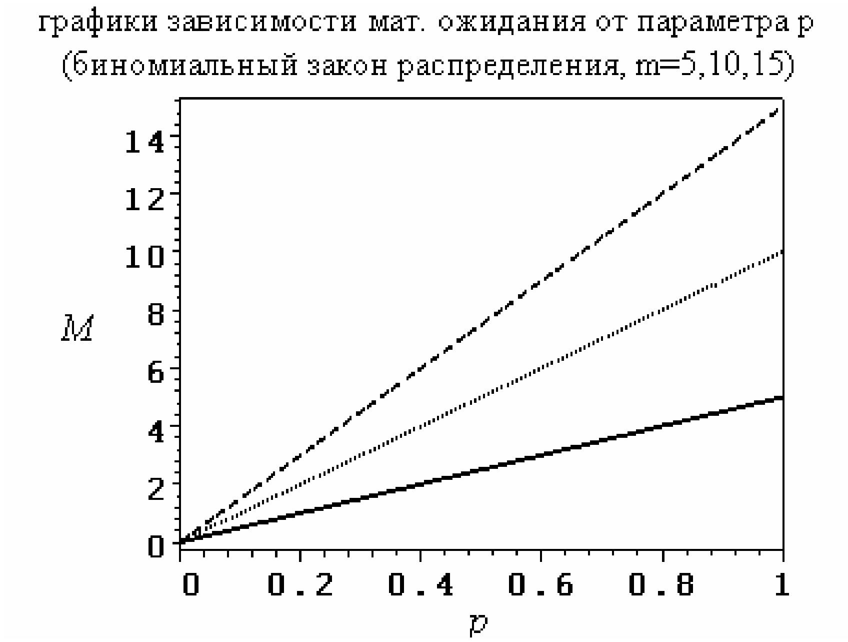

Рисунок 1.1 – Графики зависимости мат. ожидания от параметра p

3.7.9 Напишем функцию для определения *центрального момента s-го порядка*

Очевидно, с учетом (1.12) выражение для центрального момента s-го порядка (1.5) можно записать в виде

$$\mu_s(m, p) = \sum_{k=0}^{m} [k - M(m, p)]^s P(k, m, p). \tag{1.20}$$

```
> mu:=(m,p,s)->sum(((k-M(m,p))^s)*P(k,m,p),k=0..m);
  # центральный момент s-го порядка
```

$$\mu := (m, p, s) \to \sum_{k=0}^{m} (k - \mathrm{M}(m, p))^s \,\mathrm{P}(k, m, p)$$

```
> simplify(mu(m,p,s));
```

$$\sum_{k\sim=0}^{m\sim} (k\sim - p\sim m\sim)^s \,\mathrm{binomial}(m\sim, k\sim)\, p\sim^{k\sim} (1 - p\sim)^{(m\sim - k\sim)}$$

Итак, для центрального момента s-го порядка можно выписать формулу

$$\mu_s(m, p) = \sum_{k=0}^{m} (k - mp)^s C_m^k p^k (1 - p)^{m-k} \,. \tag{1.21}$$

3.7.10 Найдем *центральный момент нулевого порядка*

```
> mu(m,p,0);
```

$$\left(1 + \frac{p\sim}{1 - p\sim}\right)^{m\sim} (1 - p\sim)^{m\sim}$$

```
> simplify(%);
```

$$1$$

Такой результат и следовало ожидать, так как в соответствии с (1.20)

$$\mu_0(m, p) = \sum_{k=0}^{m} P(k, m, p), \tag{1.22}$$

что полностью эквивалентно условию нормировки (1.15).

3.7.11 Найдем *центральный момент первого порядка*

```
> mu(m,p,1); # центральный момент первого порядка
```

$$0$$

```
> # равен нулю
```

Действительно, в силу (1.20) для центрального момента первого порядка можно записать:

$$\mu_1(m, p) = \sum_{k=0}^{m} [k - M(m, p)] P(k, m, p) = \sum_{k=0}^{m} kP(k, m, p) - M(m, p) \sum_{k=0}^{m} P(k, m, p). \tag{1.23}$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{m} kP(k, m, p) = M(m, p) \tag{1.24}$$

и

$$\sum_{k=0}^{m} P(k, m, p) = 1, \qquad (1.25)$$

то, очевидно, $\mu_1(m, p) = 0$.

3.7.12 Напишем функцию для определения *дисперсии*

```
> Dsp:=(m,p)->mu(m,p,2);
  # дисперсия - центральный момент второго порядка
```

$$Dsp := (m, p) \to \mu(m, p, 2)$$

```
> simplify(Dsp(m,p));
```

$$-p\sim m\sim (-1 + p\sim)$$

Итак, оказалось, что для дисперсии справедливо выражение

$$D(m, p) = \mu_2(m, p) = mp(1 - p). \qquad (1.26)$$

Формула (1.26) показывает, что *дисперсия дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону, находится в прямой зависимости от параметра m и произведения величин p и $1 - p$.*

3.7.13 Построим графики зависимости дисперсии от параметров m и p распределения

```
> plot([Dsp(5,p),Dsp(10,p),Dsp(15,p)],p=0..1,axes=BOXED,
       axesfont=[COURIER,BOLD,12],color=black,
       font=[TIMES,ITALIC,14],labels=["p","D"],
       linestyle=[SOLID,DOT,DASHDOT],thickness=2,
       title="график зависимости дисперсии от параметра p\n
              (биномиальный закон распределения,m=5,10,15)",
       titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.2.

Функция $D(m, p)$ при фиксированном m имеет ярко выраженный максимум (см. рисунок 1.2), который достигается при $p = 0{,}5$ (это можно показать с помощью дифференцирования (1.26)). Графики, представленные на рисунке 1.2, наглядно показывают, что значение дисперсии в равной степени зависит от величин p и $1 - p$ (см. также формулу (1.26)).

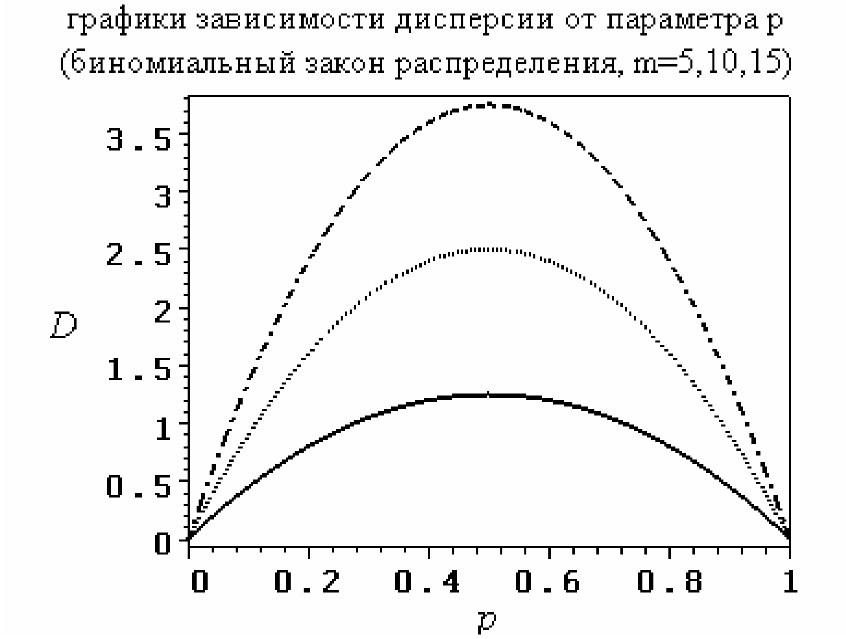

Рисунок 1.2 – Графики зависимости дисперсии от параметра p

3.7.14 Напишем функцию для определения *среднего квадратического отклонения*

```
> sigma:=(m,p)->(Dsp(m,p))^(1/2);
  # среднее квадратическое отклонение
```

$$\sigma := (m, p) \to \sqrt{\mathrm{Dsp}(m, p)}$$

```
> simplify(sigma(m,p));
```

$$\sqrt{m\sim}\,\sqrt{p\sim}\,\sqrt{1-p\sim}$$

Итак, для среднего квадратического отклонения справедливо выражение

$$\sigma(m,\,p) = \sqrt{D(m,\,p)} = \sqrt{mp(1-p)}. \qquad (1.27)$$

3.7.15 Построим графики зависимости среднего квадратического отклонения от параметров m и p распределения

```
> plot([sigma(5,p),sigma(10,p),sigma(15,p)],p=0..1,axes=BOXED,
       axesfont=[COURIER,BOLD,12],color=black,
       font=[TIMES,ITALIC,14],labels=["p","СКО"],
       linestyle=[SOLID,DOT,DASHDOT],thickness=2,
       title="график зависимости СКО от параметра p\n
              (биномиальный закон распределения, m=5,10,15)",
       titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.3.

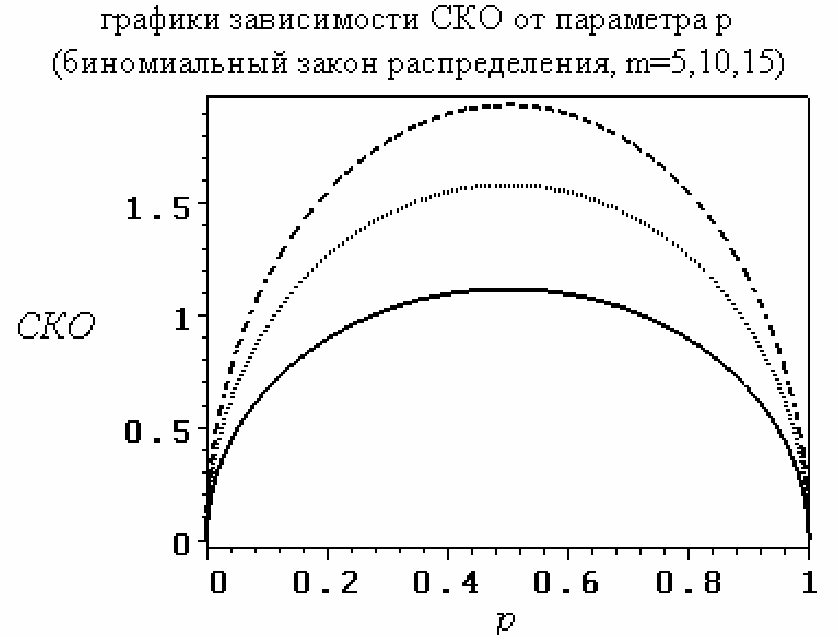

Рисунок 1.3 – Графики зависимости СКО от параметра p

3.7.16 Напишем функцию для определения *коэффициента асимметрии*

```
> Sk:=(m,p)->mu(m,p,3)/((sigma(m,p))^3); # коэффициент асимметрии
```

$$Sk := (m, p) \to \frac{\mu(m, p, 3)}{\sigma(m, p)^3}$$

```
> simplify(Sk(m,p));
```

$$-\frac{2\,p\sim - 1}{\sqrt{1 - p\sim}\,\sqrt{p\sim}\,\sqrt{m\sim}}$$

Таким образом, для коэффициента асимметрии можно выписать следующую формулу:

$$Sk(m,\, p) = \frac{\mu_3(m,\, p)}{[\sigma(m,\, p)]^3} = \frac{1 - 2p}{\sqrt{mp(1 - p)}}\,. \qquad (1.28)$$

Анализ формулы (1.28) позволяет выявить следующие особенности коэффициента асимметрии (1.28):

1) при $p \in (0, 0.5)$ $Sk(m,\, p) > 0$, т. е. распределение имеет *положительную асимметрию* («скошено влево» относительно математического ожидания);

2) при $p = 0{,}5$ $Sk(m,\, p) = 0$, т. е. распределение расположено *симметрично* относительно математического ожидания;

3) при $p \in (0.5, 1)$ $Sk(m,\, p) < 0$, т. е. распределение имеет *отрицательную асимметрию* («скошено вправо» относительно математического ожидания).

3.7.17 Построим графики зависимости коэффициента асимметрии от параметров m и p распределения

```
> plot([Sk(5,p),Sk(10,p),Sk(15,p)],p=0.1..0.9,axes=BOXED,
      axesfont=[COURIER,BOLD,12],color=black,
      font=[TIMES,ITALIC,14],labels=["p","Sk"],
      linestyle=[SOLID,DOT,DASHDOT],thickness=2,
      title="график зависимости коэф. асимметрии от параметра p\n
             (биномиальный закон распределения, m=5,10,15)",
      titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.4. Представленные на рисунке 1.4 графики наглядно показывают, что наиболее ярко асимметрия распределения проявляет себя при $p \to 0$ (положительная асимметрия) и $p \to 1$ (отрицательная асимметрия); при $p = 0{,}5$ распределение является симметричным.

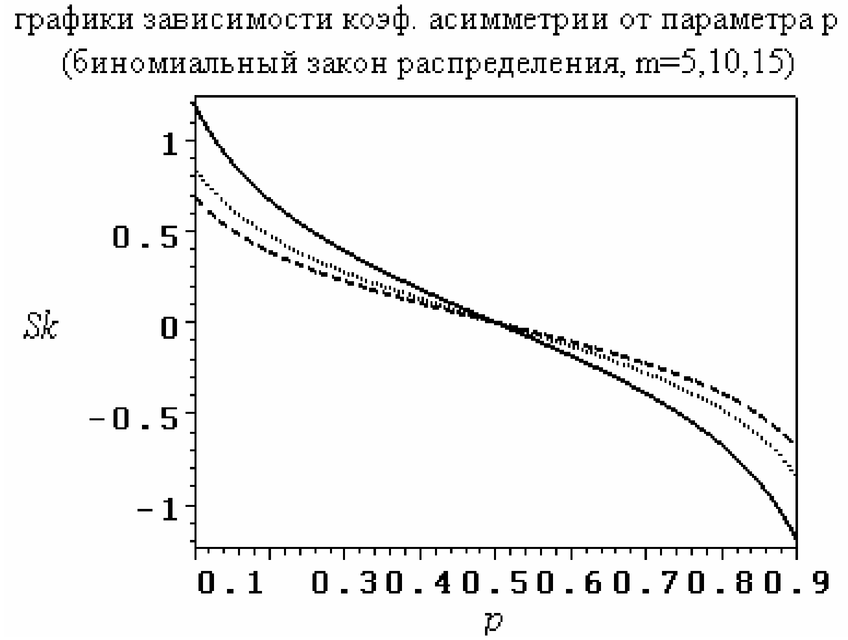

Рисунок 1.4 – Графики зависимости коэффициента асимметрии от параметра p

3.7.18 Напишем функцию для определения *коэффициента эксцесса*

```
> Ex:=(m,p)->(mu(m,p,4)/((sigma(m,p))^4))-3;
  # коэффициент эксцесса
```

$$Ex := (m, p) \to \frac{\mu(m, p, 4)}{\sigma(m, p)^4} - 3$$

```
> simplify(Ex(m,p));
```

$$-\frac{6\,p\sim^2 - 6\,p\sim + 1}{m\sim\, p\sim\,(-1 + p\sim)}$$

Таким образом, для коэффициента эксцесса можно выписать следующую формулу:

$$Ex(m,\,p)=\frac{\mu_4(m,\,p)}{[\sigma(m,\,p)]^4}-3=\frac{6p^2-6p+1}{mp(1-p)}=\frac{1-6p(1-p)}{mp(1-p)}. \qquad (1.29)$$

Анализ формулы (1.29) показывает, что *коэффициент эксцесса дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону, обратно пропорционален параметру* m*; подобно дисперсии и среднему квадратическому отклонению, коэффициент эксцесса зависит от произведения* $p(1-p)$.

3.7.19 Построим графики зависимости коэффициента эксцесса от параметров m и p распределения

```
> plot([Ex(5,p),Ex(10,p),Ex(15,p)],p=0.1..0.9,axes=BOXED,
      axesfont=[COURIER,BOLD,12],color=black,
      font=[TIMES,ITALIC,14],labels=["p","Ex"],
      linestyle=[SOLID,DOT,DASHDOT],thickness=2,
      title="график зависимости коэф. эксцесса от параметра p\n
             (биномиальный закон распределения, m=5,10,15)",
      titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.5.

Рисунок 1.5 – Графики зависимости коэффициента эксцесса от параметра p

Анализ представленных на рисунке 1.5 графиков показывает, что коэффициент эксцесса имеет ярко выраженный минимум, который достигается при $p=0{,}5$ (это можно показать с помощью дифференцирования (1.29)). Графики, представленные на рисунке 1.5, наглядно показывают, что коэффициент эксцесса в равной степени зависит от величин p и $1-p$ (см. также формулу (1.29)).

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что *коэффициент эксцесса, характеризующий «степень островершинности» распределения, принимает минимальное значение при тех параметрах распределения, при которых дисперсия, характеризующая «степень разброса» распределения относительно математического ожидания, принимает максимальное значение и наоборот, чем больше коэффициент эксцесса, тем меньше дисперсия*. Этот вывод имеет наглядную физическую интерпретацию: единичная масса (суммарная вероятность, равная единице) при больших значениях коэффициента эксцесса (островершинности) сосредотачивается около центра тяжести (математического ожидания), вследствие чего момент инерции (дисперсия) уменьшается.

На основании формул (1.26) и (1.29) можно выписать следующее *выражение для связи дисперсии и коэффициента эксцесса*:

$$Ex(m, p) = \frac{1 - 6D(m, p)/m}{D(m, p)}. \qquad (1.30)$$

3.7.20 Построим графики распределения вероятностей для различных значений параметров m и p

```
> points11:=[[k,P(k,5,0.2)] $k=0..5]:
  points12:=[[k,P(k,5,0.5)] $k=0..5]:
  points13:=[[k,P(k,5,0.8)] $k=0..5]:
> plot([points11,points12,points13],axes=BOXED,
       axesfont=[COURIER,BOLD,12],color=black,
       font=[TIMES,ITALIC,14],labels=["k","P(k)"],style=POINT,
       symbol=[CIRCLE,DIAMOND,BOX],symbolsize=[15,15,15],
       title="биномиальное распределение вероятностей\n
              (m=5, p=0.2,0.5,0.8)",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.6.

```
> points21:=[[k,P(k,10,0.2)] $k=0..10]:
  points22:=[[k,P(k,10,0.5)] $k=0..10]:
  points23:=[[k,P(k,10,0.8)] $k=0..10]:
> plot([points21,points22,points23],axes=BOXED,
  axesfont=[COURIER,BOLD,12],color=black,
  font=[TIMES,ITALIC,14],labels=["k","P(k)"],style=POINT,
  symbol=[CIRCLE,DIAMOND,BOX],symbolsize=[15,15,15],
  title="биномиальное распределение вероятностей\n
        (m=10, p=0.2,0.5,0.8)",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.7.

Рисунок 1.6 – Биномиальное распределение вероятностей ($m = 5$, $p = 0.2, 0.5, 0.8$)

Рисунок 1.7 – Биномиальное распределение вероятностей ($m = 10$, $p = 0.2, 0.5, 0.8$)

```
> points31:=[[k,P(k,15,0.2)] $k=0..15]:
  points32:=[[k,P(k,15,0.5)] $k=0..15]:
  points33:=[[k,P(k,15,0.8)] $k=0..15]:
> plot([points31,points32,points33],axes=BOXED,
  axesfont=[COURIER,BOLD,12],color=black,
  font=[TIMES,ITALIC,14],labels=["k","P(k)"],style=POINT,
  symbol=[CIRCLE,DIAMOND,BOX],symbolsize=[15,15,15],
  title="биномиальное распределение вероятностей\n
        (m=15, p=0.2,0.5,0.8)",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.8.

Рисунок 1.8 – Биномиальное распределение вероятностей
($m = 15$, $p = 0.2, 0.5, 0.8$)

```
> points41:=[[k,P(k,30,0.2)] $k=0..30]:
  points42:=[[k,P(k,30,0.5)] $k=0..30]:
  points43:=[[k,P(k,30,0.8)] $k=0..30]:
> plot([points41,points42,points43],axes=BOXED,
  axesfont=[COURIER,BOLD,12],color=black,
  font=[TIMES,ITALIC,14],labels=["k","P(k)"],style=POINT,
  symbol=[CIRCLE,DIAMOND,CROSS],symbolsize=[15,15,15],
  title="биномиальное распределение вероятностей\n
        (m=30, p=0.2,0.5,0.8)",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.9.

Рисунок 1.9 – Биномиальное распределение вероятностей
($m = 30$, $p = 0.2, 0.5, 0.8$)

3.7.21 Напишем функцию, определяющую *интегральный закон распределения* дискретной случайной величины, подчиненной биномиальному закону распределения

В соответствии с определением интегрального закона распределения, для последнего можно выписать следующую формулу:

$$F(l, m, p) = P(k < l, m, p) = \sum_{k=0}^{l-1} P(k, m, p). \qquad (1.31)$$

```
> F:=(l,m,p)->sum(P(k,m,p),k=0..(l-1));
  # интегральный закон распределения
```

$$F := (l, m, p) \to \sum_{k=0}^{l-1} \mathrm{P}(k, m, p)$$

```
> simplify(F(l,m,p));
```

$$1 - \mathrm{binomial}(m\sim, l)\, p\sim^{l} (1 - p\sim)^{(m\sim - l)} \mathrm{hypergeom}\left([1, -m\sim + l], [1 + l], \frac{p\sim}{-1 + p\sim}\right)$$

```
> simplify(F(0,m,p));
```

$$0$$

```
> simplify(F(infinity,m,p));
```

$$1$$

Таким образом, для интегрального закона (1.31) можно записать:

$$\begin{aligned} F(l, m, p) &= 1 - C_m^l p^l (1-p)^{m-l} H[1, l-m, 1+l, p/(p-1)] = \\ &= 1 - P(l, m, p) H[1, l-m, 1+l, p/(p-1)], \end{aligned} \qquad (1.32)$$

где $H(a, b, c, z)$ − гипергеометрическая функция. Нетрудно убедиться, что

$$F(0, m, p) = 0, \qquad (1.33)$$
$$F(\infty, m, p) = 1. \qquad (1.34)$$

3.7.22 Построим графики интегрального закона распределения для различных значений параметров m и p

```
> Fpoints11:=[[l,F(l,15,0.2)] l=0..20]:
  Fpoints12:=[[l,F(l,15,0.5)] l=0..20]:
  Fpoints13:=[[l,F(l,15,0.8)] $l=0..20]:
> plot([Fpoints11,Fpoints12,Fpoints13],axes=BOXED,
  axesfont=[COURIER,BOLD,12],color=black,font=[TIMES,ITALIC,14],
  labels=["l","F(l)"],style=POINT,symbol=[CIRCLE,DIAMOND,CROSS],
  symbolsize=[15,15,15],title="интегральный закон распределения\n
       (m=15, p=0.2,0.5,0.8)",titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.10.

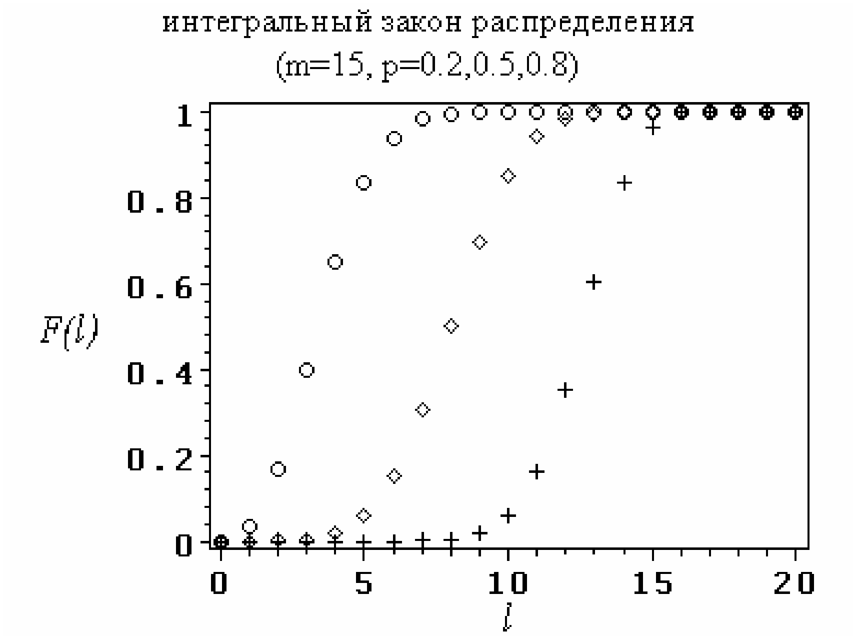

Рисунок 1.10 – Интегральный закон распределения
($m = 15$, $p = 0.2, 0.5, 0.8$)

3.7.23 Напишем функцию для вычисления *энтропии*

```
> H:=(m,p)->-sum(P(k,m,p)*ln(P(k,m,p)),k=0..m); # энтропия
```

$$H := (m, p) \to -\left(\sum_{k=0}^{m} \mathrm{P}(k, m, p)\ \ln(\mathrm{P}(k, m, p))\right)$$

```
> simplify(H(m,p));
```

$$-p\sim m\sim \ln(p\sim) - m\sim \ln(1 - p\sim) + p\sim m\sim \ln(1 - p\sim) - \left(\sum_{k\sim=0}^{m\sim} \ln(\mathrm{binomial}(m\sim, k\sim))\ \mathrm{binomial}(m\sim, k\sim)\ (1 - p\sim)^{(m\sim - k\sim)}\ p\sim^{k\sim}\right)$$

3.7.24 Построим графики зависимости энтропии от параметров m и p

```
> plot([H(5,p),H(10,p),H(15,p)],p=0..1,axes=BOXED,
  axesfont=[COURIER,BOLD,12],color=black,font=[TIMES,ITALIC,14],
  labels=["p","H, нат"],linestyle=[SOLID,DOT,DASHDOT],thickness=2,
  title="энтропия, m=5,10,15\n
        (биномиальное распределение вероятностей)",
  titlefont=[TIMES,ROMAN,12]);
```

Результат выполнения команды представлен на рисунке 1.11.

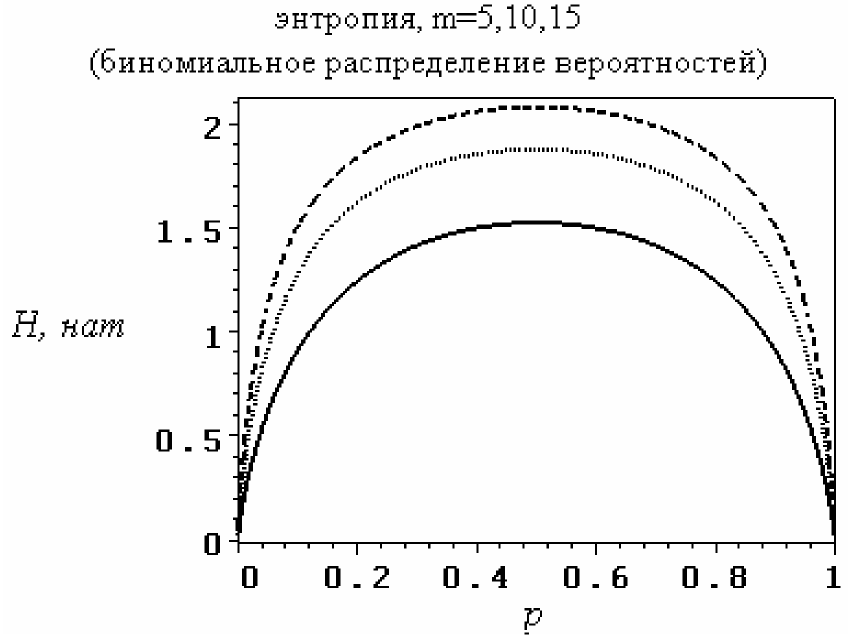

Рисунок 1.11 – Графики зависимости энтропии от параметров m и p

Анализ представленных на рисунке 1.11 графиков показывает, что *энтропия увеличивается с ростом параметра m; при фиксированных m зависимость энтропии от параметра p качественно напоминает зависимость дисперсии от этого параметра* (см. рисунок 1.2). При $p = 0,5$ энтропия имеет ярко выраженный максимум.

4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое случайное событие?
2. Что такое исход? Что понимают под пространством исходов?
3. Охарактеризуйте операции над событиями: объединение, пересечение, дополнение.
4. Что понимают под вероятностью случайного исхода?
5. Что понимают под вероятностью случайного события?
6. Что такое случайная величина?
7. Какие случайные величины называют дискретными?
8. Охарактеризуйте ряд распределения и его свойства.
9. Охарактеризуйте интегральную функцию распределения дискретной случайной величины.
10. Перечислите и охарактеризуйте числовые характеристики дискретных случайных величин: моменты, математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, коэффициент асимметрии, коэффициент эксцесса.
11. Что называют энтропией дискретной случайной величины?
12. Перечислите свойства энтропии дискретной случайной величины.