Практическое занятие 2 (семестр 3) «Элементы квантовой физики»
Методические указания к практическому занятию 2

1. Проработайте материал Лекций и краткую теорию. В лекциях есть все необходимые для решения задач формулы.
2. Изучите примеры решения задач.
3. Решите задачи из раздела «Задачи для самостоятельного решения к практическому занятию 1». Номер варианта определяется по последней цифре студенческого билета. Если последняя цифра нечетная – вариант 1. Если последняя цифра четная – вариант 2.
4. Возможные способы создания файла с решениями:
   a. напишите решения задач от руки, отсканируйте или сфотографируйте. Возможные расширения у полученного файла: *.jpg, *.bmp, *.tif, *.pdf. (Совет: если полученный файл имеет большой размер, можно перевести его для уменьшения размера в формат *.pdf)
   b. если есть возможность, можете набрать решения в текстовом редакторе. Возможные расширения у полученного файла: *.doc, *.rtf, *.pdf.
5. Пришлите файл с решениями задач.

<u>Оформление задач:</u>

1. Записать полностью условие задачи. Выписать все величины, входящие в условие, – столбиком и выразить их в одних единицах (преимущественно в Международной системе единиц СИ).
2. Осмыслить физическую сущность задачи, представив ее наглядно в виде четкого рисунка, на котором, хотя бы условно, указать все параметры, характеризующие явления, на основе которых построено условие задачи.
3. Указать основные законы и формулы, на которых базируется условие задачи, разъяснить буквенные обозначения, употребляемые при написании формул. Векторные величины внести на чертеж. Если при решении задачи применяется формула, полученная для частного случая, не выражающая какой-нибудь физический закон или не являющаяся определением какой-нибудь физической величины, то ее следует вывести. Пояснения должны быть краткими, но исчерпывающими.
4. Решить задачу сначала в общем виде, то есть в буквенных обозначениях, заданных в условии задачи и взятых из таблиц.
5. Подставив в рабочую формулу размерности, убедиться в правильности размерности искомой величины.
6. Подставить в конечную формулу числовые значения. При вычислениях соблюдать правила приближенных вычислений и округлений.

Примеры решения задач

.

Нередко для решения задач на гипотезу де Бройля требуется выразить импульс частицы через ее кинетическую энергию (или наоборот). При этом надо различать случаи классических и релятивистских частиц.

При решении задач на соотношения неопределенностей нужно учесть, что если в задаче стоит вопрос об оценке наименьшей ошибки или неточности одной из величин, входящих в эти соотношения, то фактически нужно найти неопределенность этой величины, т.к. имеется в виду неточность в измерениях, связанная не с несовершенством экспериментальной техники, а с объективными свойствами исследуемой системы.

Пример 1. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы его длина волны де Бройля λ была равна 1) $\lambda_1 = 0{,}1$ нм, 2) $\lambda_2 = 0{,}1$ пм?

Дано:	Решение:
$\lambda_1 = 10^{-10}$ м $\lambda_2 = 10^{-13}$ м	Длина волны де Бройля выражается формулой
1) U_1 = ? 2) U_2 = ?	$$\lambda = \frac{h}{p},$$ где h – постоянная Планка, p – импульс частицы.

Импульс электрона можно выразить через кинетическую энергию электронов. Связь импульса с кинетической энергией различна для классического случая (когда кинетическая энергия частицы много меньше ее энергии покоя) и для релятивистского случая (когда кинетическая энергия частицы сравнима с ее энергией покоя).

В классическом случае

$$p = \sqrt{2mT},$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mT}}, \qquad (1)$$

где m – масса покоя частицы, для электрона $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг.

В релятивистском случае

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{T(T+2E_0)},$$

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{T(T+2E_0)}}, \qquad (2)$$

где $c = 3\ 10^8$ м/с – скорость света, $E_0 = mc^2$ – энергия покоя, для электрона $E_0 = 0{,}51$ МэВ.

Чтобы решить вопрос, какую формулу, классическую или релятивистскую, использовать в решении определим порядок длины волны де Бройля электрона для релятивистского случая

$$\lambda_{рел} \cong \frac{h}{mc} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} = 2{,}42 \cdot 10^{-12}\,(м).$$

Для классического случая должно быть $\lambda >> \lambda_{рел}$, иначе случай релятивистский.

Для $\lambda_1 = 10^{-10}$ м условие $\lambda_1 >> \lambda_{рел}$ выполняется, поэтому в первом случае можно использовать классическую формулу (1).

Для $\lambda_2 = 10^{-13}$ м условие $\lambda_1 >> \lambda_{рел}$ не выполняется, поэтому во втором случае нужно использовать релятивистскую формулу (2).

Определим кинетическую энергию электрона. Если поле ускоряющее то работа, совершаемая полем по перемещению электрона, идет на увеличение кинетической энергии электрона, т.е.

$$A = \Delta T = T_2 - T_1.$$

Будем считать, что начальной кинетической энергией электрона можно пренебречь, тогда

$$T = A.$$

Работа в электрического поля по перемещению заряда:

$$A = qU,$$

где q – заряд частицы, U – пройденная частицей ускоряющая разность потенциалов. Следовательно

$$T = qU.$$

Подставим полученное значение кинетической энергии в формулы (1) и (2) и определим из этих формул U_1 и U_2.

1) Классический случай

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2mqU_1}},$$

$$U_1 = \frac{h^2}{2mq\lambda_1^2},$$

$$[U_1] = \frac{Дж^2 с^2}{Кл \cdot кг \cdot м^2} = \frac{Дж}{Кл} = В,$$

$$U_1 = \frac{(6{,}63 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-20}} = 150(В).$$

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{qU_2(qU_2 + 2E_0)}},$$

2) Релятивистский случай

$$U_2 = \frac{E_0}{q}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{hc}{E_0\lambda_2}\right)^2} - 1\right),$$

$$[U_2] = \frac{Дж}{Кл}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{Дж \cdot с}{Дж \cdot м} \cdot \frac{м}{с}\right)^2} - 1\right) = В,$$

$$U_2 = \frac{0{,}51 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0{,}51 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-13}}\right)^2} - 1\right) = 12 \cdot 10^6$$

Ответ: 1) U_1 = 150 В, 2) U_2 = 12 МВ.

Пример 2. Оценить относительную неопределенность импульса частицы, у которой неопределенность координаты в $2 \cdot 10^3$ раза больше ее длины волны де Бройля.

Дано:	Решение:
$\Delta x = 2 \cdot 10^3 \lambda$	Соотношение неопределенностей для координаты и импульса имеет вид
$\dfrac{\Delta p_x}{p_x} = ?$	$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$,

где h – постоянная Планка,

Δx – неопределенность координаты,

Δp_x – неопределенность проекции импульса на ось x.

По условию задачи

$$\Delta x = 2 \cdot 10^3 \lambda,$$

где λ – длина волны де Бройля для рассматриваемой частицы.

Длина волны де Бройля зависит от импульса частицы и определяется формулой

$$\lambda = \frac{h}{p_x}.$$

Неопределенность координаты:

$$\Delta x = 2 \cdot 10^3 \frac{h}{p_x}.$$

Соотношение неопределенностей:

$$\Delta x \Delta p_x = 2 \cdot 10^3 \frac{h}{p_x} \Delta p_x \geq h .$$

Искомая величина:

$$\frac{\Delta p_x}{p_x} \geq \frac{1}{2 \cdot 10^3} = 5 \cdot 10^{-4} .$$

Ответ: $\frac{\Delta p_x}{p_x} \geq 5 \cdot 10^{-4}$.

Строение атома. Краткая теория

Состояние атома водорода определяют четыре квантовых числа: главное, орбитальное, магнитное и спиновое.

1) Главное квантовое число n = 1, 2, 3, … определяет энергию электрона в атоме водорода:

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2 n^2} = -\frac{hcR}{n^2} = -\frac{13{,}6 \text{ эВ}}{n^2} .$$

2) Орбитальное квантовое число l = 0, 1, 2, …, (n-1) определяет орбитальный момент импульса электрона:

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)} .$$

3) Магнитное квантовое число m = 0, ±1, ±2, …, ±l определяет проекцию орбитальный момент импульса на выбранное направление (ось z):

$$L_z = m\hbar .$$

4) Спиновое квантовое число $s = \pm \frac{1}{2}$ определяет проекцию спина электрона выбранное направления (ось z):

$$S_z = s\hbar .$$

Спектр излучения (или поглощения) атома водорода определяется формулой Бальмера:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где k и n – номера энергетических уровней (орбит),

$R = 1{,}1 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ – постоянная Ридберга.

k = 1, n = 2, 3, 4, … – ультрафиолетовая серия Лаймана,

k = 2, n = 3, 4, 5, … – видимая серия Бальмера,

k = 3, n = 4, 5, 6, … – инфракрасная серия Пашена, и т.д.

Пример 3. Вычислить для атома водорода радиус первой боровской орбиты и скорость электрона на ней.

Решение:

Согласно правилу квантования Бора радиус n-ой боровской орбиты и скорость электрона на ней связаны соотношением

$$mv_n r_n = n\hbar,$$

где n – главное квантовое число (n = 1, 2, 3 ...),

$\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1{,}05\cdot10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка,

m – масса электрона,

r_n – радиус n-ой орбиты,

v_n – скорость электрона на n-ой орбите.

Чтобы иметь еще одно уравнение, связывающее r_n и v_n, запишем 2-ой закон Ньютона для электрона, движущегося под действием кулоновской силы притяжения ядра (протона) по круговой орбите:

$$ma = F,$$

где $a = \dfrac{v_n^2}{r_n}$ – центростремительное ускорение электрона,

$F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{r_n^2}$ – сила Кулона.

Решая систему уравнений:

$$mv_n r_n = n\hbar,$$
$$\frac{mv_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2},$$

найдем радиус и скорость:

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2\cdot n^2}{me^2},$$
$$v_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar\cdot n}.$$

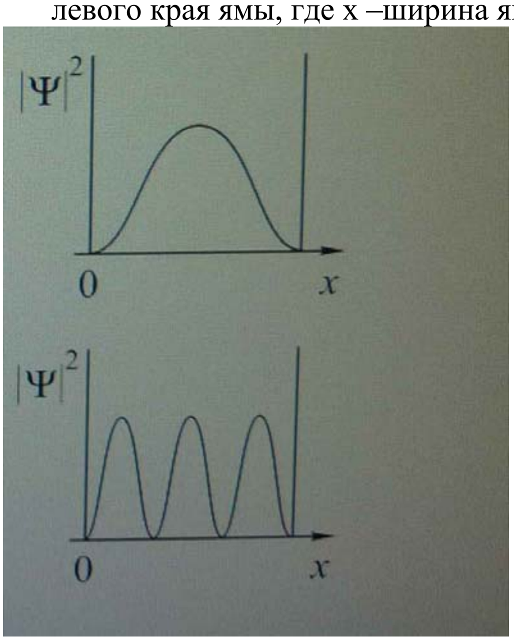
Ответ: при n = 1 получим $r_1 = 0{,}53\cdot10^{-10}$ м, $v_1 = 2{,}2\cdot10^6$ м/с.

Задачи для самостоятельного решения к практическому занятию 2.

Номер варианта определяется по последней цифре зачетной книжки или студенческого билета. Если последняя цифра нечетная – вариант 1. Если последняя цифра четная – вариант 2.

Вариант 1

1. Что такое корпускулярно-волновой дуализм?
2. Электрон – это частица или волна? Может ли электрон проявлять свойства волны. Приведите пример.
3. Определить волну де Бройля для электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов 9 МВ.
4. Электрон обладает кинетической энергией Т = 1 МэВ. Во сколько раз изменится длина волны де Бройля, если кинетическая энергия электрона возрастает вдвое?
5. Кратко поясните, как устроен атом водорода в соответствии с теорией Бора. По какой формуле рассчитывается энергия электрона в атоме водорода?
6. Найти кинетическую энергию электрона, находящегося на n-ой орбите атома водорода. Задачу решить для $n = 1, 2, 3$ и ∞.
7. Запишите уравнение Шредингера. Ответьте на вопросы:
    a. какую величину можно найти, решая уравнение Шредингера?
    b. какой физический смысл имеет волновая функция ψ?
    c. можно ли применить уравнение Шредингера к электрону в атоме? К протону? К кирпичу?
8. На рисунке приведены картины распределения плотности вероятности нахождения микрочастицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Какая картина соответствует уровню с номером n=3? Поясните, почему. Чему равна вероятность нахождения частицы в точке, находящейся на расстоянии 1/3 x от левого края ямы, где x –ширина ямы?



Вариант 2

1. Что такое корпускулярно-волновой дуализм?
2. Электрон – это частица или волна? Может ли электрон проявлять свойства волны. Приведите пример.
3. Определить волну де Бройля для протона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов 100 МВ.
4. Электрон обладает кинетической энергией Т = 0,51 МэВ. Во сколько раз изменится длина волны де Бройля, если кинетическая энергия электрона возрастает вдвое?
5. Кратко поясните, как устроен атом водорода в соответствии с теорией Бора. По какой формуле рассчитывается энергия электрона в атоме водорода?
6. Найти: 1) радиусы первых трех боровских электронных орбит в атоме водорода; 2) скорость электрона на них.
7. Запишите уравнение Шредингера. Ответьте на вопросы:
    a. какую величину можно найти, решая уравнение Шредингера?
    b. какой физический смысл имеет волновая функция ψ?
    c. можно ли применить уравнение Шредингера к электрону в атоме? К протону? К кирпичу?
8. На рисунке приведены картины распределения плотности вероятности нахождения микрочастицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Какая картина соответствует уровню с номером n=2? Поясните, почему. Чему равна вероятность нахождения частицы посередине ямы?