Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АВИАЦИОННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра автоматизированных систем управления

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания
для выполнения практических работ
по дисциплине «Основы теории управления»

УФА 2010

Составители О.Д. Лянцев, Е.Е. Кузнецова

УДК 004.45(07)
ББК 32.973-018.2(я7)

Методы решения задач по теории автоматического управления: методические указания для выполнения практических работ по дисциплине «Основы теории управления» / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; Сост. О.Д. Лянцев, Е.Е. Кузнецова. – Уфа, 2010. – 39 с.

Методические указания содержат задачи по базовым разделам линейной теории автоматического управления: получение передаточных функций из дифференциальных уравнений состояния, преобразования структурных схем, методы исследования устойчивости САУ и качества регулирования. Приведены примеры решения задач и варианты заданий для самостоятельной работы.

Методические указания разработаны с использованием учебной и специальной литературы по теории автоматического управления с применением типовых методических материалов.

Предназначены для подготовки дипломированных специалистов по направлению 230100 – «Информатика и вычислительная техника» специальности 230102 – «Автоматизированные системы обработки информации и управления».

Табл. 2. Ил. 15. Библиогр.: 6 назв.

Рецензенты: канд. техн. наук, доц., Н.М. Дубинин,
д-р техн. наук, проф., Р.А. Мунасыпов

СОДЕРЖАНИЕ

Практическое занятие № 1

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ОБЪЕКТОВ

1.1. Цель работы

Целью работы является изучение методов составления передаточных функций объектов управления.

1.2. Теоретическая часть

Понятие передаточной функции является одним из основных в классической теории управления. Передаточные функции объекта могут быть получены на основе дифференциальных уравнений, описывающих характеристики физического объекта и на основе системы дифференциальных уравнений. Существуют матричные передаточные функции, описывающие системы, имеющие более одной входной или выходной величины. Задачи на получение матричной передаточной функции сводятся к получению матрицы передаточных функций из динамических характеристик объекта.

1.3. Примеры и решения

Пример 1.3.1. Получение передаточной функции RLC цепи

Необходимо записать уравнения математической модели, определить передаточную функцию для объекта, приведенного на рис. 1.1, при $R_1 = R_2 = 1$ Ом, $R_3 = 2$ Ом, $C_1 = C_2 = 1$ Ф:

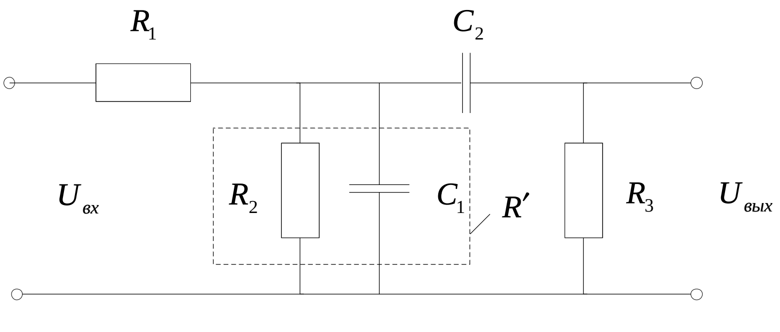


Рис. 1.1.

Выходной величиной будем считать напряжение на выходе цепи, т.е. $y = U_{вых}$, входным воздействием – напряжение на входе $u = U_{вх}$.

Чтобы найти передаточную функцию, необходимо найти отношение выходного сигнала к входному сигналу:

$$W(p) = \frac{U_{вых}(p)}{U_{вх}(p)}.$$

Физическими законами, в силу которых развиваются процессы в объекте, являются законы Кирхгофа и Ома. Запишем дифференциальные уравнения для этих процессов.

Запишем сопротивление R' при параллельном соединении, как показано пунктиром на рис.1.1. Для этого выразим комплексное сопротивление элементов R_2 и C_2, согласно таблице 1.

Таблица 1.

Элемент	Операторное сопротивление
Резистор	R
Катушка индуктивности	pL
Конденсатор	$\frac{1}{pC}$

При параллельном соединении проводников складываются величины, обратные их сопротивлениям:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_2} + C_1 p, \text{ или } \frac{1}{R'} = \frac{R_2 C_1 p + 1}{R_2}.$$

На рис. 1.2. показана преобразованная эквивалентная схема, после замены параллельного соединения на R'.

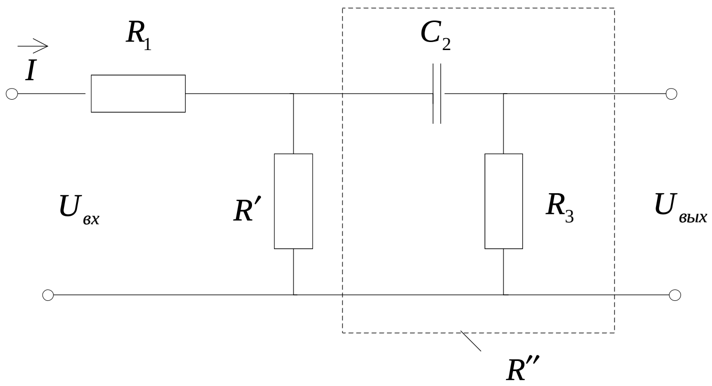


Рис. 1.2.

Запишем выражение для сопротивления R'' при последовательном соединении проводников, как показано на рис. 1.2. В этом случае значения сопротивлений C_2 и R_3 складываются:

$$R'' = R_3 + \frac{1}{C_2 p} = \frac{R_3 C_2 p + 1}{C_2 p}.$$

Найдем выражение для сопротивления R''', как показано на рис. 1.3.

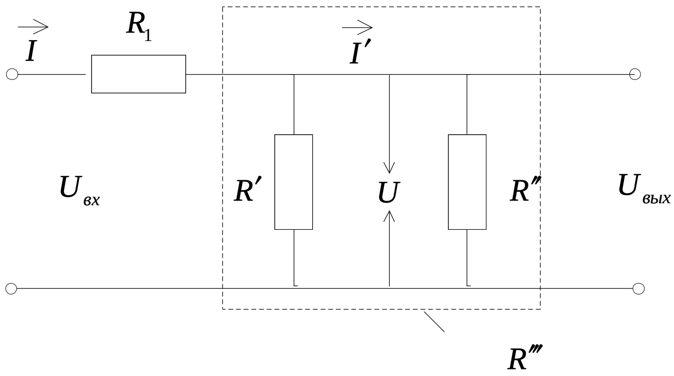


Рис. 1.3.

Сопротивление R''' в контуре равно:

$$R''' = \frac{1}{\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}} = \frac{1}{\frac{R_2 C_1 p + 1}{R_2} + \frac{C_2 p}{R_3 C_2 p + 1}},$$

или

$$R''' = \frac{R_2 (R_3 C_2 p + 1)}{(R_2 C_1 p + 1)(R_3 C_2 p + 1) + R_2 C_2 p}.$$

Далее найдем входной ток по закону Ома, как отношение входного напряжения к сопротивлению всей цепи:

$$I = \frac{U_{вх}}{R_1 + R'''} = \frac{U_{вх}((R_2 C_1 p + 1)(R_3 C_2 p + 1) + R_2 C_2 p))}{R_1((R_2 C_1 p + 1)(R_3 C_2 p + 1) + R_2 C_2 p) + R_2 (R_3 C_2 p + 1)},$$

тогда напряжение U, как показано на рис. 1.3 будет равно:

$$U = IR''' = \frac{U_{вх} R_2 (R_3 C_2 p + 1)}{R_1((R_2 C_1 p + 1)(R_3 C_2 p + 1) + R_2 C_2 p) + R_2 (R_3 C_2 p + 1)},$$

ток I' после разветвления равен:

$$I' = \frac{U}{R''} = \frac{U_{вх} R_2 C_2 p}{R_1((R_2 C_1 p + 1)(R_3 C_2 p + 1) + R_2 C_2 p) + R_2 (R_3 C_2 p + 1)}.$$

Выходное напряжение равно:

$$U_{вых} = I' R_3 = \frac{U_{вх} R_2 R_3 C_2 p}{R_1((R_2 C_1 p + 1)(R_3 C_2 p + 1) + R_2 C_2 p) + R_2 (R_3 C_2 p + 1)}.$$

Разделим обе части выражения на $U_{вх}$:

$$\frac{U_{вых}}{U_{вх}} = \frac{R_2 R_3 C_2 p}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 p^2 + (R_1 R_2 C_1 + R_1 R_2 C_2 + R_1 R_3 C_2 + R_2 R_3 C_2) p + R_1 + R_2}.$$

Подставив численные значения, получим искомую передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{p}{p^2 + 3p + 1}.$$

Пример 1.3.2. Получение передаточной функции объекта на основе системы дифференциальных уравнений

Опередить передаточную функцию *W(p)*, если известны дифференциальные уравнения состояния объекта:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - x_2 - x_3 + 6u, \\ y = x_1 + x_2 + x_3. \end{cases}$$

Запишем уравнения состояния в операторной форме:

$$\begin{cases} px_1 = x_2, \\ px_2 = x_3, \\ px_3 = -4x_1 - x_2 - x_3 + 6u, \\ y = x_1 + 2x_2 + x_3. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы выразим x_3:

$$px_3 + x_3 = -4x_1 - x_2 + 6u,$$

$$x_3 = \frac{-4x_1 - x_2 + 6u}{p+1}.$$

Из второго уравнения системы $x_3 = px_2$, тогда

$$px_2 = \frac{-4x_1 - x_2 + 6u}{p+1}.$$

Из первого уравнения системы запишем $x_2 = px_1$, тогда

$$p^2 x_1 = \frac{-4x_1 - px_1 + 6u}{p+1}, \quad \text{или} \quad x_1 = \frac{6u}{p^3 + p^2 + p + 4}$$

Поставив x_1 в первое уравнение системы, получим:

$$x_2 = \frac{6pu}{p^3 + p^2 + p + 4}.$$

Поставив x_2 во второе уравнение системы, получим:

$$x_3 = \frac{6p^2 u}{p^3 + p^2 + p + 4}.$$

Из уравнения выхода $y = x_1 + x_2 + x_3$ найдем

$$y = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{6u}{p^3 + p^2 + p + 4} + \frac{6pu}{p^3 + p^2 + p + 4} + \frac{6p^2 u}{p^3 + p^2 + p + 4},$$

или

$$y = \frac{6p^2 u + 6pu + 6u}{p^3 + p^2 + p + 4}.$$

Разделим обе части выражения на u, получим искомую передаточную функцию:

$$W(p)=\frac{y}{u}=\frac{6p^2+6p+6}{p^3+p^2+p+4}\ .$$

Пример 1.3.3. Получение матричной передаточной функции на основе дифференциальных уравнений состояния

Определить матричную передаточную функцию системы, описываемой следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases}\ddot{y}_1+5\dot{y}_1+6y_1=\ddot{u}_1+3\dot{u}_1+4\dot{u}_2+8u_2,\\ \dot{y}_2+y_2=\dot{u}_1+2\dot{u}_2+2u_2.\end{cases}$$

Запишем уравнения в операторной форме:

$$\begin{cases}(p^2+5p+6)y_1=(p^2+3p)u_1+(4p+8)u_2,\\ (p+1)y_2=pu_1+2(p+1)u_2.\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}y_1=\dfrac{p^2+3p}{p^2+5p+6}u_1+\dfrac{4p+8}{p^2+5p+6}u_2,\\[2ex] y_2=\dfrac{p}{p+1}u_1+\dfrac{2p+2}{p+1}u_2.\end{cases}$$

Тогда матричная передаточная функция будет иметь вид:

$$W(p)=\begin{bmatrix}W_{11}(p) & W_{12}(p)\\ W_{21}(p) & W_{22}(p)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{p^2+3p}{p^2+5p+6} & \dfrac{4p+8}{p^2+5p+6}\\[2ex] \dfrac{p}{p+1} & 2\end{bmatrix}.$$

Пример 1.4. Получение матричной передаточной функции на основе матриц состояния объекта

Определить матричную передаточную функцию, если известны матрицы A, B и C:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -3 & -5\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Исходя из матриц, запишем дифференциальные уравнения состояния объекта:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+2x_2+u_2,\\ \dot{x}_2=-3x_1-5x_2+2u_1,\\ y_1=x_1,\\ y_2=x_2.\end{cases}$$

Запишем уравнения в операторной форме:

$$\begin{cases}px_1=-x_1+2x_2+u_2,\\ px_2=-3x_1-5x_2+2u_1,\\ y_1=x_1,\\ y_2=x_2.\end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим x_1:

$$x_1 = \frac{2x_2 + u_2}{p+1}. \qquad (*)$$

Из второго уравнения системы выразим x_2:

$$x_2 = \frac{-3x_1 + 2u_1}{p+5}. \qquad (**)$$

Для того чтобы выразить x_1 через u_1 и u_2, подставим выражение (**) в выражение (*), получим:

$$x_1 = \frac{4u_1 + u_2(p+5)}{p^2 + 6p + 11}.$$

Таким же образом подставляем (*) в (**) и получаем x_2 через u_1 и u_2:

$$x_2 = \frac{2(p+1)u_1 - 3u_2}{p^2 + 6p + 11}.$$

Так как $y_1 = x_1$ и $y_2 = x_2$ получим системы уравнений, в которой при переменных управления находятся искомые матрицы:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{4}{p^2+6p+11}u_1 + \dfrac{p+5}{p^2+6p+11}u_2, \\ y_2 = \dfrac{2p+2}{p^2+6p+11}u_1 + \dfrac{-3}{p^2+6p+11}u_2. \end{cases}$$

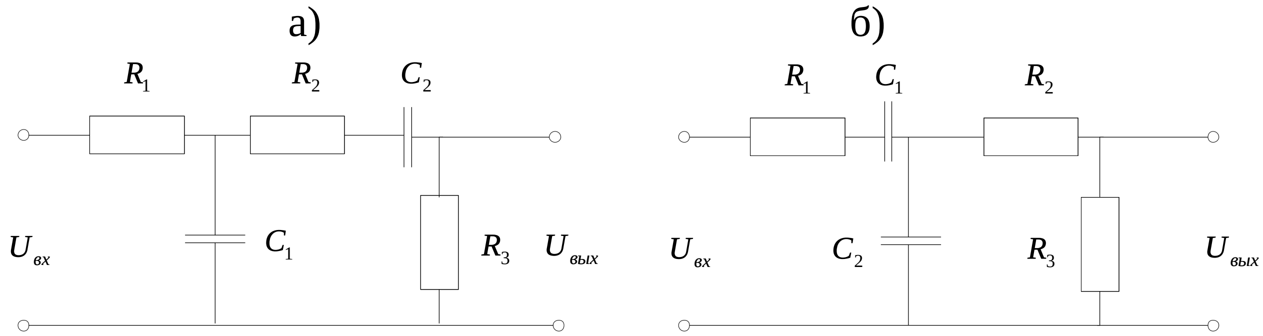
Матричная передаточная функция имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{4}{p^2+6p+11} & \dfrac{p+5}{p^2+6p+11} \\ \dfrac{2p+2}{p^2+6p+11} & \dfrac{-3}{p^2+6p+11} \end{bmatrix}.$$

1.4. Задачи

Задача 1.4.1

Записать уравнения математической модели, определить передаточную функцию для объекта, приведенного на рис. 1.4, при $R_1 = R_2 = 1$ Ом, $R_3 = 2$ кОм, $C_1 = C_2 = 1$ Ф, L_1=1 Гн.



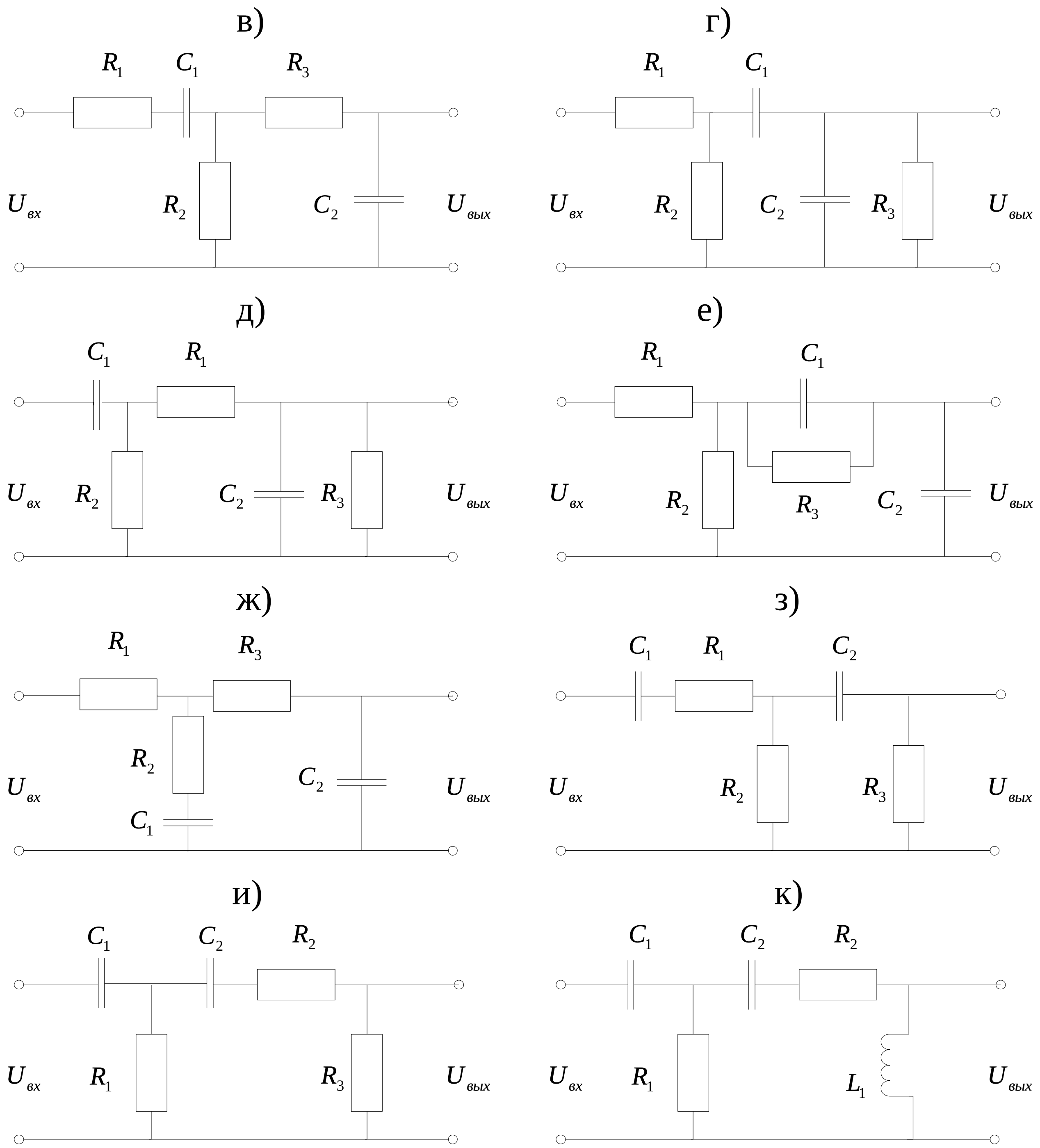


Рис. 1.4.

Задача 1.4.2

Опередить передаточную функцию *W(p)*, если известны дифференциальные уравнения состояния объекта:

а) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 5x_3, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 2x_2 - x_3 + 5u, \\ y = 0.1x_1. \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 4u, \\ y = x_1. \end{cases}$$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_2 - 1u, \\ \dot{x}_2 = -20x_1 - 10x_2 + 2u, \\ y = x_1 + 2x_2. \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 3x_2 - 7x_3 + u, \\ y = 2x_1 + x_2 + x_3. \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2u, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 0.5x_2 - 10x_3 + 3u, \\ y = x_1. \end{cases}$

е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_1 + x_2 + 2u, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 5x_2 - 3u, \\ y = x_1 + 0.2x_2. \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - 3x_3, \\ \dot{x}_3 = -0.1x_1 - 0.2x_2 - x_3 - u, \\ y = 2x_1 + x_2. \end{cases}$

з) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - x_2 + 2u, \\ y = x_1 + 2x_2. \end{cases}$

и) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + 3u, \\ y = x_1 + 5x_2. \end{cases}$

к) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 15x_2 - u, \\ y = x_1 - x_2. \end{cases}$

Задача 1.4.3

Определить матричную передаточную функцию системы, описываемой следующими дифференциальными уравнениями:

а) $\begin{cases} \dddot{y}_1 + \ddot{y}_1 + \dot{y}_1 + y_1 = 2\ddot{u}_1 + 2\dot{u}_1 + 4\dot{u}_2 + 4u_2, \\ y_2 = 5u_1 + \dot{u}_2 + 5u_2. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dot{y}_1 + 2y_1 = 3\dot{u}_1 + 6u_1 + \dot{u}_2 + 3u_2, \\ \dddot{y}_2 + \ddot{y}_2 = \ddot{u}_1 + \dot{u}_1 + \dddot{u}_2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} y_1 = \ddot{u}_1 + 8\dot{u}_1 + 4u_2, \\ y_2 = \dot{u}_1 + 3u_1 + 6u_2. \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dot{y}_1 + 3y_1 = 3\dot{u}_1 + 24\dot{u}_2, \\ y_2 = \dot{u}_1 + 6u_1 + \dot{u}_2 + 2u_2. \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dot{y}_1 + y_1 = 7\dot{u}_1 + 7u_1 + u_2, \\ 10\dddot{y} + 2\ddot{y} + \dot{y}_2 + 3y_2 = \dot{u}_1 + \ddot{u}_2 + 7\dot{u}_2 + 12u_2. \end{cases}$

е) $\begin{cases} y_1 = 3\dot{u}_1 + 4\dot{u}_2, \\ 3\dddot{y} + 4\ddot{y} + \dot{y}_2 + 10y_2 = \dddot{u}_1 + 10\ddot{u}_1 + 8\dot{u}_1 + 80u_1 + \dot{u}_2. \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dot{y}_1 + 2y_1 = 6\dot{u}_1 + 12u_1 + \dot{u}_2, \\ \dot{y}_2 + 2y_2 = u_1 + \dot{u}_2 + 3u_2. \end{cases}$

з) $\begin{cases} 2\dddot{y}_1 + 8\ddot{y}_1 + 2\dot{y}_1 + 8y_1 = 6\ddot{u}_1 + 24\dot{u}_1 + 2\dddot{u}_2 + 2\dot{u}_2, \\ y_2 = 3u_1 + \dot{u}_2 + u_2. \end{cases}$

и) $\begin{cases} \dot{y}_1 + 3y_1 = 5\ddot{u}_1 + 15\dot{u}_1 + u_2, \\ \dot{y}_2 + 3y_2 = \dot{u}_1 + 7\dot{u}_2 + 21u_2. \end{cases}$

к) $\begin{cases} \ddot{y}_1 + 7\dot{y}_1 + 12y_1 = \dot{u}_1 + 4u_1 + \dot{u}_2 + 3u_2, \\ \dot{y}_2 + 5y_2 = u_1 + \dddot{u}_2 + 5u_2. \end{cases}$

Задача 1.4.4

Определить матричную передаточную функцию, если известны матрицы A, B и C:

а) $A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$

б) $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$

в) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$

г) $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$

д) $A = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$

е) $A = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$

ж) $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$

з) $A = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$

и) $A = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$

к) $A = \begin{bmatrix} -9 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$

Практическое занятие № 2

КАНОНИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ И СТРУКТУРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

2.1. Цель работы

Целью работы является изучение методов структурных преобразований и канонического описания.

2.2. Теоретическая часть

Существуют две формы представления модели объекта в переменных состояния, которые именуются первой и второй канонической формами.

2.3. Примеры и решения

Пример 2.3.1. Первая каноническая форма

Записать модель в переменных состояния, соответствующую первому каноническому описанию, определить матрицы A, B, C и изобразить структурную схему системы:

$$\dddot{y} + 3\ddot{y} + \dot{y} + y = 2\ddot{u} + 2\dot{u} + 5u .$$

Запишем дифференциальное уравнение в операторной форме:

$$p^3 y + 3p^2 y + py + y = 2p^2 u + 2pu + 5u .$$

Передаточная функция этого выражения будет иметь вид:

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{2p^2 + 2p + 5}{p^3 + 3p^2 + p + 1}.$$

Представим передаточную функцию в виде произведения двух передаточных функций, обозначив сигнал, проходящий между ними, как z:

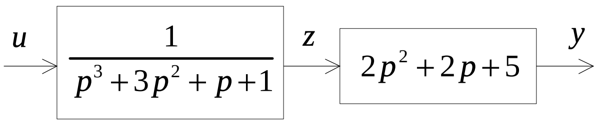


Рис. 2.1. Структурное представление передаточной функции

Запишем операторные уравнения для каждого звена системы через z:

$$\begin{cases} u = (p^3 + 3p^2 + p + 1)z, \\ y = (2p^2 + 2p + 5)z, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} u = \dddot{z} + 3\ddot{z} + \dot{z} + z, \\ y = 2\ddot{z} + 2\dot{z} + 5z. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим старшую производную по z:

$$\dddot{z} = u - 3\ddot{z} - \dot{z} - z$$

Согласно полученному выражению нарисуем цепочку из трех интеграторов переменной z .

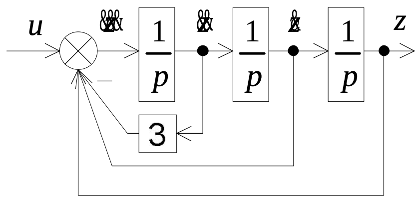


Рис. 2.2.

Из уравнения $y = 2\ddot{z} + 2\dot{z} + 5z$ сформируем выходную переменную y, как сумму переменной z и ее производных и добавим к предыдущей схеме:

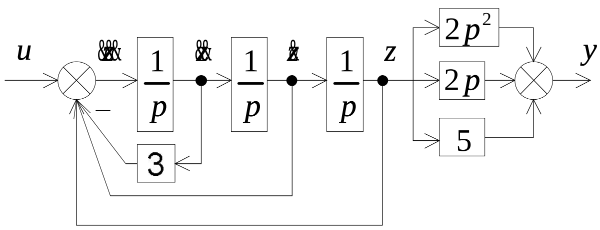


Рис. 2.3.

Т.к. в сигнал z, проходя через звено $2p^2$ становится равным $2\ddot{z}$, а сигнал $\ddot{z}$ уже присутствует в системе, можно упростить структурную схему, перенеся сигналы от производных по z, на выход системы, оставив только коэффициенты. На рис. 2.4 нарисована структурная схема после преобразования:

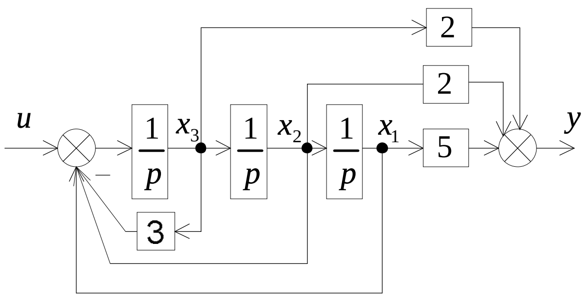


Рис. 2.4.

Обозначив выход каждого интегратора как переменную состояния $x_1 = z$, $x_2 = \dot{z}$, $x_3 = \ddot{z}$, перейдем к модели в переменных состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - x_2 - 3x_3 + u, \\ y = 5x_1 + 2x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

В векторно-матричной форме объект имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Пример 2.3.2. Вторая каноническая форма

Записать модель в переменных состояния, соответствующую второму каноническому описанию, определить матрицы A, B, C и изобразить структурную схему системы:

$$\dddot{y} + 3\ddot{y} + \dot{y} + y = 8\ddot{u} + 2\dot{u} + 5u \ .$$

Запишем дифференциальное уравнение в операторной форме:

$$p^3 y + 3p^2 y + py + y = 8p^2 u + 2pu + 5u \ .$$

Передаточная функция этого выражения будет иметь вид:

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{8p^2 + 2p + 5}{p^3 + 3p^2 + p + 1} \ .$$

Представим передаточную функцию в виде произведения двух передаточных функций, обозначив сигнал, проходящий между ними, как z_1:

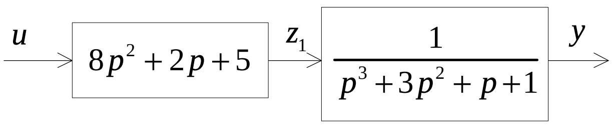


Рис. 2.5.

Запишем операторные уравнения для каждого звена системы через z_1:

$$\begin{cases} z_1 = (8p^2 + 2p + 5)u, \\ z_1 = (p^3 + 3p^2 + p + 1)y. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} z_1 = 8\ddot{u} + 2\dot{u} + 5u, \\ z_1 = \dddot{y} + 3\ddot{y} + \dot{y} + y. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы выразим старшую производную по y:

$$\dddot{y} = z_1 - 3\ddot{y} - \dot{y} - y$$

Согласно полученному выражению нарисуем цепочку из трех интеграторов переменной y:

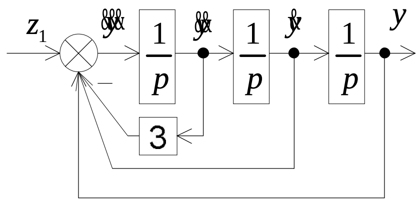


Рис. 2.6.

Из уравнения $z_1 = 8\ddot{u} + 2\dot{u} + 5u$ сформируем выходную переменную z_1, как сумму переменной u и ее производных и добавим к предыдущей схеме:

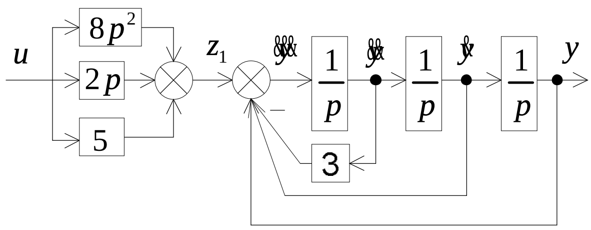


Рис. 2.7.

Упростим структурную схему. Перенесем сигналы от производных по u, оставив только коэффициенты. На рис. 2.8 нарисована структурная схема после преобразования:

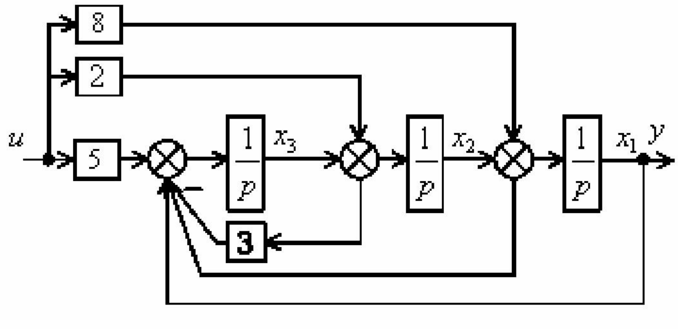


Рис. 2.8.

Здесь выход каждого интегратора обозначен как переменная состояния. Поэтому запишем уравнения:

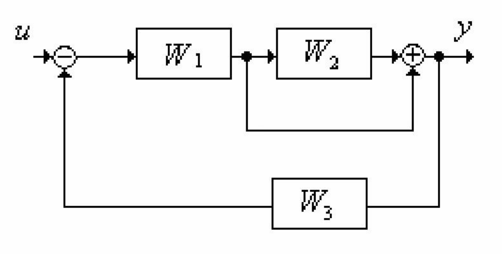
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 8u, \\ \dot{x}_2 = x_3 + 2u, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - x_2 - 3x_3 + 5u, \\ y = x_1. \end{cases}$$

Матрицы объекта имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \text{ B=} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \text{ C=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

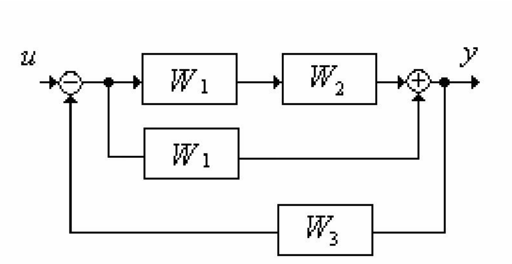
Пример 2.3.3. Структурные преобразования

Записать передаточную функцию системы, структурная схема которой имеет вид:

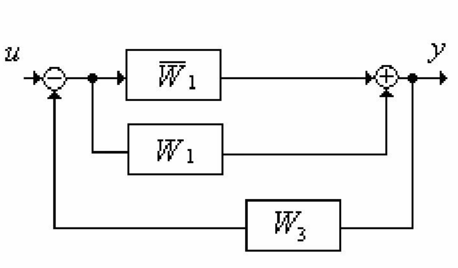


Решение:

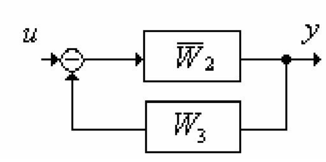
1. Перенос узла через звено:



2. Последовательно соединенные звенья: $\overline{W}_1 = W_1 W_2$

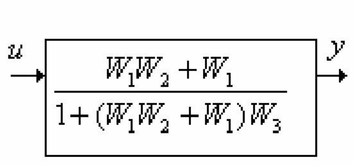


3. Параллельно соединенные звенья: $\overline{W}_2 = \overline{W}_1 + W_1 = W_1 W_2 + W_1$



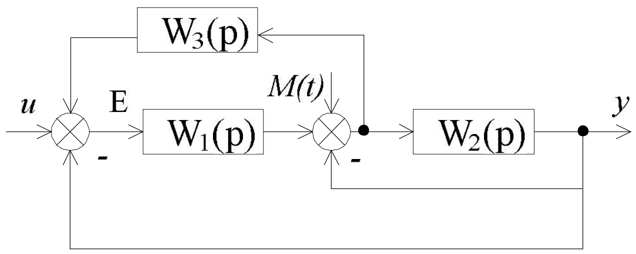
4. Обратная связь: $\overline{W}_{рез} = \dfrac{\overline{W}_2}{1+\overline{W}_2 W_3} = \dfrac{\overline{W}_2}{1+\overline{W}_2 W_3} = \dfrac{W_1 W_2 + W_1}{1+(W_1 W_2 + W_1)W_3}$

Ответ:



Пример 2.3.4. Структурные преобразования при нулевом входном сигнале

По структурной схеме системы определить передаточную функцию $W_u(p)=y(p)/M(p)$ при u=0:



Решение:

Искомая передаточная функция будет иметь вид:

$$W(p) = \frac{y}{M}.$$

Обозначим сигнал после сумматора, через z, а сигнал рассогласования, как E

Опишем все сигналы в системе в виде уравнений

$$E = -W_3 * z - y$$

$$z = M - y + W_1 * E$$

$$y = W_2 * z$$

Подставив последовательно значения сигналов, найдем результирующую передаточную функцию.

$$z = M - y + W_1 * (-W_3 * z - y) \qquad z = \frac{M - y(1+W_1)}{1+W_1 W_3}$$

$$y = W_2 * \frac{M - y(1+W_1)}{1+W_1 W_3}$$

$$W(p) = \frac{y}{M} = y = \frac{W_2}{W_1 W_3 + W_1 W_2 + W_2 + 1}$$

2.4. Задачи

Задача 2.4.1

Записать модель в переменных состояния, соответствующую первому каноническому описанию, изобразить структурную схему системы, определить матрицы А, В, С.

а) $\dddot{y} + 3\ddot{y} + \dot{y} + y = \ddot{u} + 2\dot{u} + 5u$;

б) $\dddot{y} + 7\ddot{y} + 5\dot{y} = 3\dot{u} + 5u$;

в) $0.5\dddot{y} + 0.4\ddot{y} + \dot{y} + 2y = 10\ddot{u} + 3\dot{u} + u$;

г) $2\dddot{y} + 5\ddot{y} + 8\dot{y} + 0.2y = 0.3\dot{u} + 8u$;

д) $13\dddot{y} + \ddot{y} + 0.25\dot{y} + 4y = \ddot{u} + 9\dot{u} + 3u$;

е) $2\dddot{y} + 7\ddot{y} + 12\dot{y} + 6y = 3\ddot{u} + \dot{u} + 10u$

ж) $4\dddot{y} + 3\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 8\ddot{u} + 7\dot{u} + 6u$;

з) $10\dddot{y} + 6\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 12\dot{u} + 9u$;

и) $\dddot{y} + 2\ddot{y} + 18\dot{y} + 5y = 7\ddot{u} + 11\dot{u} + 2u$;

к) $3\dddot{y} + 5\ddot{y} + 15\dot{y} + 9y = 4\ddot{u} + 6\dot{u} + u$;

Задача 2.4.2

Записать модель в переменных состояния, соответствующую второму каноническому описанию, изобразить структурную схему системы, определить матрицы А, В, С.

а) $\dddot{y} + 2\ddot{y} + \dot{y} = 2\ddot{u} + 3\dot{u} + u$;

б) $\dddot{y} + \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 3\dot{u} + 3u$;

в) $5\dddot{y} + 6\ddot{y} + 8\dot{y} + 9y = 4\ddot{u} + \dot{u} + 7u$;

г) $2\ddot{y} + 0.5\dot{y} + y = 6\dot{u} - 8u$;

д) $0.5\dddot{y} + 3\ddot{y} + 6\dot{y} = 7\dot{u} + u$;

е) $4\dddot{y} + 3\ddot{y} + 8\dot{y} + 3y = 4\dot{u} + 3u$

ж) $4\dddot{y} + 0.5\ddot{y} + \dot{y} = 8\ddot{u} + 3\dot{u} + 0.1u$;

з) $10\dddot{y} + 6\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 3\ddot{u} + 12\dot{u} + 0.9u$;

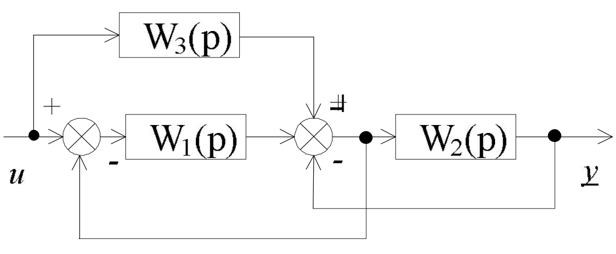
и) $0.5\dddot{y} + 2\ddot{y} + 0.3\dot{y} + 18y = 3\ddot{u} + 8\dot{u} + 10u$;

к) $\dddot{y} + 7\ddot{y} + 3\dot{y} + 0.15y = \ddot{u} + 9\dot{u} + 6u$;

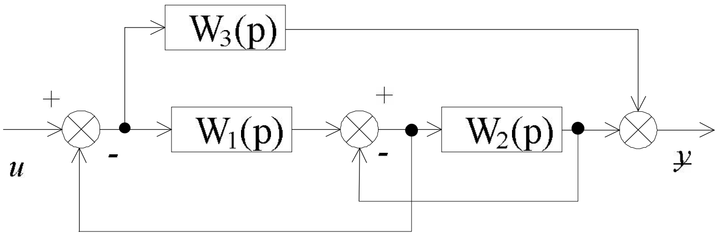
Задача 2.4.3

Записать передаточную функцию системы, структурная схема которой имеет вид:

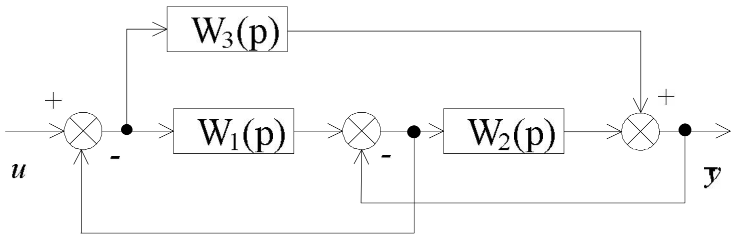
а)



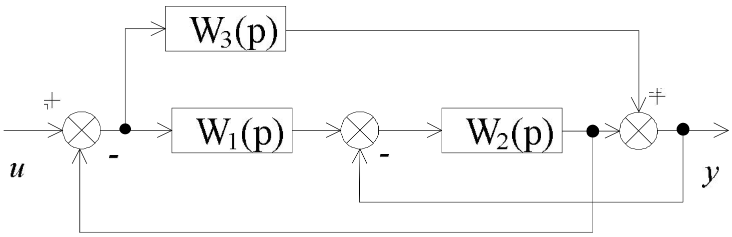
б)



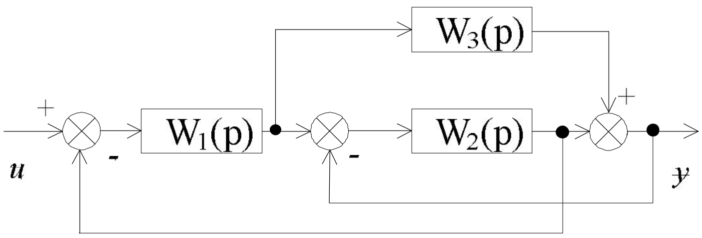
в)


W3(p)
W1(p)
W2(p)
u
y

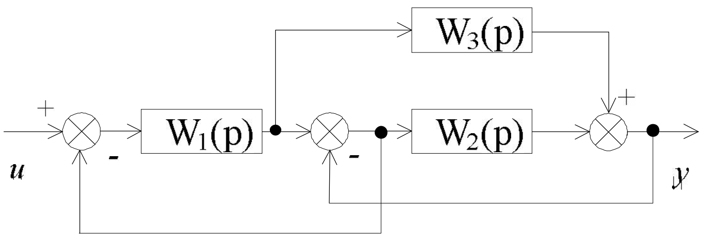
г)


W3(p)
W1(p)
W2(p)
u
y

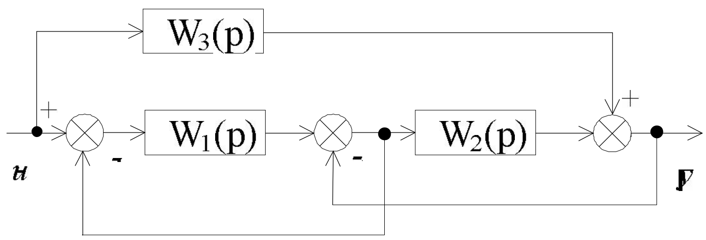
д)


W3(p)
W1(p)
W2(p)
u
y

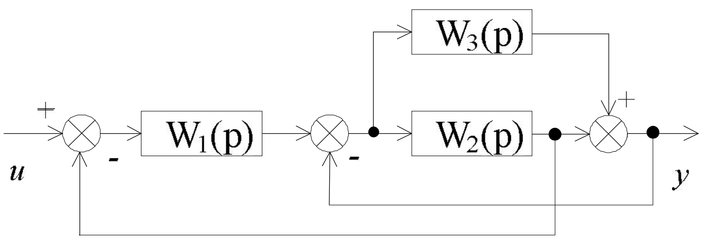
е)


W3(p)
W1(p)
W2(p)
u
y

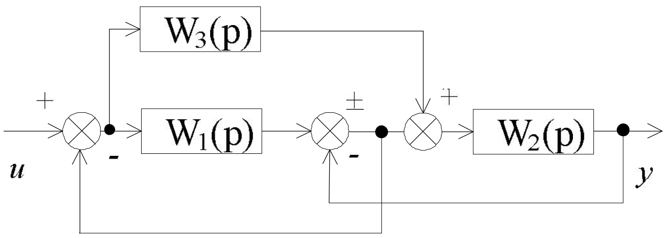
ж)


W3(p)
W1(p)
W2(p)

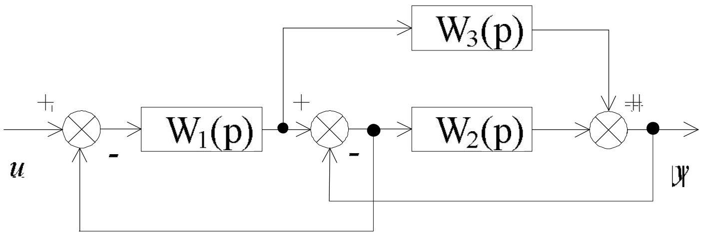
з)


W3(p)
W1(p)
W2(p)
u
y

и)

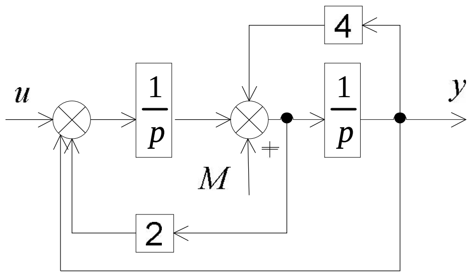


к)

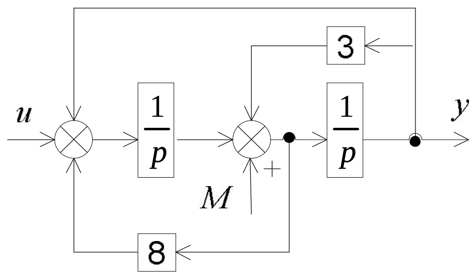


Задача 2.4.4

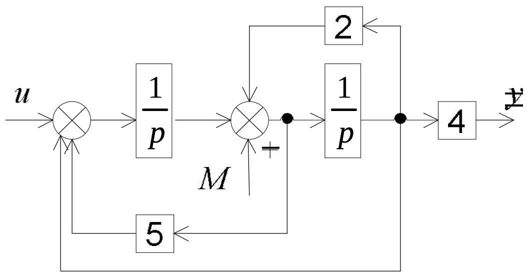
По структурной схеме системы определить передаточную функцию $W(p)=\dfrac{y(p)}{M(p)}$ при $u=0$.



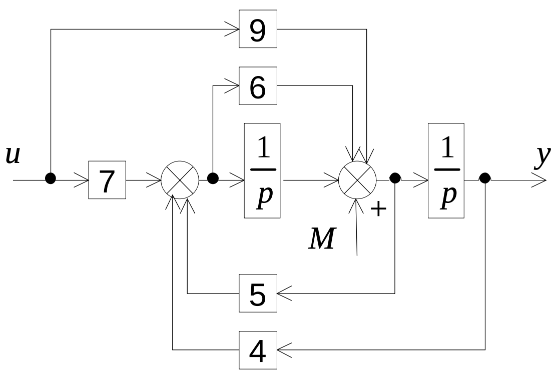
а)



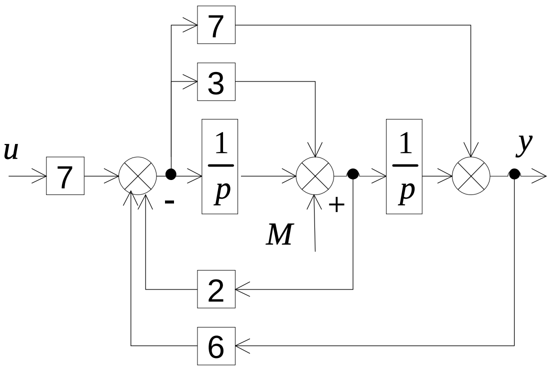
б)



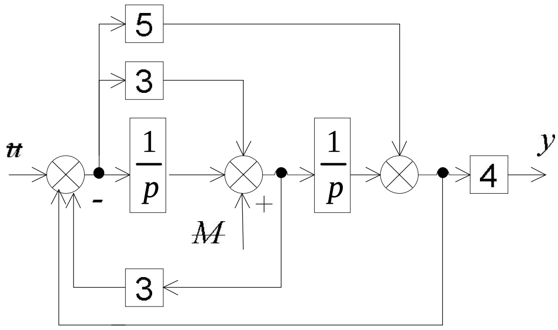
в)



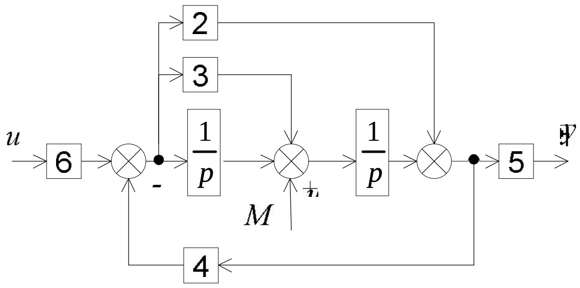
г)



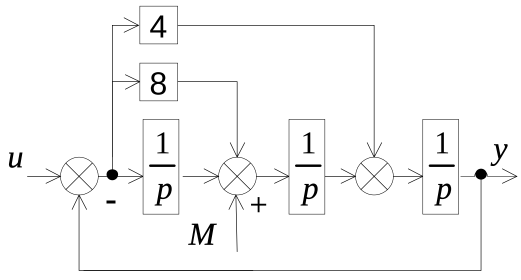
д)



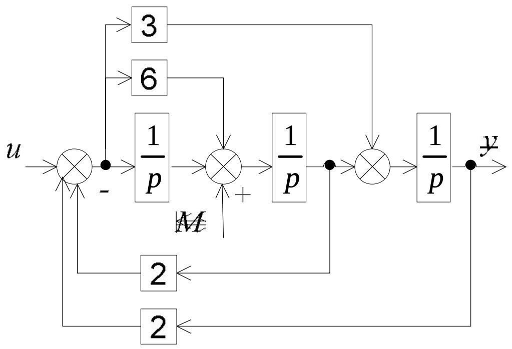
е)



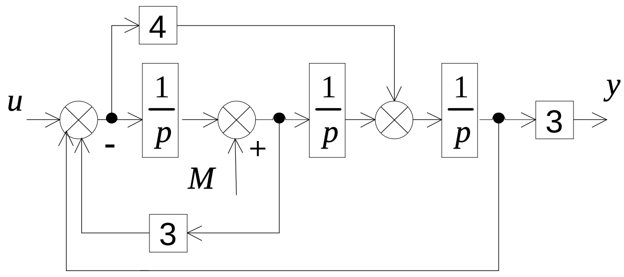
ж)



з)



и)



к)

Практическое занятие № 3

ОШИБКИ РЕГУЛИРОВАНИЯ

3.1. Цель работы

Целью работы является изучение методов вычисления ошибок регулирования.

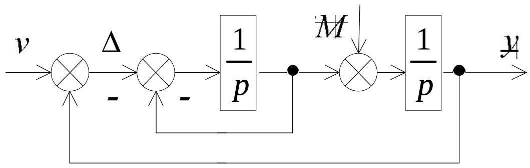
3.2. Теоретическая часть

Статические и динамические ошибки регулирования служат для оценки точности выполнения системой заданных программ управления.

3.3. Примеры и решения

Пример 3.1. Определение статической и скоростной ошибки

Определить относительную статическую ошибку Δ и скоростную ошибку Δ^0 при $v=2t$ в системе со следующей структурной схемой:



Решение:

Запишем выражение для полной статической ошибки:

$$\Delta = v - y = v - \frac{1}{p}\left[M + \frac{1}{p+1}\Delta\right],$$

и после преобразований получим:

$$\Delta = \frac{p(p+1)}{p^2+p+1}v - \frac{p}{p^2+p+1}M .$$

В статике, когда $p=0$, вычисляем статическую ошибку в системе. Она равна нулю.

Для того чтобы найти скоростную ошибку, запишем выражение Δ для случая линейно нарастающего входного сигнала, представив входной сигнал, как линейное воздействие $v = 2t = \frac{1}{p}\cdot 2$, тем самым получим:

$$\Delta = \frac{p+1}{p^2+p+1}\cdot 2 - \frac{p}{p^2+p+1}M$$

Тогда в статике, когда $p=0$ получим скоростную ошибку:

$$\Delta^0 = \frac{p+1}{p^2+p+1}\cdot 2 = 2 .$$

Пример 3.2. Определение коэффициента усиления при заданной статической ошибке по входу

Для структурной схемы, представленной на рис. 3.1, определить область значений коэффициента усиления *K*, так чтобы статическая ошибка в системе Δ_*^0 не превышала 3% от *v*, при:

$$W_1(p)=\frac{0.5K}{p+1}; \qquad W_2(p)=\frac{2}{4p+1}.$$

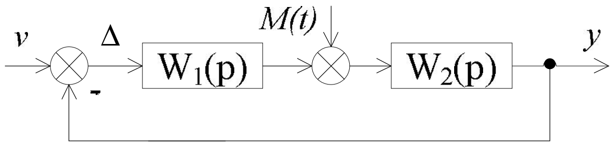


Рис. 3.1. Структурная схема системы к задачам 3.4.2, 3.4.3, 3.4.4.

Запишем ошибку в системе, обозначив ее через Δ:

$$\Delta = v - u = v - W_2(p)[M + W_1(p)\Delta],$$

откуда

$$\Delta = \frac{1}{1+W_1(p)W_2(p)}v - \frac{W_2(p)}{1+W_1(p)W_2(p)}M,$$

подставим значения передаточных функций, получим:

$$\Delta = \frac{4p^2+5p+1}{4p^2+5p+1+K}v - \frac{2(p+1)}{4p^2+5p+1+K}M.$$

В статике, при $p=0$, решим неравенство с передаточной функцией по *v:*

$$\frac{1}{(1+K)} \le 0.03.$$

Ответ: $K \ge 32.3$

Пример 3.3. Определение коэффициента усиления при заданной статической ошибке по возмущению

Для структурной схемы, представленной на рис. 3.1, определить область значений коэффициента усиления *K*, так чтобы статическая ошибка в системе по возмущению Δ_*^0 не превышала 2%, при:

$$W_1(p)=\frac{K}{6p+1}; \qquad W_2(p)=\frac{1}{4p+1}.$$

Ошибка в системе равняется

$$\Delta = \frac{1}{1+W_1(p)W_2(p)}v - \frac{W_2(p)}{1+W_1(p)W_2(p)}M.$$

Подставив значения передаточных функций, получим:

$$\Delta = \frac{24p^2+10p+1}{24p^2+10p+1+K}v - \frac{24p^2+10p+1}{96p^3+64p^2+14p+1+4Kp+K}M.$$

В статике, при p=0, решим неравенство с передаточной функцией по ошибке *M:*

$$\frac{1}{(1+K)} \le 0{,}02.$$

Ответ: $K \ge 49$.

Пример 3.4. Определение полной статической ошибки

Определить полную статическую ошибку в системе, структурная схема которой изображена на рис. 3.1.

$$W_1(p)=\frac{0.25p+1}{0.1p+1}; \qquad W_2(p)=\frac{5}{(0.2p^2+0.1p+1)p}.$$

Ошибка в системе определяется выражением:

$$\Delta=\frac{1}{1+W_1(p)W_2(p)}v-\frac{W_2(p)}{1+W_1(p)W_2(p)}M .$$

Подставив значения передаточных функций, получим:

$$\Delta=\frac{p(0.1p+1)(0.2p^2+0.1p+1)}{p(0.1p+1)(0.2p^2+0.1p+1)+5(0.25p+1)}v-\frac{5(0.1p+1)}{p(0.1p+1)(0.2p^2+0.1p+1)+5(0.25p+1)}M .$$

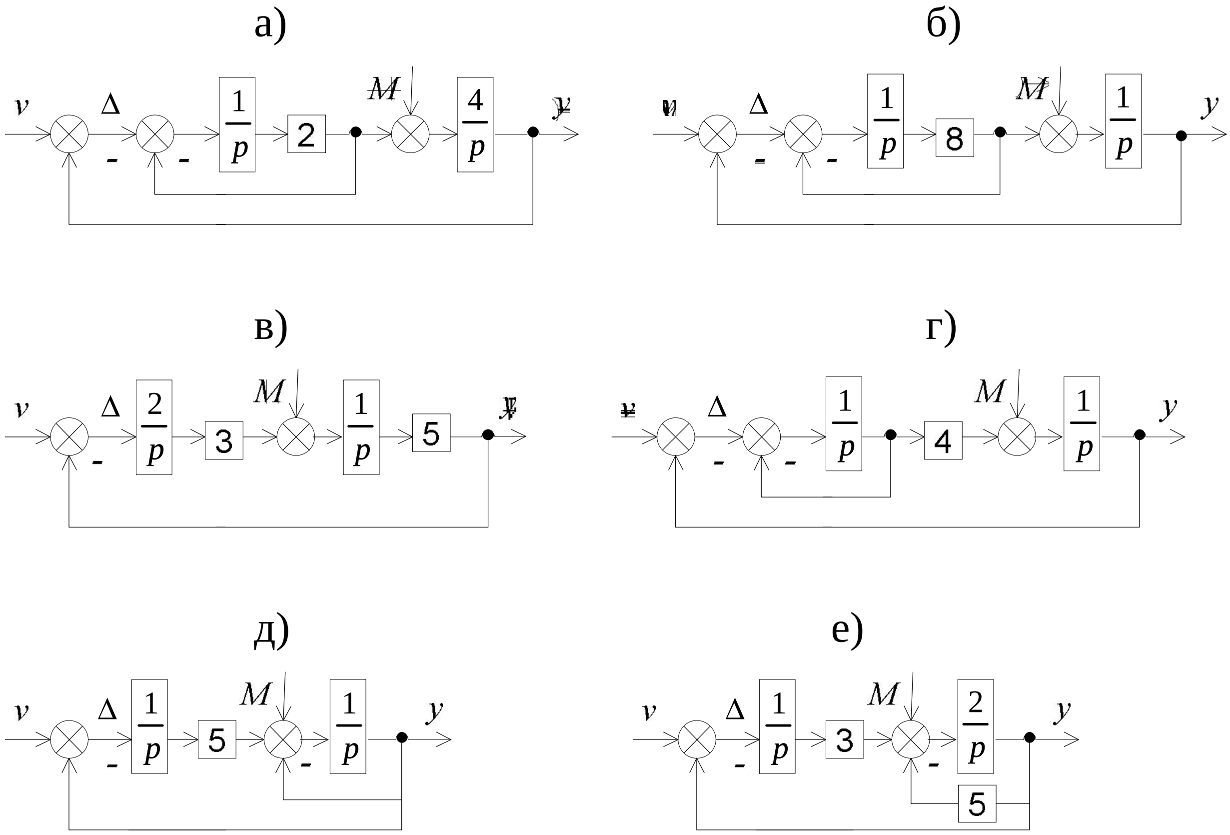
Подставив $p=0$, вычислим полную ошибку в системе.

Ответ: Полная статическая ошибка равна: Δ=1.

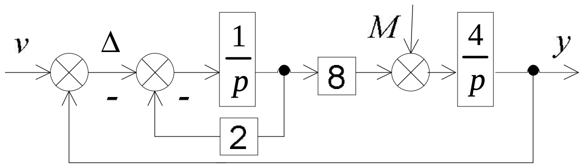
3.4. Задачи

Задача 3.4.1

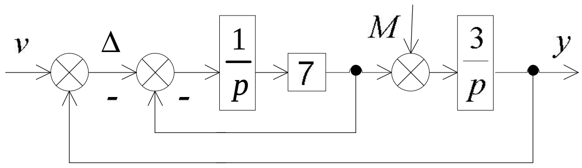
Определить относительную статическую ошибку Δ и скоростную ошибку Δ^0 при *v=5t* в системе со следующей структурной схемой:



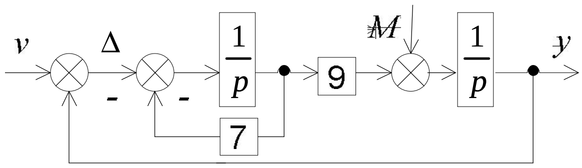
ж)



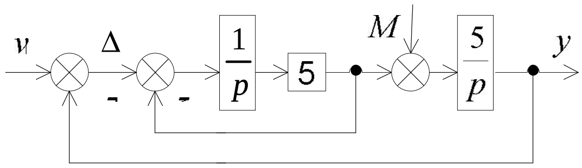
з)



и)



к)



Задача 3.4.2.

Для структурной схемы, представленной на рис. 3.1, Определить полную статическую ошибку в системе Δ, при:

а) $W_1(p)=\dfrac{25}{(2p+1)p}$; $W_2(p)=\dfrac{1}{3p^2+4p+1}$.

б) $W_1(p)=\dfrac{0.5K}{p+4}$; $W_2(p)=\dfrac{3}{p+1}$.

в) $W_1(p)=\dfrac{K(p+1)}{p+3}$; $W_2(p)=\dfrac{0.1p+1}{p^2+2p+1}$.

г) $W_1(p)=\dfrac{K}{10p+1}$; $W_2(p)=\dfrac{8}{p^2+2p+1}$.

д) $W_1(p)=\dfrac{K}{0.3p+1}$; $W_2(p)=\dfrac{1}{5p^2+0.2p+1}$.

е) $W_1(p)=\dfrac{K}{p+0.1}$; $W_2(p)=\dfrac{6}{6p^2+7p+1}$.

ж) $W_1(p)=\dfrac{K(2p+1)}{0.2p^2+3p+1}$; $W_2(p)=\dfrac{9}{p+5}$.

з) $W_1(p)=\dfrac{10K}{4p^2+p+1}$; $W_2(p)=\dfrac{4}{5p+1}$.

и) $W_1(p)=\dfrac{K}{3p+1}$; $W_2(p)=\dfrac{11p+6}{3p^2+2p+1}$.

к) $W_1(p)=\dfrac{K(p+1)}{6p+1}$; $W_2(p)=\dfrac{2}{0.8p^2+9p+1}$.

Задача 3.4.3.

Для структурной схемы, представленной на рис. 3.1, определить область значений коэффициента усиления *K*, так чтобы статическая ошибка в системе по возмущению Δ_*^0 не превышала 5%, при:

а) $W_1(p)=\dfrac{K}{0.5p+1}$; $W_2(p)=\dfrac{1}{2p^2+0.7p+1}$.

б) $W_1(p)=\dfrac{K(p+1)}{4p+1}$; $W_2(p)=\dfrac{0.2p+1}{0.04p^2+0.5p+1}$.

в) $W_1(p)=\dfrac{K}{10p+1}$; $W_2(p)=\dfrac{2}{(0.5p^2+0.3p+1)p}$.

г) $W_1(p)=\dfrac{K}{3p+1}$; $W_2(p)=\dfrac{1}{p^2+0.7p+1}$.

д) $W_1(p)=\dfrac{K}{0.5p+1}$; $W_2(p)=\dfrac{2}{0.1p^2+0.5p+1}$.

е) $W_1(p)=\dfrac{K}{p+1}$; $W_2(p)=\dfrac{1}{(2p+1)p}$.

ж) $W_1(p)=\dfrac{K}{4p+1}$; $W_2(p)=\dfrac{0.06}{2p^2+0.4p+1}$.

з) $W_1(p)=\dfrac{K(p+1)}{3p+1}$; $W_2(p)=\dfrac{0.1p+1}{0.02p^2+0.8p+1}$.

и) $W_1(p)=\dfrac{K}{10p+1}$; $W_2(p)=\dfrac{5}{(0.2p^2+0.5p+1)p}$.

к) $W_1(p)=\dfrac{K}{7p+1}$; $W_2(p)=\dfrac{1}{(3p+1)p}$.

Задача 3.4.4.

Определить полную статическую ошибку в системе, структурная схема которой изображена на рис. 3.1, при:

а) $W_1(p)=\dfrac{25}{(2p+1)p}$, $W_2(p)=\dfrac{1}{3p^2+4p+1}$;

б) $W_1(p)=\dfrac{0.25p+1}{0.1p+1}$, $W_2(p)=\dfrac{5}{(0.2p^2+0.1p+1)p}$;

в) $W_1(p)=\dfrac{4(0.2p+1)}{10p+1}$, $W_2(p)=\dfrac{0.1}{0.5p^2+0.4p+1}$;

г) $W_1(p)=\dfrac{8(3p^2+1)}{2p+1}$, $W_2(p)=\dfrac{9}{5p^2+0.3p+1}$;

д) $W_1(p)=\dfrac{4}{0.5p+1}$, $W_2(p)=\dfrac{2p+1}{0.3p+1}$;

е) $W_1(p)=\dfrac{4p+5}{p^3+2p^2+10p+1}$, $W_2(p)=\dfrac{1}{2p^2+1}$;

ж) $W_1(p)=\dfrac{6}{5p+1}$, $W_2(p)=\dfrac{0.7(p+1)}{0.2p^2+7p+1}$;

з) $W_1(p)=\dfrac{7(p+1)}{3p+1}$, $W_2(p)=\dfrac{0.1p+1}{0.02p^2+0.8p+1}$;

и) $W_1(p)=\dfrac{1}{0.1p+1}$, $W_2(p)=\dfrac{5p+1}{0.2p^2+0.1p+1}$;

к) $W_1(p)=\dfrac{5}{0.9p^2+0.5p+1}$, $W_2(p)=\dfrac{7p+1}{0.4p+1}$.

Практическое занятие № 4

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ САУ

4.1. Цель работы

Целью работы является изучение методов построения частотных характеристик САУ и их использования для проверки устойчивости.

4.2. Теоретическая часть

Для проверки устойчивости системы существуют критерии устойчивости. Выделяют алгебраические и частотные критерии устойчивости.

4.3. Примеры и решения

Пример 4.1. Частотные характеристики

Написать аналитические выражения и построить частотные характеристики следующего звена:

$$W(p)=\frac{4}{2p+1}.$$

Произведем замену $p=j\omega$. АФХ характеристика звена:

$$W(j\omega)=\frac{4}{2j\omega+1}.$$

Чтобы найти ВЧХ и МЧХ, умножим числитель и знаменатель выражения для АФХ на комплексно-сопряженное выражение для знаменателя и выделим вещественную и мнимую части:

$$W(j\omega)=\frac{4}{2j\omega+1}=\frac{4(2j\omega-1)}{(2j\omega+1)(2j\omega-1)}=\frac{4(2j\omega-1)}{(2j\omega)^2-1^2}=\frac{4}{4\omega^2+1}+j\frac{-8\omega}{4\omega^2+1}.$$

Вещественная частотная характеристика:

$$U(\omega)=\frac{4}{4\omega^2+1}.$$

Мнимая частотная характеристика

$$V(\omega)=-\frac{8\omega}{4\omega^2+1}.$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega)=\frac{\sqrt{64\omega^2+16}}{4\omega^2+1}=\frac{4\sqrt{4\omega^2+1}}{4\omega^2+1}=\frac{4}{\sqrt{4\omega^2+1}}.$$

График амплитудно-фазовой характеристики показан на рис. 4.1.

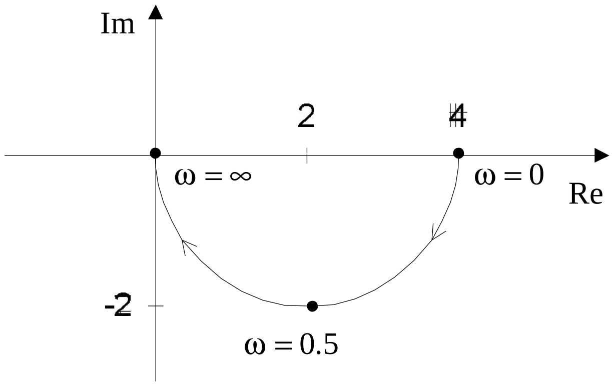


Рис. 4.1 Амплитудно-фазовая характеристика звена

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) задается выражением

$$L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg 4-20\lg\sqrt{4\omega^2+1}.$$

ЛАЧХ можно аппроксимировать двумя асимптотами – низкочастотной, проходящей параллельно оси частот на участке $2\omega<1$ $(\lg 2\omega<0)$ через точку $L=20\lg 4$, и высокочастотной, проходящей с наклоном -20 дБ/дек через точку $2\omega=1$, $L=20\lg 4$.

$$L(\omega)=\begin{cases}20\lg 4 & \textit{при}\ \ 2\omega\le 1\\ 20\lg 4-20\lg 2\omega & \textit{при}\ \ 2\omega\ge 1\end{cases}.$$

Наклон высокочастотной асимптоты равен -20 дБ/дек потому, что при увеличении частоты в 10 раз (что соответствует изменению логарифма частоты на единицу) логарифм амплитуды уменьшается на 20 дБ. На участке низкочастотной асимптоты пренебрегают вторым членом в выражении логарифмической амплитудно-частотной характеристики в виду его малости, а на участке высокочастотной асимптоты – единицей по сравнению с $4\omega^2$. Обе асимптоты сопрягаются в точке $2\omega=1$, поэтому частота $\omega=\frac{1}{2}$ (*рад/сек*) называется сопрягающей.

График логарифмической амплитудно-частотной характеристики показан на рис. 4.2.

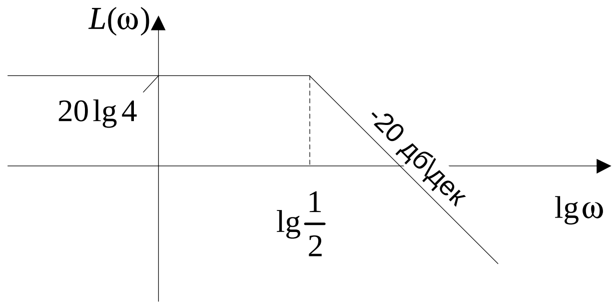


Рис. 4.2. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика

Фазово-частотная характеристика описывается выражением:

$$\varphi(\omega) = arctg\left[\frac{V(\omega)}{U(\omega)}\right] = -arctg 2\omega .$$

Логарифмическая фазовая характеристика, т.е. фазовая частотная характеристика, у которой частоты отложения в логарифмическом масштабе, имеет вид, изображенный на рис. 4.3. максимальный сдвиг по фазе при $\omega = \infty$ составляет -90°. На сопрягающей частоте $\omega = \frac{1}{2}$ сдвиг по фазе равен -45°.

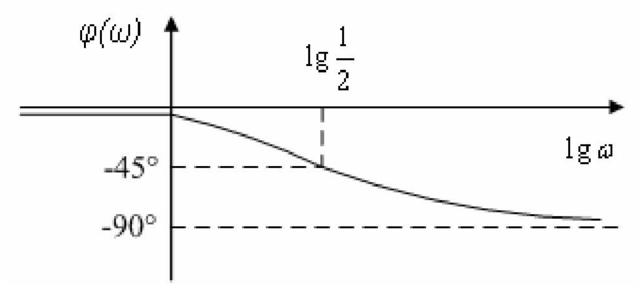


Рис. 4.3. Логарифмическая фазо-частотная характеристика

Пример 4.2. Критерий устойчивости Гурвица

Для структурной схемы, представленной на рис. 4.4 с помощью критерия Гурвица определить такое значение *T*, при котором система будет находиться на границе устойчивости, если:

$$W_1(p) = \frac{1}{Tp+1}, \qquad W_2(p) = \frac{2.5}{0.5p^2 + 0.2p + 1}.$$

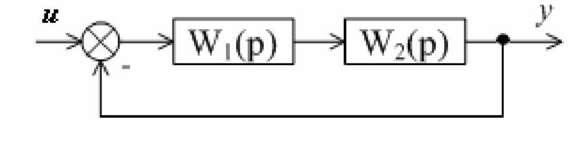


Рис 4.4. Структурная схема системы к задачам 4.4.2, 4.4.3

1. Определим результирующую передаточную функцию системы

$$W(p)=\frac{2.5}{(0.5p^2+0.2p+1)(Tp+1)+2.5}$$

2. Запишем характеристический полином системы:

$$A(p)=0.5Tp^3+(0.5+0.2T)p^2+(0.2+T)p+3.5.$$

3. Составим матрицу Гурвица, которая будет иметь вид:

$$H=\begin{bmatrix}0.5+0.2T & 3.5 & 0\\ 0.5T & 0.2+T & 0\\ 0 & 0.5+0.2T & 3.5\end{bmatrix}.$$

Для устойчивости системы необходимо, чтобы все определители матрицы Гурвица были положительны, т.е.:

$$\begin{cases}0.5+0.2T>0,\\ (0.5+0.2T)*(0.2+T)-3.5*0.5T>0.\end{cases}$$

Решив систему уравнений, найдем, что для устойчивости системы необходимо, чтобы $T>0{,}05$. Таким образом, система будет находиться на границе устойчивости при $T=0{,}05$.

Пример 4.3. Критерий устойчивости Михайлова

Для структурной схемы, представленной на рисунке 4.4 с помощью критерия Михайлова определить значение $d_{гр}$ для системы, где

$$W_1(p)=\frac{15}{2p+1},\qquad W_2(p)=\frac{2}{0.25p^2+dp+1}.$$

Решение:

1. Определим результирующую передаточную функцию системы

$$W(p)=\frac{30}{(2p+1)(0.25p^2+dp+1)+30}.$$

2. Выпишем характеристический полином

$$A(p)=0.5p^3+(2d+0.25)p^2+(2+d)p+31.$$

Заменим p на $j\omega$ и выделим вещественную и мнимую части:

$$A(j\omega)=-0.5j\omega^3-(2d+0.25)\omega^2+(2+d)j\omega+31,$$

$$A(j\omega)=j(2\omega+d\omega-0.5\omega^3)-(2d+0.25)\omega^2+31.$$

Необходимым и достаточным условием нахождения системы на границе устойчивости является равенство нулю мнимой и вещественной частей.

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(\omega_0) = 0, \\ \mathrm{Re}(\omega_0) = 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (-0.5\omega_0^{\,2} + 2 + d)\omega_0 = 0, \\ -2d\omega_0^{\,2} - 0.25\omega_0^{\,2} + 31 = 0. \end{cases}$$

3. Решим систему уравнений относительно двух неизвестных ω_0 и d, определим такое значение d, при котором система будет находиться на границе устойчивости.

Решив систему уравнений, получим:

$$d = -0.88,\ d = 1.88.$$

Подставив $d = -0.88$ в характеристический полином, получим отрицательные коэффициенты полинома, следовательно, система с таким значением d не может находиться на границе устойчивости.

Ответ: $d = 1.88$.

Пример 4.4. Критерий устойчивости Найквиста

Для структурной схемы, представленной на рисунке 4.2 с помощью критерия Найквиста определить область допустимых значений коэффициента k для системы, где

$$W_1(p) = \frac{k}{3p+1}, \qquad W_2(p) = \frac{10}{2p+1}, \qquad W_3(p) = \frac{1}{0.4p+1}.$$

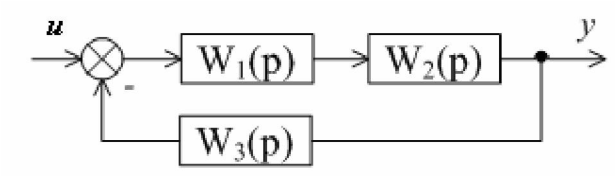


Рис. 4.5. Структурная схема системы к задачам 4.4.4, 4.4.5

Решение:

Разомкнем систему и найдем передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W_{раз}(p) = \frac{10k}{(3p+1)(2p+1)(0.4p+1)}.$$

Заменим p на $j\omega$:

$$W_{раз}(j\omega) = \frac{10k}{2.4(j\omega)^3 + 8(j\omega)^2 + 5.4(j\omega) + 1},$$

$$W_{раз}(j\omega)=\frac{10k}{-2.4j\omega^3-8\omega^2+5.4j\omega+1},$$

$$W_{раз}(j\omega)=\frac{10k}{j\omega(5.4-2.4\omega^2)+(1-8\omega^2)}.$$

Умножим выражение на сопряженные величины и выделим мнимую и вещественную части:

$$W_{раз}(j\omega)=\frac{10k(j\omega(5.4-2.4\omega^2)-(1-8\omega^2))}{-\omega^2(5.4-2.4\omega^2)^2-(1-8\omega^2)^2},$$

$$W_{раз}(j\omega)=j\frac{10k(5.4\omega-2.4\omega^3)}{-5.76\omega^6-38.08\omega^4-13.16\omega^2-1}+\frac{10k(8\omega^2-1)}{-5.76\omega^6-38.08\omega^4-13.16\omega^2-1}.$$

Необходимым и достаточным условием чтобы система была на границе устойчивости, является прохождение годографа через точку с координатами $\{-1, j0\}$:

$$\begin{cases}\dfrac{10k(8\omega^2-1)}{-5.76\omega^6-38.08\omega^4-13.16\omega^2-1}=-1,\\ \dfrac{10k(5.4\omega-2.4\omega^3)}{-5.76\omega^6-38.08\omega^4-13.16\omega^2-1}=0.\end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим: $k=3.2$.

Пример 4.5. Метод D-разбиения

Для структурной схемы, представленной на рис. 4.5 методом D-разбиения определить область допустимых значений коэффициента k для системы, где

$$W_1(p)=\frac{k}{0.5p+1},\qquad W_2(p)=\frac{4}{0.2p+1},\qquad W_3(p)=\frac{1}{0.5p+1}.$$

Решение:

Определим передаточную функцию замкнутой системы:

$$W(p)=\frac{4k(0.5p+1)}{0.05p^3+0.45p^2+1.2p+1+4k}$$

и запишем ее характеристическое уравнение

$$A(p)=0.05p^3+0.45p^2+1.2p+1+4k=0.$$

Здесь k – это параметр, по которому строится область устойчивости. Выразим его из уравнения

$$4k=-0.05p^3-0.45p^2-1.2p-1,$$

или $$k=-0.0125p^3-0.1125p^2-0.3p-0.25,$$

и обозначим k через D, заменяя p на $j\omega$, получим уравнения для кривой D-разбиения:

$$D(jw) = -0.0125 j\omega^3 - 0.1125\omega^2 - 0.3 j\omega - 0.25.$$

Выделим мнимую и вещественную части

$$D(jw) = (0.1125\omega^2 - 0.25) + j(0.0125\omega^3 - 0.3\omega).$$

Вычислим значения вещественной и мнимой части, меняя частоту от 0 до ∞, и занесем эти данные в таблицу 2.

Таблица 2

ω	0	1	2	5	10	…	∞
Re	- 0,25	- 0,1375	0,2	2,5	11	…	∞
Im	0	- 0,2875	- 0,5	0	9.5	…	∞

По полученной таблице 2 строим годограф:

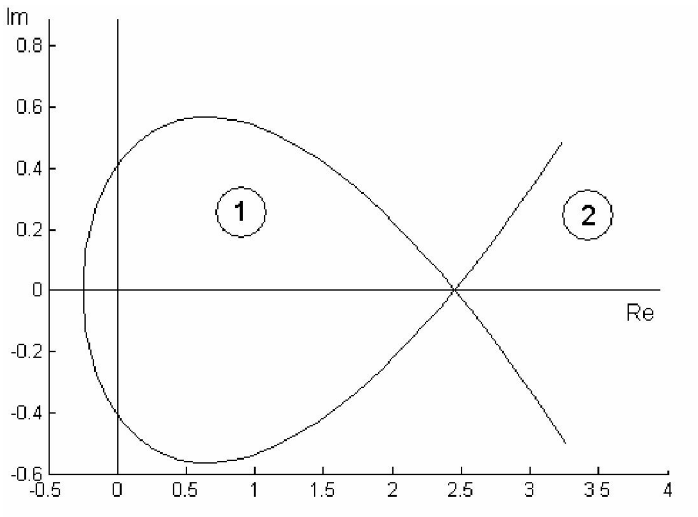


Рис. 4.6. Кривая D-разбиения для исследуемой системы

Из рис.4.6 видно, что кривая делит плоскость на две подобласти. Возьмем одно вещественное значение в первой подобласти, например, D=1, и оценим устойчивость. Исследуя характеристический полином $A(p) = 0.05p^3 + 0.45p^2 + 1.2p + 1 + 4*1 = 0$ по критерию Гурвица, найдем, что все определители положительны. В этой области система устойчива и, следовательно, в другой неустойчива.

Ответ: система устойчива в области $(-0.25 < k < \infty)$.

4.4. Задачи

Задача 4.4.1. Найти и построить частотные характеристики следующего звена:

а) $W(p)=\frac{10}{p}$; д) $W(p)=\frac{2}{8p^2+p+1}$; и) $W(p)=8(5p+1)$;

б) $W(p)=6p$; е) $W(p)=\frac{6}{5p^2+1}$; к) $W(p)=\frac{6(2p+1)}{p}$;

в) $W(p)=5$; ж) $W(p)=\frac{3}{p(0.1p+1)}$;

г) $W(p)=\frac{8p}{2p+1}$; з) $W(p)=\frac{4}{p^2+4p+1}$.

Задача 4.4.2. Для структурной схемы, представленной на рис. 4.4 с помощью критерия Гурвица определить такое значение T, при котором система будет находиться на границе устойчивости, если:

а) $W_1(p)=\frac{1}{Tp+2}$, $W_2(p)=\frac{1}{p^2+3p+1}$;

б) $W_1(p)=\frac{1}{Tp+4}$, $W_2(p)=\frac{5}{0.3p^2+0.1p+1}$;

в) $W_1(p)=\frac{0.4(2p+1)}{2Tp+1}$, $W_2(p)=\frac{0.5}{5p^2+9p+1}$;

г) $W_1(p)=\frac{3(5p^2+1)}{4p+1}$, $W_2(p)=\frac{0.1}{0.1p^2+0.3Tp+1}$;

д) $W_1(p)=\frac{2}{p(3p+1)}$, $W_2(p)=\frac{6p+1}{0.2Tp+1}$;

е) $W_1(p)=\frac{6p+5}{10p+1}$, $W_2(p)=\frac{1}{2Tp^2+1}$;

ж) $W_1(p)=\frac{10}{3Tp+1}$, $W_2(p)=\frac{p+1}{p^2+3p+1}$;

з) $W_1(p)=\frac{0.7(p+1)}{0.2Tp+1}$, $W_2(p)=\frac{p+1}{0.1p^2+0.8p+1}$;

и) $W_1(p)=\frac{1}{7p+1}$, $W_2(p)=\frac{Tp+1}{p^2+0.4p+1}$;

к) $W_1(p)=\frac{4}{0.2p^2+0.3p+1}$, $W_2(p)=\frac{0.8Tp+1}{0.4p+1}$.

Задача 4.4.3. Для структурной схемы, представленной на рис. 4.4 с помощью критерия Михайлова определить значение $d_{гр}$ для системы, где а) $W_1(p)=\dfrac{1}{p+2}$, $W_2(p)=\dfrac{1}{p^2+dp+1}$;

б) $W_1(p)=\dfrac{p+8}{p+1}$, $W_2(p)=\dfrac{p+9}{p^2+dp+1}$;

в) $W_1(p)=\dfrac{p+1}{5p+1}$, $W_2(p)=\dfrac{2}{4dp^2+3p+1}$;

г) $W_1(p)=\dfrac{2(p+1)}{6p+1}$, $W_2(p)=\dfrac{0.1}{dp^2+2p+1}$;

д) $W_1(p)=\dfrac{15}{p(3p+1)}$, $W_2(p)=\dfrac{p+1}{2dp+1}$;

е) $W_1(p)=\dfrac{6p+5}{10p+1}$, $W_2(p)=\dfrac{p+2}{2dp^2+1}$;

ж) $W_1(p)=\dfrac{10}{3p+1}$, $W_2(p)=\dfrac{p+1}{p^2+3dp+1}$;

з) $W_1(p)=\dfrac{3(p+1)}{8p+1}$, $W_2(p)=\dfrac{p+2}{3p^2+dp+1}$;

и) $W_1(p)=\dfrac{1}{9p+1}$, $W_2(p)=\dfrac{5p+1}{p^2+0.4dp+1}$;

к) $W_1(p)=\dfrac{1}{0.1p^2+0.2p+d}$, $W_2(p)=\dfrac{2p+1}{6p+1}$.

Задача 4.4.4. Для структурной схемы, представленной на рис. 4.5 с помощью критерия Найквиста определить область допустимых значений коэффициента *k* для системы, где

а) $W_1(p)=\dfrac{k}{p+1}$, $W_2(p)=\dfrac{2}{2p+1}$, $W_3(p)=\dfrac{1}{3p+1}$;

б) $W_1(p)=\dfrac{2}{5p+1}$, $W_2(p)=\dfrac{k}{4p+1}$, $W_3(p)=\dfrac{0.5}{p+1}$;

в) $W_1(p)=\dfrac{9}{7p+1}$, $W_2(p)=\dfrac{1}{p}$, $W_3(p)=\dfrac{k}{0.1p+1}$;

г) $W_1(p)=\dfrac{1}{p+5}$, $W_2(p)=\dfrac{k}{6p+1}$, $W_3(p)=\dfrac{2}{p+1}$;

д) $W_1(p)=\dfrac{k}{5p+1}$, $W_2(p)=\dfrac{2}{3p+1}$, $W_3(p)=\dfrac{1}{0.1p+1}$;

е) $W_1(p)=\dfrac{3}{2p+1}$, $W_2(p)=\dfrac{1}{p+4}$, $W_3(p)=\dfrac{k}{0.2p+1}$;

ж) $W_1(p) = \frac{k}{0.4p+1}$, $W_2(p) = \frac{4}{p+5}$, $W_3(p) = \frac{1}{7p+1}$;

з) $W_1(p) = \frac{1}{0.6p+1}$, $W_2(p) = \frac{k}{p+2}$, $W_3(p) = \frac{10}{9p+1}$;

и) $W_1(p) = \frac{100}{p+2}$, $W_2(p) = \frac{1}{0.3p+3}$, $W_3(p) = \frac{k}{5p+1}$;

к) $W_1(p) = \frac{10}{6p+6}$, $W_2(p) = \frac{1}{p}$, $W_3(p) = \frac{k}{0.3p+1}$.

Задача 4.4.5. Для структурной схемы, представленной на рис. 4.5 с помощью критерия Найквиста определить область допустимых значений коэффициента k для системы, где

а) $W_1(p) = \frac{k}{p+1}$, $W_2(p) = \frac{2}{0.5p+1}$, $W_3(p) = 8$;

б) $W_1(p) = \frac{1}{2p+1}$, $W_2(p) = \frac{k}{0.1p^2+3p+1}$, $W_3(p) = 5$;

в) $W_1(p) = \frac{3}{5p+1}$, $W_2(p) = \frac{1}{p}$, $W_3(p) = \frac{k}{4p+1}$;

г) $W_1(p) = \frac{1}{p+3}$, $W_2(p) = \frac{2k}{6p+1}$, $W_3(p) = \frac{1}{p+1}$;

д) $W_1(p) = \frac{k}{4p+1}$, $W_2(p) = \frac{0.1}{2p+1}$, $W_3(p) = \frac{1}{0.5p+1}$;

е) $W_1(p) = \frac{10}{5p+1}$, $W_2(p) = \frac{0.1}{p+5}$, $W_3(p) = \frac{k}{0.3p+1}$;

ж) $W_1(p) = \frac{k}{10p+1}$, $W_2(p) = \frac{3}{p+5}$, $W_3(p) = \frac{1}{6p+1}$;

з) $W_1(p) = \frac{1}{0.9p+1}$, $W_2(p) = \frac{k}{p+20}$, $W_3(p) = \frac{10}{4p+1}$;

и) $W_1(p) = \frac{8}{p+2}$, $W_2(p) = \frac{1}{0.3p+3}$, $W_3(p) = \frac{k}{2p+1}$;

к) $W_1(p) = \frac{1}{6p+6}$, $W_2(p) = \frac{6}{p}$, $W_3(p) = \frac{k}{10p+1}$.

Список литературы

1.Востриков А.С. Теория автоматического регулирования: Учеб. пособие для вузов /А.С. Востриков, Г.А. Французова. – М.: Высш. шк., 2006.

2.Савин М.М. Теория автоматического управления: Учебное пособие. Ростов н/Д: Феникс, 2007.

3.Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. Учебное пособие для вузов. СПб: Профессия, 2004.

4.Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.

5.Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.

6.Методы классической и современной теории управления. Учебник в 3-х томах. Издат. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.

Составители: Лянцев Олег Дмитриевич
Кузнецова Елена Евгеньевна

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания
для выполнения практических работ
по дисциплине «Основы теории управления»

Подписано в печать 12.04.2010. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать плоская. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л.1,7. Усл. кр. - отт. 1,7. Уч. -изд. л. 1,6.
Тираж 100 экз. Заказ № .
ГОУ ВПО Уфимский государственный авиационный технический университет
Центр оперативной полиграфии УГАТУ
450000, Уфа-центр, ул. К. Маркса, 12