Уральский государственный экономический университет

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Екатеринбург

2011

Составители:
Н.В. Коржавина, С.Н. Петрова

Рецензент:
кандидат педагогических наук, доцент
Дударева Н.В.

В теоретическом разделе приводится краткое описание основных понятий, методов и алгоритмов современной теории вероятностей и математической статистики, используемых при обработке и анализе экспериментальных данных. Для закрепления теоретического материала в каждом параграфе приводятся примеры решения задач, а также задачи для самостоятельной работы. В конце пособия предложены десять вариантов заданий для выполнения домашней контрольной работы.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теории надежности, теории массового обслуживания, в теоретической физике, геодезии, астрономии, теории стрельбы, теории ошибок наблюдений, теории автоматического управления, общей теории связи и во многих других теоретических и прикладных науках. Теория вероятностей служит также для обоснования математической и прикладной статистики, которая в свою очередь, используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов, предупредительном и приемочном контроле качества продукции и для многих других целей. Наиболее ценным для нас является то, что при помощи методов теории вероятности и математической статистики появляется возможность создания математических моделей правовых ситуаций.

В последние годы методы теории вероятностей все шире и шире проникают в различные области науки и техники, способствуя их прогрессу.

Для эффективного усвоения учебного материала и получения итоговой аттестации необходимо, в сроки, предусмотренные учебным планом, выполнить контрольные задания и предоставить их для проверки преподавателю по электронной почте (в системе e-Learning.usue.ru). График изучения и отчетности по дисциплине приведен в Таблице 1.

Таблица 1

Содержание	Сроки сдачи	Критерии оценки
1.Изучите теоретический материал (учебно-методический комплекс)		
2.Выполните самостоятельно контрольные работы № 1 и 2	За 1,5 месяца до сессии	
3. Подготовьтесь к итоговой аттестации	Во время сессии	

Для получения итоговой аттестации по дисциплине студент в течение семестра должен выполнить контрольную работу, которая состоит из двух частей. Выбор варианта производится по начальной букве фамилии студента:

Начальная буква фамилии студента	Вариант
А, Б	1
В, Г	2
Д, Е, Ж	3
З, И, К	4
Л, М	5
Н, О, П	6
Р, С	7
Т, У, Ф, Х	8
Ц, Ч, Ш, Щ	9
Э, Ю, Я	10

Часть I

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

§ 1. Случайное событие, его частота и вероятность

Случайными называют такие события, которые могут произойти или не произойти при осуществлении совокупности условий, связанных с возможностью появления данных событий. Случайные события обозначают буквами *A, B, C*... . Каждое осуществление рассматриваемой совокупности условий называется *опытом*.

Численная мера степени объективной возможности наступления случайного события называется *вероятностью*. Вероятность случайного события *A* обозначается через *P(A)*.

Достоверному событию, т.е. событию, которое должно произойти при каждом испытании, приписывается вероятность $P(A)=1$.

Невозможному событию, т.е. событию, которое не может произойти ни при одном испытании, приписывается вероятность $P(A)=0$.

Вероятность случайного события заключена между нулем и единицей: $0 \le P(A) \le 1$. В некоторых простейших случаях вероятность случайного события может быть определена заранее (как говорят в математике, a'priori).

Все мыслимые взаимоисключающие результаты опыта называются элементарными событиями (элементарными исходами). Несколько событий в данном опыте называются *равновозможными,* если появление какого-либо из них не более возможно, чем любого другого.

Возможные результаты каждого из однородных событий могут быть представлены в виде n единственно возможных, несовместных друг с другом и равновозможных исходов, т.е. кроме этих n исходов не может быть никаких других, никакие два из них не могут произойти одновременно и есть основания считать, что любой из них не является более возможным, чем другие. Если из этих n единственно возможных, несовместных и равновозможных случаев m случаев связаны с наступлением события A (или, как говорят в теории вероятностей, «благоприятствуют» A), то за вероятность события A принимается отношение m к n:

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}} \qquad (1)$$

Пример. В ящике 10 перенумерованных шаров с номерами № 1, № 2, …, № 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара четный?

Решение: Так как в ящике находятся 5 шаров с четными номерами, то число элементарных событий, благоприятных событию А, равно 5, т.е. $m = 5$ и общее число исходов равно $n = 10$, то вероятность вынуть из ящика четный шар равна $P(A) = \frac{5}{10} = 0{,}5$.

При непосредственном вычислении вероятностей часто используют формулы комбинаторики[1]. Приведем наиболее употребительные из них.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$\boxed{P_n = n!} \qquad (2)$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Заметим, что удобно рассматривать 0!, полагая, по определению, 0! = 1.

Пример. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Решение. Искомое число трехзначных чисел $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо

[1] *Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько и каких различных комбинаций можно составить из элементов некоторого множества.*

составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$\boxed{A_{m,n} = n(n-1)(n-2)...(n-m+1)} \qquad (3)$$

<u>Пример.</u> Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение. Искомое число сигналов $A_n^{,m}$ =6·5 = 30.

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}} \qquad (4)$$

<u>Пример.</u> Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение. Искомое число способов

C_n^m = n!/(m!(n - m)!)=10!/(2!8!)=45.

Подчеркнем, что числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством

$$\boxed{A_n^m = P_m \cdot C_n^m} \qquad (5)$$

№ 1. В ящике 10 перенумерованных шаров с номерами № 1, № 2, …, № 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превышает 10?

Решение: Так как номер любого шара, находящегося в ящике, не превышает 10, то число случаев, благоприятных событию, равно числу всех возможных случаев, т.е. $m = n = 10$ и $P(A) = 1$. В этом случае событие достоверно.

№ 2. В ящике 10 перенумерованных шаров с номерами № 1, № 2, …, № 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превышает 10?

Решение: Так как номер любого шара, находящегося в ящике, не превышает 10, то число случаев, благоприятных событию, равно числу всех возможных случаев, т.е. $m = n = 10$ и $P(A) = 1$. В этом случае событие достоверно.

№ 3. В урне 15 шаров: 5 белых и 10 черных. Какова вероятность вынуть из урны синий шар?

Р е ш е н и е: Синих шаров в урне нет, т.е. $m = 0$, а $n = 15$. Следовательно, $P(A) = \frac{0}{15} = 0.$ В данном случае событие A – не возможное.

№ 4. В урне 12 шаров: 3 белых, 4 черных и 5 красных Какова вероятность вынуть из урны черный шар?

Р е ш е н и е: Здесь $m = 4,\ n = 12$ и $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

№ 5. В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вынули два шара. Какова вероятность, что оба шара – белые?

Р е ш е н и е. В этой задаче число всех случаев $n = C_{10}^{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45.$ Число же случаев, благоприятных событию A, определяется равенством $m = C_{6}^{2}$, т.е. $m = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$. Итак, $P(A) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}.$

№ 6. В лотерее 2000 билетов. На один билет падает выигрыш 100 руб., на четыре билета – выигрыш по 50 руб., на десять билетов – выигрыш по 20 руб., на двадцать билетов – выигрыш по 10 руб., на 165 билетов – выигрыш по 5 руб., на 400 билетов – выигрыш по 1 руб. Остальные билеты невыигрышные. Какова вероятность выиграть по билету не меньше 10 руб?

Р е ш е н и е: Здесь $m = 1 + 4 + 10 + 20 = 35, n = 2000,$ т.е. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{35}{2000} = 0{,}0175$

§ 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Суммой (или *объединением*) нескольких случайных событий $A_1, A_2, ..., A_n$ в данном опыте называется новое событие, состоящее в осуществлении одного из данных событий, и обозначается символом

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

Если объединяемые события несовместны (никакие два из них не могут осуществляться одновременно), то *вероятность суммы нескольких событий равна сумме вероятностей объединяемых событий* (***теорема сложения вероятностей***):

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Событие, состоящее в ненаступлении случайного события A, называется *событием, противоположным событию А,* и обозначается через $\overline{A}$. Объединение событий A и $\overline{A}$ дает событие достоверное, а поскольку события A и $\overline{A}$ несовместны, то

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \text{ или } P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Если в результате данного испытания может наступить лишь одно из несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют так называемую *полную группу событий.* Так как объединение событий полной группы является событием достоверным, то для таких событий имеет место равенство

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Произведением (или *совмещением*) двух случайных событий A_1 и A_2 в данном опыте называется новое событие $A_1 \cdot A_2$, заключающееся в совместном появлении обоих событий.

Под *условной вероятностью* события A_2 по отношению к событию A_1 (обозначается $P(A_2 / A_1)$ понимается вероятность события A_2, определенная в предположении, что событие A_1 произошло.

Вероятность совмещения двух событий A_1 и A_2 равна произведению вероятности одного из них на условную вероят-

ность второго по отношению к первому (аксиома у м н о ж е - н и я вероятностей):

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) = P(A_2) \cdot P(A_1 / A_2).$$

Два случайных события A_1 и A_2 называются *независимыми*, если условная вероятность одного из них по отношению к другому равна безусловной вероятности этого же события:

$$P(A_2 / A_1) = P(A_2)$$

В этом случае имеют место равенства:

$$P(A_2 / \overline{A}_1) = P(A_2 / A_1) = P(A_2);$$

$$P(A_1 / A_2) = P(A_1 / \overline{A}_2) = P(A_2).$$

Для независимых событий вероятность их произведения равна произведению их вероятностей:

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Произведение n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обозначается символом $A_1 A_2 \ldots A_n$.

Вероятность произведения n событий по ***теореме умножения вероятностей*** определяется формулой

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) =$$

$$P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 A_2) \ldots P(A_n / A_1 A_2 \ldots A_{n-1}).$$

Говорят, что n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *независимыми в их совокупности*, если на вероятность осуществления каждого из них не оказывает влияния осуществление любых других, взятых в какой угодно комбинации.

Вероятность произведения n событий, независимых в их совокупности, равно произведению их вероятностей:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots P(A_n).$$

№ 1. В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар белый? черный? синий? красный? белый или черный? синий или красный? белый, черный или синий?

Р е ш е н и е : Имеем

$$n = 10 + 15 + 20 + 25 = 70,\ P(\text{Б}) = \frac{10}{70} = \frac{1}{7},\ P(\text{Ч}) = \frac{15}{70} = \frac{3}{14},$$

$$P(\text{С}) = \frac{20}{70} = \frac{2}{7},\ P(\text{К}) = \frac{25}{70} = \frac{5}{14}.$$

Применяем аксиому сложения вероятностей:

$$P(\text{Б}+\text{Ч}) = P(\text{Б}) + P(\text{Ч}) = \frac{1}{7} + \frac{3}{14} = \frac{5}{14};$$

$$P(\text{С}+\text{К}) = P(\text{С}) + P(\text{К}) = \frac{2}{7} + \frac{5}{14} = \frac{9}{14};$$

$$P(\text{Б}+\text{Ч}+\text{С}) = 1 - P(\text{К}) = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}.$$

№ 2. В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров. Во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что оба шара белые?

Решение. В данном случае речь идет о совмещении событий A и B, где событие A – появление белого шара из первого ящика, событие B – появление белого шара из второго ящика. При этом A и B – независимые события. Имеем:

$$P(A) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6},\ P(B) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Применяем теорему умножения вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}.$$

№ 3. В условиях предыдущей задачи определить вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой черный.

Решение.

Событие A – появление белого шара из первого ящика;

Событие B – появление белого шара из второго ящика;

Событие C – появление черного шара из первого ящика $(C = \overline{A})$;

Событие D – появление черного шара из второго ящика $(D = \overline{B})$;

$$P(A)=\frac{1}{6},\ P(B)=\frac{2}{3},\ P(C)=P(\overline{A})=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6},$$

$$P(D)=P(\overline{B})=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Определим вероятность того, что шар, вынутый из первого ящика, белый, а из второго ящика – черный:

$$P(AD)=P(A)\cdot P(D)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}.$$

Определим вероятность того, что шар, вынутый из первого ящика, черный, а из второго ящика – белый:

$$P(BC)=P(B)\cdot P(C)=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{9}.$$

Определим теперь вероятность того, что шар, вынутый из одного ящика (безразлично из первого или второго), будет белым, а шар, вынутый из другого ящика, - черным. Применяем теорему сложения вероятностей:

$$P=P(AD)+P(BC)=\frac{1}{18}+\frac{5}{9}=\frac{11}{18}.$$

№ 4. Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго – 0,8 для третьего 0,9. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.

Решение. Имеем

$$P(A)=0{,}75,\ \ P(B)=0{,}8,\ \ P(C)=0{,}9;$$

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=0{,}75\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}54.$$

№ 5. В условиях предыдущей задачи определить вероятность того, что в цель попадает хотя бы один стрелок.

Решение. $P(\overline{A})=1-0{,}75=0{,}25$ (вероятность промаха первого стрелка); $P(\overline{B})=1-0{,}8=0{,}2$ (вероятность промаха второго стрелка); $P(\overline{C})=1-0{,}9=0{,}1$(вероятность промаха третьего стрелка); тогда $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$- вероятность одновременного промаха всех трех стрелков – определится следующим образом:

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(\overline{C})=0{,}25\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}005.$$

Но событием, противоположным событию $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$, является событие, заключающееся в поражении цели хотя бы одним стрелком. Следовательно, искомая вероятность найдется по формуле

$$P = 1 - P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}),\ \text{т.е. } P = 1 - 0{,}005 = 0{,}995.$$

№ 6. В ящике a белых и b черных шаров. Какова вероятность того, что из двух вынутых шаров один белый, а другой черный? (Вынутый шар в урну не возвращается.)

Решение.

Событие A – появление белого шара при первом вынимании;
Событие B – появление черного шара при втором вынимании;
Событие C – появление черного шара при первом вынимании;
Событие D – появление белого шара при втором вынимании.

Вычислим вероятность того, что первый вынутый шар белый, а второй – черный:

$$P_1 = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b-1} = \frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Найдем вероятность того, что первый вынутый шар черный, а второй - белый:

$$P_2 = P(C) \cdot P(D/C) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1} = \frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Таким образом, вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой – черный, определится по теореме сложения;

$$P = P_1 + P_2,\ \text{т.е. } P = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

§ 3. Повторение испытаний

Если производится n независимых испытаний в одинаковых условиях, в каждом из которых вероятность появления события A одно и та же и равна p, то вероятность того, что событие A появится в этих n испытаниях m раз, выражается формулой

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

(формула Бернулли), где $q = 1 - p$.

Таким образом,

$$P_{0,n} = q^n,\ P_{1,n} = npq^{n-1},\ P_{2,n} = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} p^2 \cdot q^{n-2},\ \ldots,\ P_{n,n} = p^n.$$

Теорема о наивероятнейшем числе успехов.

Наивероятнейшее число успехов k_0 в n независимых опытах, в каждом из которых вероятность успеха равна p, удовлетворяет следующему неравенству: $np - q \le k_0 \le np + p$, причем если $np + p$ - не целое, то k_0 - единственное; если $np + p$ - целое, то существует два наивероятнейших числа: $k_0 = np + p$ и $k_0 - 1 = np - q$.

№ 1. В урне 30 шаров: 20 белых и 10 черных. Вынули подряд четыре шара, причем каждый вынутый шар возвращается в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешиваются. Какова вероятность того, что из четырех вынутых шаров будет два белых?

Решение: Вероятность извлечения белого шара $p = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ можно считать одной и той же во всех четырех испытаниях; $q = 1 - p = \frac{1}{3}$. Применив предыдущую формулу, получаем

$$P_{2,4} = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}.$$

№ 2. Вероятность появления события A равна 0,4. Какова вероятность того, что при 10 испытаниях событие A появится не больше трех раз?

Решение. Здесь p=0,4, q=0,6.

Вероятность появления события A 0 раз: $P_{0,10} = q^{10}$.

Вероятность появления события A 1 раз: $P_{1,10} = 10pq^9$.

Вероятность появления события A 2 раза: $P_{2,10} = 45p^2q^8$.

Вероятность появления события A 3 раза: $P_{3,10} = 120p^3q^7$.

Вероятность того, что событие A появится не больше трех раз, равна

$$P = P_{0,10} + P_{1,10} + P_{2,10} + P_{3,10},$$

т.е.

$$P = q^{10} + 10pq^9 + 45p^2q^8 + 120p^3q^7,$$

или

$$P = q^7 \cdot (q^3 + 10q^2p + 45qp^2 + 120p^3).$$

Положив p=0,4, q=0,6 получим

$$P = 0{,}6^7 \cdot (0{,}216 + 1{,}44 + 4{,}32 + 7{,}68), \text{ т.е. } P \approx 0{,}38.$$

№ 3. Определить вероятность того, что в семье, имеющей пять детей, будет три девочки и два мальчика. Вероятности рождения мальчика и девочки считаются одинаковыми.

Р е ш е н и е. Вероятность рождения девочки p=0,5, тогда $q = 1 - p = 0{,}5$ (вероятность рождения мальчика). Искомую вероятность находим по формуле.

$$P_{3,5} = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (0{,}5)^3 \cdot (0{,}5)^2 = \frac{5}{16}.$$

№ 4. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что среди детей не больше трех девочек.

Р е ш е н и е. Имеем

$$P_{0,5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32};\ P_{1,5} = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32};$$

$$P_{2,5} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16};\ P_{3,5} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16};$$

$$P = P_{0,5} + P_{1,5} + P_{2,5} + P_{3,5} = \frac{13}{16}.$$

№ 5. Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,4, независимо от заявок других магазинов. Найти наивероятнейшее число поступивших заявок.

Р е ш е н и е: Поскольку $n=10,\ p=0.4,\ q=1-p=0.6$, то наивероятнейшее число заявок k_0 находится из неравенства:

$np-q \le k_0 \le np+p$, $np-q = 10\cdot 0{,}4 - 0{,}6 = 3{,}4$,

$np+p = 10\cdot 0{,}4 + 0{,}4 = 4{,}4$, т.е. $3{,}4 \le k_0 \le 4{,}4$. Таким образом, имеем единственное решение $k_0=4$.

§ 4. Формула полной вероятности. Формула Бейеса

Если известно, что событие A может произойти вместе с одной из гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующими полную группу событий, то событие A можно представить как объединение событий $AH_1, AH_2, \dots, AH_n$, т.е. $A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n$. Вероятность события A можно определять по формуле *полной вероятности*

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)\cdot P(A/H_n),$$

или

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i).$$

Условная вероятность события H_i в предположении, что событие A имеет место, определяется по *формуле Бейеса:*

$$P(H_i/A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)\cdot P(H_i)} \quad (i=1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

№ 1. Имеется 4 урны. В первой урне 1 белый и 1 черный шар, во второй – 2 белых и 3 черных шара, в третьей – 3 белых и 5 черных шаров, в четвертой – 4 белых и 7 черных шаров. Событие H_i – выбор i-й урны (i=1, 2, 3, 4). Дано, что вероятность выбора i-й урны равна $\frac{i}{10}$, т.е.

$$P(H_1) = \frac{1}{10},\ P(H_2) = \frac{1}{5},\ P(H_3) = \frac{3}{10},\ P(H_4) = \frac{2}{5}.$$

Выбирают наугад одну из урн и вынимают из не шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение. Из условия следует, что $P(A/H_1)=\dfrac{1}{2}$ (условная вероятность извлечения белого шара из первой урны); аналогично

$$P(A/H_2)=\frac{2}{5};\ P(A/H_3)=\frac{3}{8};\ P(A/H_4)=\frac{4}{11}.$$

Вероятность извлечения белого шара находим по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)+P(H_4)$$

Итак,

$$P(A)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{8}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{11}=\frac{1707}{4400}.$$

№ 2. Имеются три одинаковых по виду ящика. В первом ящике 20 белых шаров, во втором – 10 белых и 10 черных шаров, в третьем – 20 черных шаров. Из выбранного наугад ящика вынули белый шар. Вычислить вероятность того, что шар вынут из первого ящика.

Решение.

Гипотеза H_1 – выбор первого ящика;

Гипотеза H_2 – выбор второго ящика;

Гипотеза H_3 – выбор третьего ящика;

Событие A – появление белого шара.

$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\dfrac{1}{3}$ (выбор любого из ящиков равновозможен); $P(A/H_1)=1$ (вероятность извлечения белого шара из первого ящика), $P(A/H_2)=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$ (вероятность извлечения белого шара из второго ящика), $P(A/H_3)=0$ (вероятность извлечения белого шара из третьего ящика).

Искомую вероятность $P(H_1/A)$ находим по формуле Бейеса:

$$P(H_1/A)=\frac{1\cdot\frac{1}{3}}{1\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}.$$

№ 3. В ящике имеется N изделий, среди которых могут быть и бракованные. Вынутое наугад изделие оказалось небракованным. Определить вероятность того, что:

1) все изделия в ящике небракованные;

2) $N-1$ изделий небракованных и одно изделие бракованное;

3) N-*2* изделий небракованных и два изделия бракованных;

……………………………………………………………..

$N+1$) все N изделий в ящике бракованные.

Решение.

Гипотезы до опыта:

H_0 – все изделия в ящике небракованые;

H_1 – одно из изделие бракованное;

H_2 – два изделия бракованных.

……………………………………………………………..

H_N – все изделия бракованные.

Событие A – появление небракованного изделия.

Требуется найти

$P(H_0/A),\ P(H_1/A),\ P(H_2/A),\ldots,\ P(H_N/A).$

Примем, что до опыта все гипотезы равновозможны:

$$P(H_0)=P(H_1)=P(H_2)=\ldots=P(H_N)=\frac{1}{N+1},$$

$$P(A/H_0)=1,\ P(A/H_1)=\frac{N-1}{N},\ P(A/H_2)=\frac{N-2}{N},\ \ldots,$$

$$P(A/H_{N-1})=\frac{1}{N},\ P(A/H_N)=0.$$

Отсюда находим

$$P(H_0/A)=\frac{1\cdot\frac{1}{N+1}}{1\cdot\frac{1}{N+1}+\frac{N-1}{N}\cdot\frac{1}{1+N}+\ldots+\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N+1}+0\cdot\frac{1}{N+1}}=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{N}+\frac{2}{N}+\ldots+\frac{N-1}{N}+1}=\frac{N}{1+2+\ldots+N-1+N}=\frac{2}{N+1}.$$

Аналогично получаем:

$$P(H_1/A)=\frac{2}{N+1}\cdot\frac{N-1}{N},$$

$$P(H_2/A)=\frac{2}{N+1}\cdot\frac{N-1}{N},$$

$$P(H_3/A)=\frac{2}{N+1}\cdot\frac{N-3}{N},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P(H_N/A)=\frac{2}{N+1}\cdot 0=0.$$

№ 4. В урне имеется N белых и черных шаров. Из урны вынули m шаров (каждый вынутый шар регистрируется, а затем возвращается в урну). Оказалось, что все вынутые шары – белые. Определить вероятность того, что:

1) все шары в урне белые;

2) N – 1 шаров белых и один шар черный;

3) N – 2 шаров белых и два шара черных;

……………………………………………………………..

N + 1) все N шаров в урне черные.

Решение.

Гипотезы до опыта:

H_0 - все шары в урне белые;

H_1 - в урне имеется один черный шар;

H_2 - в урне два черных шара;

……………………………………………………………..

H_N - все шары в урне черные.

Событие A – появление m белых шаров. Вероятности гипотез до опыта принимаем равными:

$$P(H_0) = P(H_1) = \ldots = P(H_N) = \frac{1}{N+1},$$

$$P(A/H_0) = 1,\ P(A/H_1) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^m,$$

$$P(A/H_2) = \left(\frac{N-2}{N}\right)^m, \ldots, P(A/H_{N-1}) = \left(\frac{1}{N}\right)^m,$$

$$P(A/H_N) = 0.$$

Отсюда находим

$P(H_0/A) =$

$$= \frac{1 \cdot \frac{1}{N+1}}{1 \cdot \frac{1}{N+1} + \left(\frac{N-1}{N}\right)^m \cdot \frac{1}{N+1} + \ldots + \left(\frac{1}{N}\right)^m \cdot \frac{1}{N+1} + 0 \cdot \frac{1}{N+1}} =$$

$$= \frac{N^m}{1 + 2^m + 3^m + \ldots + N^m}.$$

Аналогично получаем:

$$P(H_1/A) = \frac{N^m}{1 + 2^m + 3^m + \ldots + N^m} \cdot \left(\frac{N-1}{N}\right)^m =$$

$$= \frac{(N-1)^m}{1 + 2^m + 3^m + \ldots + N^m},$$

$$P(H_2/A) = \frac{N^m}{1 + 2^m + 3^m + \ldots + N^m} \cdot \left(\frac{N-2}{N}\right)^m =$$

$$= \frac{(N-2)^m}{1 + 2^m + 3^m + \ldots + N^m},$$

………………………………………………………………….

$$P(H_k/A) = \frac{N^m}{1 + 2^m + 3^m + \ldots + N^m} \cdot \left(\frac{N-k}{N}\right)^m =$$

$$= \frac{(N-k)^m}{1+2^m+3^m+\ldots+N^m},$$

$$P(H_N / A) = \frac{N^m}{1+2^m+3^m+\ldots+N^m} \cdot 0 = 0.$$

Если $m = 1$, то $P(H_k / A) = \dfrac{N-k}{1+2+3+\ldots+N} = \dfrac{2(N-k)}{N(N+1)}$.

Если m=2, то

$$P(H_k / A) = \frac{(N-k)^2}{1+2^2+3^2+\ldots+N^2} = \frac{6(N-k)^2}{N(N+1)(2N+1)}.$$

Если m=3, то $P(H_k / A) = \dfrac{(N-k)^3}{1+2^3+3^3+\ldots+N^3} = \dfrac{4(N-k)^3}{N^2(N+1)^2}$.

Если m=4, то

$$P(H_k / A) = \frac{(N-k)^4}{1+2^4+3^4+\ldots+N^4} = \frac{30(N-k)^4}{N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)}.$$

Здесь использованы формулы:

$$1+2^2+3^2+\ldots+N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6},$$

$$1+2^3+3^3+\ldots+N^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4},$$

$$1+2^4+3^4+\ldots+N^4 = \frac{N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)}{30}.$$

№ 5. В урне 20 белых и черных шаров. Вынули три шара. Оказалось, что все шары белые. Определить вероятность того, что в урне: 1) 16 белых шаров; 2) 17 белых шаров; 3) 18 белых шаров; 4) 19 белых шаров; 5) 20 белых шаров; 6) не меньше 16 белых шаров.

Указание. Воспользоваться решением предыдущей задачи, приняв m=3, N=20.

Ответ 1) $\dfrac{4 \cdot 16^3}{20^2 \cdot 21^2}$; 2) $\dfrac{4 \cdot 17^3}{20^2 \cdot 21^2}$; 3) $\dfrac{4 \cdot 18^3}{20^2 \cdot 21^2}$; 4) $\dfrac{4 \cdot 19^3}{20^2 \cdot 21^2}$; 5) $\dfrac{4 \cdot 20}{21^2}$; 6) $\dfrac{33}{49}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

ВАРИАНТ 1.

1. Какова вероятность выиграть главный приз в спортлото, угадав 6 номеров из 49?

2. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует к себе внимания рабочего для 1 станка равна 0.9, для 2-го равна 0.8, для 3-го - 0.85. Найти вероятность того, что в течение часа 1) ни один станок не потребует внимания рабочего, 2) по крайней мере 1 станок не потребует внимания рабочего.

3. Достигшему 60-летнего возраста человеку вероятность умереть на 61 году жизни равна при определенных условиях 0.09. Какова в этих условиях вероятность, что из 3-х человек в возрасте 60 лет 1) все трое будут живы через год, 2) по крайней мере один из них будет жив.

4. Посев производится семенами пшеницы 4 сортов, перемешанных между собой. При этом зерна первого сорта составляют 12 % от общего количества, зерна второго сорта – 9 %, третьего сорта – 14 %, четвертого сорта – 65%. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен для пшеницы первого сорта составляет 0.25, для пшеницы второго сорта – 0.08, для пшеницы третьего сорта – 0.04, для четвертого сорта – 0. Найти вероятность того, что из взятого наугад зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен.

5. Успешно написали контрольную работу 30 % студентов. Вероятность правильно решить задачу на экзамене для студента, успешно написавшего контрольную, равна 0.8, для остальных – 0.4. Студент не решил задачу на экзамене. Какова вероятность, что он не написал контрольную работу?

ВАРИАНТ 2.

1. Имеется две урны. В первой урне a белых и $в$ черных шаров, во второй c белых и d черных шаров. Из каждой урны вынимается по одному шару. Какова вероятность, что они будут белыми?

2. 12 рабочих получили путевки в 4 дома отдыха: трое – в первый дом отдыха, трое – во второй, двое – в третий и четверо – в четвертый дом отдыха. Найти вероятность того, что данные двое рабочих попадут в один дом отдыха.

3. В денежно-вещевой лотерее на каждые 1000 билетов приходится 24 денежных и 10 вещевых выигрыша. Некто приобрел 2 билета. Найти вероятность, что он 1) выиграет хотя бы по одному билет, 2) выиграет по одному билету – деньги, а по другому – вещи.

4. В сборочный цех завода поступили детали с 3-х автоматов. 1-ый автомат дает 3 % брака, 2-й – 1 %, 3-ий – 2%. Определить вероятность попадания на сборку бракованной детали, если в цех поступило 500 деталей от 1-го автомата, 200 от 2-го и 300 от 3-го.

5. В специализированную больницу поступают в среднем 70 % больных с заболеванием К а остальные – с заболеванием М. Вероятность полного излечения болезни К равна 0.8, болезни М – 0.9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Какова вероятность, что он болел болезнью К?

ВАРИАНТ 3.

1. Колода из 36 карт наугад разделена пополам. Найти вероятность того, что в одной половине окажутся только черные карты, а в другой – только красные.

2. На 30 одинаковых жетонах написаны числа от 11 до 40. Какова вероятность вытянуть наугад жетон с номером, кратным 3 или 2?

3. В цехе работает 8 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наугад отбираются 7 человек. Какова вероятность, что среди отобранных будет только 2 женщины? Хотя бы одна женщина?

4. Имеется три урны. В первой урне a белых и $в$ черных шаров, во второй урне c белых и d шаров, в третьей урне только белые шары. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из нее один шар. Найти вероятность того, что он будет белым.

5. Прибор может собираться из деталей высокого качества и деталей обычного качества. Из высококачественных деталей собирается 40 % приборов. Для высококачественного прибора его надежность за промежуток времени t равна 0.95, для обычных приборов надежность составляет 0.7. Прибор испытывался в течение времени t и работал безотказно. Найти вероятность того, что он собран из высококачественных деталей.

ВАРИАНТ 4.

1. В книге В. Феллера «Введение в теорию вероятностей» 500 страниц. Чему равна вероятность того, что открытая наугад страница будет иметь номер, кратный 9?

2. При записи фамилий членов некоторого собрания, общее число которых 420, оказалось, что начальной буквой фамилии у 10 человек была «А», у 6 человек –«Е», у 9 человек – «И», у 12 человек - «О», у 5 человек – «У» и у 3 человек – «Ю». У остальных фамилии начинались с согласной буквы. Найти вероятность того, что фамилия члена данного собрания начинается с согласной буквы.

3. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает ее наугад. Какова вероятность того, что ему придется звонить не более, чем в три места? Как изменится вероятность, если известно, что последняя цифра – нечетная?

4. Прибор может работать в двух режимах: нормальном и ненормальном. Нормальный режим наблюдается в 80 % случаев, ненормальный – в 20 %. Вероятность выхода прибора из строя за время t в нормальном режиме составляет 0.1, в ненормальном

режиме – 0.7. Найти вероятность выхода прибора из строя за время t.

5. Некто заблудился в лесу и вышел на поляну, откуда вело 5 одинаковых дорог. Вероятность выхода из леса за 1 час для различных дорог равны соответственно: 0.6, 0.3, 0.2, 0.1, 0.1. Какова вероятность что человек пошел по первой дороге, если в течение часа он вышел из леса?

ВАРИАНТ 5.

1. Двенадцать студентов получили дисциплинарные выговоры в деканате: трое – за опоздание на занятия, трое – за прогулы, двое – за неуспеваемость и четверо – за курение в здании факультета. Найти вероятность того, что двое случайно выбранных штрафников получили выговор за одно и то же нарушение.

2. В сказке Иван-царевич должен трижды угадать Василису Премудрую среди ее совершенно одинаковых одиннадцати сестер. Какова вероятность, что Иван-царевич справится с испытанием без подсказок?

3. Что вероятнее выиграть у равносильного противника: 3 партии из четырех или 5 партий из восьми?

4. Студент может сдавать экзамен любому из трех экзаменаторов. Вероятность сдать экзамен первому из них составляет 0.4, остальным двум по 0.1. Студент не знает, кто из экзаменаторов «добрый». Он выбрал наугад одного из них и сдал экзамен. Какова вероятность, что студент сдавал экзамен «доброму» преподавателю?

5. Два охотника преследовали медведя и независимо друг от друга сделали в него по одному выстрелу. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0.8, для второго – 0.4. Медведь был убит, но в нем были обнаружены следы только одного выстрела. Охотники поспорили, кому из них должен принадлежать трофей. У кого из них больше шансов украсить гостиную медвежьей шкурой?

ВАРИАНТ 6.

1. Из 30 экзаменационных билетов студент выучил 23. На экзамене он берет билет первым. Какова вероятность, что ему попадется билет, который он знает? Какова будет эта вероятность, если студент пришел на экзамен последним и тянет последний оставшийся билет?

2. В первой из двух студенческих групп учатся a юношей и $в$ девушек, во второй c юношей и d девушек. Из каждой группы наугад вызывается по одному студенту. Какова вероятность, что это будут юноши?

3. В организацию внедрились три секретных агента, работающие независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение года секретный агент будет разоблачен, для первого агента равна 0.9, для 2-го равна 0.8, для 3-го агента равна 0.85. Найти вероятность того, что в течение года будет выявлен хотя бы один секретный агент.

4. Вероятность рождения мальчика равна 0.515. Найти вероятность того, что среди 12 новорожденных будет 10 девочек.

5. Поручик Ржевский знакомится только с блондинками. Но в среднем только 20 % блондинок натуральные, остальные – крашеные. Из 25 знакомых блондинок поручик случайным образом выбирает трех, с которыми идет вечером в театр. Найти вероятность того, что две из окажутся натуральными, а одна – крашеной.

ВАРИАНТ 7.

1. Из четырех отрезков, длины которых равны 3, 4, 7 и 9 см, наугад выбираются какие-то три. Какова вероятность того, что из выбранных отрезков можно составить треугольник?

2. Студент познакомился в троллейбусе с девушкой, и она дала ему свой номер телефона. Однако студент забыл последнюю

цифру номера и поэтому набирает ее наугад. Какова вероятность того, что ему придется звонить не более, чем в три места?

3. На полке стоят 20 учебников, два из них по математике. Наугад выбираются 4 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один их взятых учебников — по математике.

4. Вероятность того, что спортсмен победит в матче, равна 0,6. Какова вероятность того, что в 10 поединках он одержит больше 8 побед?

5. В первой урне 7 белых шаров и 3 черных, во второй — 4 белых и 5 черных. Из первой урны наугад вынули 2 шара и положили во вторую. Какого цвета шар теперь более вероятно вынуть из второй урны?

ВАРИАНТ 8.

1. Однажды вечером Ваня и Тима сели играть в кости. Они по очереди бросали две игральные кости. Если сумма выпавших очков равнялась 7, то выигрывал Ваня, а если сумма очков равнялась 8, то выигрывал Тима. На кого бы из них вы поставили, если бы вам пришлось держать пари?

2. Теща Кисы Воробьянинова зашила фамильные бриллианты в один из двенадцати одинаковых стульев. Два из них в последствии остались в Старгороде а десять стульев отправились в Москву. Какова вероятность отыскать бриллианты в одном из двух стульев, оставшихся в Старгороде?

3. Вероятность того, что рабочий перевыполнит план, равна 0,8, а вероятность того, что в случае перевыполнения плана он не получит премию, равна 0,1. Какова вероятность того, что рабочий получит премию?

4. Шахматист завершает вничью в среднем 20% своих партий. Определить наивероятнейшее число ничьих, которые сделает этот шахматист в турнире, где сыграет 12 партий.

5. Преподаватель проверяет контрольную по теории вероятностей, которую писали студенты трех групп. В первой группе не-

удовлетворительно написанные контрольные составляют 10 % , во второй – 15 %, в третьей – 20 %. Определить вероятность попадания на проверку неудовлетворительно написанной работы, если всего было сдано 18 работ из первой группы, 20 – из второй и 24 из третьей группы.

ВАРИАНТ 9.

1. Шифр сейфа заключается в комбинации из четырех разных цифр от 1 до 9.Взломщик пытается открыть сейф, угадав нужную комбинацию. Какова вероятность открыть сейф с первой попытки?

2. В кабинете декана 3 телефона. Вероятность того, что в течение часа телефон не зазвонит, для первого телефона равна 0.9, для 2-го равна 0.8, для 3-го телефона равна 0.85. Найти вероятность того, что в течение часа по крайней мере один телефон не зазвонит.

3. В первом ящике находится 3 синих и 2 зеленых предмета, во втором — 4 синих и 5 зеленых. Из каждого ящика выбирается наугад по 2 предмета. Найти вероятность того, что все выбранные предметы будут одного цвета.

4. Учителями истории могут работать выпускники трех вузов города. Первый вуз выпускает 45 % общего количества историков, второй – 40 %, третий – 15 % . Из первого вуза работать учителями в школу идут 70 % выпускников, из второго – 30 %, из третьего – 10 %. Какова вероятность, что данный выпускник пойдет работать учителем в школу?

5. В коробке находится 7 или 8 елочных игрушек, причем вероятность того, что игрушек 8, равна 0,7. Известно, что 15% елочных игрушек содержат фосфор. Найти вероятность того, что в коробке ровно 5 игрушек не содержат фосфор.

ВАРИАНТ 10.

1. В денежно-вещевой лотерее на каждые 1000 билетов приходится 24 денежных и 10 вещевых выигрыша. Некто приобрел 2 билета. Найти вероятность, что он 1) выиграет хотя бы по одному билет, 2) выиграет по одному билету – деньги, а по другому – вещи.

2. Вероятность того, что ковбой производя выстрел, выбьет 10 очков равна 0.4, вероятность того, что он выбьет 9 очков равна 0.3, вероятность того, что он выбьет 8 или менее очков равна 0.3. Найти вероятность того, что ковбой при одном выстреле выбьет не менее 9 очков.

3. В группе, состоящей из 25 студентов, в шахматы умеют играть 10 человек, а в шашки — 12 человек. Вероятность того, что студент из этой группы умеет играть в обе эти игры, равна 0,32. Найти вероятность того, что студент, наугад выбранный из группы, умеет играть в шахматы или в шашки.

4. Вероятность того, что студент выполняет домашние задания, равна 0.96. На экзамене такой студент получает положительную оценку с вероятностью 0.98, а студент, не делавший домашних заданий – с вероятностью 0.05. Какова вероятность, что студент, хорошо сдавший экзамен, не выполнял домашних работ?

5. У котенка есть три любимых места для отдыха: на хозяйской подушке, в дедушкином тапке и в кресле хозяина дома, в которых его можно найти с равной вероятностью. Вероятность того, что котенка в течение 30 минут выгонят с первого места составляет 0.7, со второго – 0.8, с третьего – 0.5. Котенок успел проспать всего 10 минут и его прогнали с любимого места. Какова вероятность, что он устроился спать на хозяйской подушке?

Часть II

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта принимает заранее неизвестное численное значение.

Те значения, которые она может принимать в результате опыта, образуют множество ее возможных значений или спектр значений. Случайные величины бывают *непрерывными и дискретными*.

Будем обозначать случайные величины X, а их возможные значения x.

Например, пусть X - число очков, выпавших при бросании кубика. X - случайная величина и множество ее значений будет: {1,2,3,4,5,6}

§ 5. Дискретные случайные величины

Случайная величина называется *дискретной*, если множество ее возможных значений счетно (т.е. все возможные значения можно пронумеровать натуральными числами) $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$

Случайная величина полностью определяется своим рядом распределения.

Ряд распределения представляет собой таблицу, в которой указаны возможные значения случайной величины и их вероятности:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Пример

Рассмотрим опыт с бросанием двух игральных кубиков. Пусть случайная величина *X* - сумма выпавших очков. Составим для нее ряд распределения:

xi	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
pi	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Поскольку ряд распределения содержит все возможные значения случайной величины, то суммарная вероятность должна быть равна 1.

Найдем вероятность следующих событий:

$P(X<5)$, $P(X>10)$, $P(3<X<7)$.

$P(X<5)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=$
$=1/36+2/36+3/36=6/36=1/6$

$P(X>10)=P(X=11)+P(X=12)=$
$=2/36+1/36=3/36=1/12$

$P(3<X<7)= P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=$
$=3/36+4/36+5/36=12/36=1/3$

Математическое ожидание и его свойства

Пусть X - дискретная случайная величина, заданная своим рядом распределения:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Математическим ожиданием M[X] случайной величины X называется сумма ряда

$$M[X]=m_x=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p_i$$

Например, в рассмотренном выше примере с двумя игральными кубиками:

$$M[X]=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+5\cdot\frac{4}{36}+6\cdot\frac{5}{36}+$$
$$+7\cdot\frac{6}{36}+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{4}{36}+10\cdot\frac{3}{36}+11\cdot\frac{2}{36}+12\cdot\frac{1}{36}=7$$

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание от постоянной величины равно этой постоянной величине: $M[C]=C, \quad C=const$

2. Математическое ожидание суммы случайных величин *Х и У* равно сумме математических ожиданий этих величин: $M[X+Y]=M[X]+M[Y]$

3. Математическое ожидание суммы случайной величины *Х и* постоянной величины *С* равно сумме математического ожидания *Х и* самой величины *С*: $M[X+C]=M[X]+C$

4. Постоянную величину можно выносить за знак математического ожидания: $M[k\,X]=k\,M[X]$, *где* $k=const$.

5. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин *Х и У* равно произведению математических ожиданий этих величин: $M[XY]=M[X]M[Y]$

Дисперсия и ее свойства

Дисперсия - это мера рассеяния значений случайной величины
около ее математического ожидания:

$$D[X]=M[(X-m_x)^2]$$

Например, пусть случайная величина Х задана рядом распределения:

x	*0*	*1*
p	*q*	*p*

Найдем математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

$$M[X]=0\cdot q+1\cdot p=p=m_x$$

$$D[X]=(0-m_x)^2\cdot q+(1-m_x)^2\cdot p=$$

$$=(0-p)^2\cdot q+(1-p)^2\cdot p=p^2\cdot q+(1-2p^2+p^2)\cdot p=$$

$$=p\cdot(1-p)=pq$$

Для вычисления дисперсии часто используют другую формулу:

$$D[X] = M[X^2] - m_x^2$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия от постоянной величины равна нулю*:* *D[C]=0, C=const*

2. Дисперсия суммы случайной величины X и постоянной величины C равна дисперсии величины *X : D[X+C]=D[X]*

3. Постоянная величина выносится за знак дисперсии в квадрате*: D[k X]=k2 D[X]*

4. Дисперсия всегда неотрицательна*:*

Квадратный корень из дисперсии называется *средним квадратичным отклонением:*

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sigma_x$$

Распределения случайных величин по биномиальному закону

Случайная величина *X* называется распределенной по биномиальному закону с параметрами *n,p >0,* если *X* принимает значения*: 0,1,2,...n и* вероятность того, что случайная величина примет значение *X=m* находится по формуле Бернулли*:*

$$p(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} \quad ,$$

где *q=1-p.*

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины при биномиальном распределении

$$M[X] = n \cdot p$$

$$D[X] = n \cdot p \cdot q$$

Закон Пуассона

Случайная величина *X* называется распределенной по закону Пуассона с параметром *a>0,* если она может принимать значения *0, 1, 2,...k...* и вероятность того, что она примет значение *X=k* находится по формуле:

$$p(X = a) = e^{-a} \cdot \frac{a^k}{k!}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины при распределении Пуассона

$$M[X] = a$$

$$D[X] = a$$

Биномиальное распределение и распределение Пуассона связаны между собой: распределение Пуассона является *предельным* для биномиального.

Если случайная величина X распределена по биномиальному закону, и число опытов n – велико, а вероятность события в каждом опыте p мала, то биномиальное распределение можно приближенно заменить пуассоновским при $a=np$:

$$p(X = k) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

Пример

По цели производится 50 независимых выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.04. Используя предельное свойство биномиального распределения, найти вероятность того, что в цель попадет один снаряд.

Решение:

Событие A - попадание при одном выстреле.

Вероятность $p(A)=0.04$.

Всего производится серия таких выстрелов:

n=50.

Так как p достаточно мало, а n - велико, биномиальное распределение приближенно можно заменить распределением Пуассона.

Найдем параметр a распределения Пуассона:

$$a = n \cdot p = 50 \cdot 0.04 = 2$$

Тогда вероятность $p_{1,50}$ того, что из 50-ти выстрелов будет одно попадание по формуле Пуассона будет:

$$p_{1,50} = \frac{2^1}{1!} e^{-2} = 0{,}271$$

§ 6. Непрерывные случайные величины

Непрерывные случайные величины имеют бесконечное число возможных значений. Поэтому ввести для них ряд распределения нельзя.

Вместо вероятности того, что случайная величина X примет значение, равное x, т.е. $p(X=x)$, рассматривают вероятность того, что X примет значение, меньшее, чем x, т.е. $P(X<x)$.

Введем новую характеристику случайных величин - функцию распределения и рассмотрим ее свойства.

Функция распределения – самая универсальная характеристика случайной величины. Она может быть определена как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.

$F(x)=p(X<x)$

Свойства функции распределения

1. Функция распределения является неубывающей функцией своего аргумента, т.е. если

$$x_2 > x_1, \quad то \quad F(x_2) \geq F(x_1)$$

2. На минус бесконечности функция распределения равна нулю: $F(-\infty)=0$

3. На плюс бесконечности функция распределения равна единице: $F(+\infty)=1$

Вероятность попадания случайной величины на заданный интервал определяется формулой:

$$p(\alpha \leq x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

Функция $f(x)$, равная производной от функции распределения, называется плотностью вероятности_случайной величины X или плотностью распределения.

$$F'(x) = f(x)$$

Выразим вероятность попадания на участок α до β через $f(x)$. Она равна сумме элементов вероятности на этом участке, т.е. интегралу:

$$p(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Отсюда можно выразить функцию распределения через плотность вероятности:

$$F(x) = p(X < x) = p(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Свойства плотности вероятности

1. Плотность вероятности является неотрицательной функцией (т.к. функция распределения является неубывающей функцией):

$$f(x) \geq 0$$

2. Плотность вероятности является непрерывной функцией.

3. Интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятности равен 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Плотность вероятности имеет размерность случайной величины.

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины

Смысл математического ожидания и дисперсии остается таким же, как и в случае дискретных случайных величин. Меняется вид формул для их нахождения путем замены:

$$x_i \to x$$

$$p_i \to f(x)dx$$

$$\sum \to \int$$

Тогда получаем формулы для расчета математического ожидания и дисперсии непрерывной случайной величины:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx \qquad D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx$$

$$M[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx \qquad D[X] = M[X^2] - m_x{}^2$$

Пример

Функция распределения непрерывной случайной величины задана выражением:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ ax^2, & 0<x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

Найти величину а, плотность вероятности, вероятность попадания на участок *(0.25-0.5),* математическое ожидание и дисперсию.

1. Так как функция распределения *F(x)* непрерывна, то при *x=1 ax2=1*, следовательно, *a=1*.

2. Плотность вероятности находится, как производная от функции распределения:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 2x, & 0<x\le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$$

3. Вычисление вероятности попадания на заданный участок может быть произведено двумя способами: с помощью функции распределения и с помощью плотности вероятности.

1 способ.

Используем формулу нахождения вероятности через функцию распределения:

$$p(0.25\le x<0.5)=F(0.5)-F(0.25)=$$

$$=0.5^2-0.25^2=0.1875$$

2 способ.

Используем формулу нахождения вероятности через плотность вероятности:

$$p(0.25<X<0.5)=\int_{0.25}^{0.5}2xdx=x^2\Big|_{0.25}^{0.5}=0.1875$$

4. Находим математическое ожидание:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx \qquad M[X]=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\frac{2x^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}$$

5. Находим дисперсию:

$$D[X]=M[X^2]-m_x^2 \qquad M[X^2]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx$$

$$M[X^2]=\int_0^1 x^2\cdot 2xdx=\left.\frac{x^4}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2} \qquad D[X]=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

Равномерное распределение

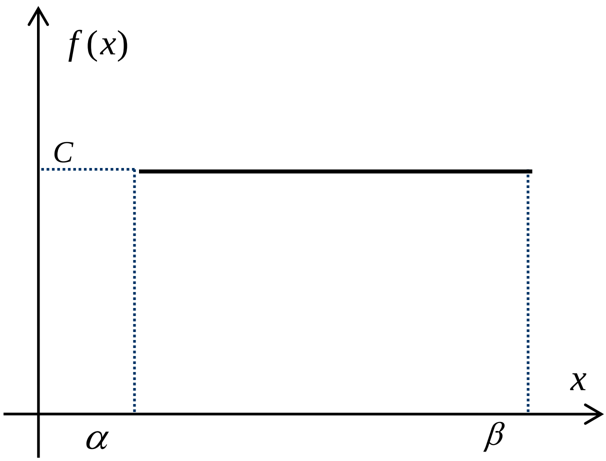
Рассмотрим непрерывную случайную величину X, возможные значения которой лежат в некотором интервале и равновероятны.

Плотность вероятности такой случайной величины будет иметь вид:

$$f(x)=\begin{cases} c, & \beta > x > \alpha \\ 0, & x<\alpha, x>\beta \end{cases},$$

где c - некоторая постоянная.

График плотности вероятности изобразится следующим образом:



Выразим параметр c через α и β. Для этого используем тот факт, что интеграл от плотности вероятности по всей области должен быть равен 1:

$$\int_\alpha^\beta cdx=\left.cx\right|_\alpha^\beta=c(\beta-\alpha)=1$$

Плотность распределения равномерно распределенной случайной величины

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha}, & \beta>x>\alpha\\ 0, & x<\alpha, x>\beta\end{cases}$$

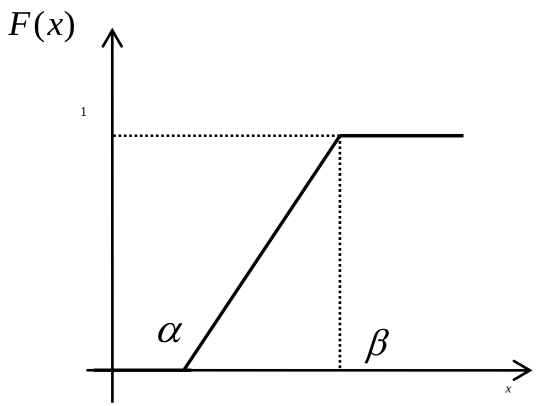
Найдем функцию распределения:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{\alpha}^{x}\frac{1}{\beta-\alpha}dx= \quad =\frac{1}{\beta-\alpha}\cdot x\Big|_{\alpha}^{x}=\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<\alpha\\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \alpha<x<\beta\\ 1, & x>\beta\end{cases}$$

функция распределения равномерно распределенной случайной величины

Построим график функции распределения:



Вычислим математическое ожидание и дисперсию случайной величины, подчиняющейся равномерному распределению.

$$M[X]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{x}{\beta-\alpha}dx=\left.\frac{x^2}{2(\beta-\alpha)}\right|_{\alpha}^{\beta}=$$

$$=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)}=\frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}{2(\beta-\alpha)}=\frac{\beta+\alpha}{2}$$

$$D[X]=M[X^2]-m_x^2$$

$$M[X^2]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{x^2}{\beta-\alpha}dx=\left.\frac{x^3}{3(\beta-\alpha)}\right|_{\alpha}^{\beta}=$$

$$=\frac{\beta^3-\alpha^3}{3(\beta-\alpha)}=\frac{(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)}{3(\beta-\alpha)}=\frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3}$$

$$D[X]=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3}=$$

$$=\frac{4\beta^2+4\alpha\beta+4\alpha^2-3\alpha^2-6\alpha\beta-3\beta^2}{12}=$$

$$=\frac{\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2}{12}=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

Тогда среднеквадратичное отклонение будет иметь вид:

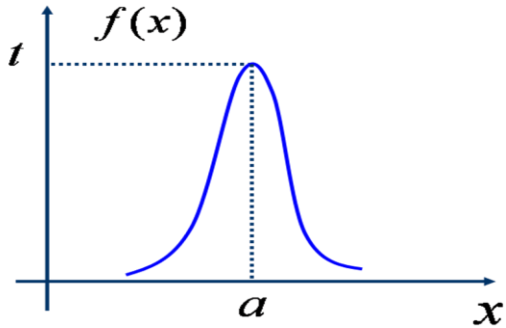
$$\sigma_x=\sqrt{D[X]}=\frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{3}}$$

Нормальное (Гауссово) распределение

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по нормальному закону с параметрами a, $\sigma>0$, если она имеет плотность вероятности

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Кривая распределение случайной величины, имеет вид:



$$t=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Задание 1. Составить закон распределения дискретной случайной величины *X*, вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины.

Вариант 1.

ОТК проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равно 0,7. Проверено 20 изделий. Найти закон распределения случайной величины X – числа стандартных изделий среди проверенных. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины.

Вариант 2.

В урне 4 шара, на которых указаны очки 2; 4; 5; 5. Наудачу вынимается шар. Найти закон распределения случайной величины X – числа очков на нем. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины.

Вариант 3.

Охотник стреляет по дичи до попадания, но может сделать не более трех выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Составить закон распределения случайной величины X – числа выстрелов сделанных стрелком. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины.

Вариант 4.

Вероятность превысить заданную точность при измерении равна 0,4. Составить закон распределения случайной величины X – число ошибок при 10 измерениях. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины.

Вариант 5.

Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,45. Произведено 20 выстрелов. Составить закон распределения случайной величины X – числа попаданий. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины.

Вариант 6.

Изделия некоторого завода содержит 5% брака. Составить закон распределения случайной величины X – числа бракованных изделий среди пяти взятых на удачу. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины.

Вариант 7.

Нужные сборщику детали находятся в трех из пяти ящиков. Сборщик вскрывает ящики до тех пор пока не найдет нужные детали. Составить закон распределения случайной величины X – числа вскрытых ящиков. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины.

Вариант 8.

В урне 3 черных и 2 белых шара. Производится последовательное без возвращения извлечение шаров до появления черного. Составить закон распределения случайной величины X – числа извлеченных шаров. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины.

Вариант 9.

Студент знает 15 вопросов из 20. В билете 3 вопроса. Составить закон распределения случайной величины X – числа известных студенту вопросов в билете. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины.

Вариант 10.

Имеется 3 лампочки, каждая из которых с вероятностью 0,4 имеет дефект. При включении дефектная лампочка перегорает и заменяется другой. Составить закон распределения случайной величины X – числа испробованных ламп. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины.

Задание 2. Случайная величина *X* задана функцией распределения *F(X)*. Найти плотность распределения, математическое ожидание, дисперсию, а также вероятность попадания случайной величины в интервал *(α,β)*. Построить графики функций *F(X)* и *f(X)*.

Вариант 1.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}\qquad (-1;0,5)$$

Вариант 2.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \dfrac{(x^2-x)}{2}, & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}\qquad (0,5;1,5)$$

Вариант 3.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^3, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}\qquad (-0,5;0,5)$$

Вариант 4.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 3x^2+2x, & 0<x\le \dfrac{1}{3},\\ 1, & x>\dfrac{1}{3}.\end{cases}\qquad (0,1;1)$$

Вариант 5.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ 0,5x^2-2x, & 2<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}\qquad (2,5;5)$$

Вариант 6.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{9}, & 0<x\le 3,\\ 1, & x>3. \end{cases} \qquad (-0,5;2)$$

Вариант 7.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2. \end{cases} \qquad (-1;1)$$

Вариант 8.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{16}, & 0<x\le 4,\\ 1, & x>4. \end{cases} \qquad (-1;2)$$

Вариант 9.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{4}, & 1<x\le 5,\\ 1, & x>5. \end{cases} \qquad (0,5;3)$$

Вариант 10.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ x^3+2x, & 0<x\le 2,\\ 2, & x>1. \end{cases} \qquad (0;3)$$

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Классическое определение вероятности
2. Элементы комбинаторики. Размещение. Примеры
3. Элементы комбинаторики. Перестановка. Примеры
4. Элементы комбинаторики. Сочетания. Примеры
5. Теорема о сумме вероятностей
6. Теорема умножения вероятностей
7. Операции над событиями
8. Формула полной вероятности
9. Формула Байеса
10. Повторение испытаний. Формула Бернулли
11. Дискретные случайные величины. Ряд распределения. Пример
12. Математическое ожидание дискретной случайной величины
13. Дисперсия дискретной случайной величины
14. Биномиальное распределение случайной величины
15. Распределение Пуассона
16. Распределение по закону геометрической прогрессии
17. Непрерывные случайные величины. Функция распределения и ее свойства
18. Плотность вероятности и ее свойства
19. Математическое ожидание непрерывной случайной величины
20. Дисперсия непрерывной случайной величины
21. Равномерное распределение непрерывной случайной величины
22. Нормальный закон распределения

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Е.С.. Теория вероятностей, М., Наука, 1969
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., Высшая школа, 1975
3. Гмурман В.Е.. Теория вероятностей и математическая статистика, М., Высшая школа, 1972