МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

ТИПОВЫЕ РАСЧЁТЫ

• ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ •

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

ТИПОВЫЕ РАСЧЁТЫ

Методические указания и контрольные задания
для студентов инженерно-технических специальностей вузов

Тамбов
Издательство ТГТУ
2008

УДК 51
ББК В12я73
Л793

Рекомендовано Редакционно-издательским советом ТГТУ

Рецензент

Кандидат физико-математических наук, доцент ТГТУ
В.В. Васильев

Составители:

Е.С. Лоскутова,
А.Д. Нахман

Л793 Математическая логика. Типовые расчёты : методические указания и контрольные задания / сост. : Е.С. Лоскутова, А.Д. Нахман. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2008. – 28 с. – 200 экз.

Приведены основные понятия и утверждения математической логики (алгебры высказываний), руководство к решению типовых задач и образцы решений. Предложены варианты контрольных заданий.

Предназначены для студентов инженерно-технических специальностей вузов.

УДК 51
ББК В12я73

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

ТИПОВЫЕ РАСЧЁТЫ

Методические указания и контрольные задания

Составители:

ЛОСКУТОВА Екатерина Сергеевна,
НАХМАН Александр Давидович

Редактор Т.М. Глинкина
Компьютерное макетирование Т.Ю. Зотовой

Подписано в печать 18.09.2008
Формат 60 × 84 / 16. 1,63 усл. печ. л. Тираж 200 экз. Заказ 395

Издательско-полиграфический центр ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1. Понятие высказывания

Определение 1. Высказывание – это повествовательное предложение, о содержании которого можно сказать, истинно оно или ложно.

Обозначения: A, B, C, … .

На множестве всех высказываний определена функция истинности:

$$\lambda(A) = \begin{cases} 1, \text{ если } A \text{ – истина;} \\ 0, \text{ если } A \text{ – ложь.} \end{cases}$$

Определение 2. Значение $\lambda(A)$ называется логическим значением или значением истинности высказывания A.

1.2. Логические операции над высказываниями

Над высказываниями определяются следующие логические операции (логические связки):

1) отрицание («не») есть операция перехода от высказывания A к высказыванию $\bar{A}$ ($\neg A$), которое истинно тогда и только тогда, когда A ложно;

2) конъюнкция («и») есть операция перехода от высказываний A и B к составному высказыванию $A \wedge B$, которое истинно тогда и только тогда, когда A и B истинны одновременно;

3) дизъюнкция («или») – переход к составному высказыванию $A \vee B$, которое является истинным, если истинно хотя бы одно из высказываний A и B;

4) импликация («если …, то») – переход к составному высказыванию $A \rightarrow B$, ложному, когда A истинно и B ложно, и истинному в остальных случаях;

5) эквиваленция («необходимо и достаточно», «тогда и только тогда») приводит к составному высказыванию $A \leftrightarrow B$, которое истинно, если A и B одновременно истинны или одновременно ложны;

6) альтернативная дизъюнкция: $A \Delta B$ – истинно, когда ровно одно из высказываний A и B истинно, в других случаях – ложно.

1.3. Формулы алгебры высказываний

Определение 1. Пропозиционной переменной называется переменная, вместо которой можно подставлять конкретные высказывания.

Обозначения: X, Y, Z, …

Определение 2. Формула – это всякий объект, который построен по следующим правилам.

1. Всякая пропозиционная переменная – это формула.
2. Если F и G – формулы, то $\neg F$, $F \vee G$, $F \wedge G$, $F \rightarrow G$, $F \leftrightarrow G$, $F \Delta G$ тоже являются формулами.
3. Других формул нет.

Замечание 1. При записи формул необходимы приоритеты (очерёдность выполнения операций). Такие приоритеты обозначаются скобками. При их отсутствии сначала выполняется отрицание, затем конъюнкция, дизъюнкция, потом импликация и эквиваленция. Внешние скобки обычно опускают.

Определение 3. Формула называется тождественно истинной или тавтологией (тождественно ложной или противоречием), если при любом наборе значений пропозиционных переменных, входящих в нее, она обращается в истинное (ложное) высказывание.

Определение 4. Формула называется выполнимой (опровержимой), если существует такой набор значений пропозиционных переменных, который обращает эту формулу в истинное (ложное) высказывание.

1.4. Таблицы истинности

Мы определили функцию истинности на пропозиционных переменных, но тем самым она определена на любой формуле, поскольку всякая формула F на каждом наборе переменных принимает значение истины или лжи, а значит, соответственно на всяком наборе $\lambda(F) = 1$ или $\lambda(F) = 0$.

Определение 1. Таблицей истинности формулы называют таблицу, связывающую логические значения пропозиционных переменных и логическое значение формулы.

1.5. Равносильность формул

Определение 1. Две формулы F и G называются равносильными, если на любом наборе пропозиционных переменных $\lambda(F) = \lambda(G)$.

Обозначения: $F \equiv G$.

Теорема 1 (*критерий равносильности*). $F \equiv G$ тогда и только тогда, когда формула $F \leftrightarrow G$ является тавтологией.

Обозначим через E тождественную истину и через $\varnothing$ – тождественную ложь.

Основные равносильности алгебры высказываний:

1) коммутативность:

$X \vee Y \equiv Y \vee X$; (1)

$X \wedge Y \equiv Y \wedge X$; (2)

2) ассоциативность:

$X \vee (Y \vee Z) \equiv (X \vee Y) \vee Z$; (3)

4) $X \wedge E \equiv X$; $X \vee E \equiv E$; (7)

5) $X \wedge \varnothing \equiv \varnothing$; $X \vee \varnothing \equiv X$; (8)

6) $X \vee X \equiv X$; $X \wedge X \equiv X$; (9)

7) законы де Моргана:

$\overline{X \vee Y} \equiv \overline{X} \wedge \overline{Y}$; (10)

$X \wedge (Y \wedge Z) \equiv (X \wedge Y) \wedge Z$; (4)

3) дистрибутивность:

$X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$; (5)

$X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$; (6)

$\overline{X \wedge Y} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$; (11)

8) $(X \rightarrow Y) \equiv (\overline{X} \vee Y)$; …(12)

$(X \leftrightarrow Y) \equiv (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$; (13)

9) законы поглощения:

$X \wedge (Y \vee X) \equiv X$; (14)

$X \vee (Y \wedge X) \equiv X$; (15)

10) закон исключенного третьего:

$X \wedge \overline{X} \equiv \varnothing$; (16)

$X \vee \overline{X} \equiv E$;…(17)

11) закон двойного отрицания:

$\overline{\overline{X}} \equiv X$. (18)

1.6. Нормальные формы формул алгебры высказываний

Обозначим $x^{\sigma} = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1; \\ \overline{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$

Определение 1. Элементарной конъюнкцией (конъюнктом) называется формула вида: $K = x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n}$, а элементарной дизъюнкцией (дизъюнктом) – формула вида: $D = x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee ... \vee x_n^{\sigma_n}$.

Определение 2. Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция конечного количества элементарных конъюнкций.

Определение 3. Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция конечного количества элементарных дизъюнкций.

ДНФ и КНФ не единственны. Условимся в качестве ответа принимать ту ДНФ (КНФ) из всех возможных, которая содержит наименьшее количество логических операций.

1.7. Совершенные нормальные формы формул алгебры высказываний

Определение 1. Элементарная конъюнкция (дизъюнкция) называется правильной, если в её составе нет одинаковых переменных.

Определение 2. Дизъюнкт (конъюнкт) является полным, относительно некоторого набора переменных, если в его составе представлены все переменные этого набора.

Определение 3. СДНФ (СКНФ) данной формулы *F* называется такая её ДНФ (КНФ), которая не содержит одинаковых конъюнктов (дизъюнктов), каждый конъюнкт (дизъюнкт) правилен и обладает свойством полноты.

Теорема 1. Любая формула *F*, не являющаяся тождественной ложью, обладает единственной СДНФ.

Теорема 2. Любая формула *F*, не являющаяся тавтологией, обладает единственной СКНФ.

Алгоритм перехода от таблицы истинности формулы к её записи в виде СДНФ(*СКНФ*):

1) выбрать в таблице такие наборы исходных переменных, на которых истинностное значение формулы равно 1 (0);
2) записать элементарные конъюнкции (дизъюнкции) для выбранных наборов переменных; при этом необходимо руководствоваться следующим правилом: если значение входной переменной в наборе – единичное, то она записывается в прямой форме (форме отрицания), если же значение переменной – нулевое, то – в форме отрицания (прямой форме);
3) полученные конъюнкты (дизъюнкты) объединить между собой знаками дизъюнкции (конъюнкции).

1.8. Логическое следование

Определение 1. Говорят, что формула *Q* логически следует из формулы *P*, если *Q* принимает значение истины на всяком наборе пропозиционных переменных, на котором значение истины принимает формула *P*.

Другими словами, если $\lambda(P) = 1$, то $\lambda(Q) = 1$.

Обозначения: $P \vdash Q$.

Теорема 1. *Q* логически следует из *P* тогда и только тогда, когда $P \rightarrow Q$ – тавтология.

Теорема 2 (*метод резолюций*). Имеет место логическое следование

$$(P \vee Q) \wedge (R \vee \overline{Q}) \vdash P \vee R.$$

1.9. Логическое следование из группы формул

Определение 1. Говорят, что формула *Q* следует логически из формул $P_1, P_2, \ldots, P_n$, если $\lambda(Q) = 1$, при всех тех значениях переменных, при которых $\lambda(P_j) = 1$ ($j = 1, 2, ..., n$), т.е. *Q* принимает значения истины на каждом наборе переменных, на котором истинно каждое из $P_1, P_2, \ldots, P_n$ одновременно.

Обозначения: $(P_1 \ldots P_n) \vdash Q$.

Теорема. Логическое следование $(P_1 \ldots P_n) \vdash Q$ имеет место тогда и только тогда, когда $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \rightarrow Q$ является тавтологией.

Алгоритм получения всех неравносильных между собой логических следствий данной формулы F, не являющейся тавтологией:

1) для формулы *F* построить СКНФ;
2) выписать все полные правильные дизъюнкты;
3) построить всевозможные их конъюнкции.

Указанный набор конъюнкций и самих дизъюнктивных одночленов оказывается искомым набором всех логических следствий данной формулы F.

Алгоритм получения всех неравносильных между собой посылок для данной формулы F, не являющейся тавтологией:

1) для формулы F построить СКНФ;
2) выписать все недостающие правильные дизъюнкты;
3) построить всевозможные их конъюнкции с данной формулой F.

Указанный набор конъюнкций оказывается искомым набором всех логических посылок данной формулы F.

1.10. Применение аппарата алгебры высказываний для анализа и синтеза цифровых устройств

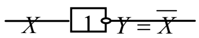
Элементной базой современных цифровых устройств и систем являются цифровые интегральные схемы.

Определение 1. Цифровая интегральная схема – это микроэлектронное изделие, изготовленное методами интегральной технологии (чаще полупроводниковой), заключенное в самостоятельный корпус и выполняющее определенную функцию преобразования дискретных цифровых сигналов.

Для описания работы цифровых интегральных схем, а, следовательно, и устройств, построенных на их основе, используется математический аппарат алгебры высказываний. Возможность его применения для решения задач анализа и синтеза цифровых устройств обусловлена аналогией понятий и категорий этой алгебры и двоичной системы счисления, которая положена в основу представления преобразуемых устройством сигналов.

Простейшие преобразования над цифровыми сигналами осуществляют цифровые интегральные схемы, получившие названия логических элементов.

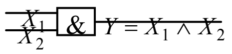
Определение 2. Электронный логический элемент, реализующий *отрицание* в виде определенных уровней электрических сигналов, называют *инвертором* или логическим элементом «*НЕ*».

Обозначения: 

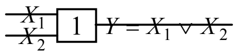
Вход логического элемента изображен слева, выход – справа. На выходной линии, в месте соединения ее с прямоугольником, изображается кружок – *символ инверсии*.

На языке цифровой техники инверсия означает, что выходной сигнал противоположен входному.

Определение 3. Логический элемент, реализующий операцию *конъюнкции*, называют *конъюнктором* или логическим элементом «*И*».

Обозначения: 

Определение 4. Логический элемент, реализующий операцию дизъюнкции, называют *дизъюнктором* или логическим элементом «*ИЛИ*».

Обозначения: 

Определение 5. *Комбинационным цифровым устройством* называется устройство, выходные сигналы которого однозначно определяются лишь сигналами, действующими (в тот же момент времени) на его входах.

В общем случае проектируемое устройство может быть представлено в виде черного ящика, имеющего n входов и m выходов. Изначально об этом черном ящике известен лишь требуемый алгоритм его функционирования, т.е. характер связи между входными воздействиями и выходными сигналами (реакциями). Проектирование сводится к определению оптимальной структуры (схемы) цифрового устройства, реализуемой в заданном базисе логических элементов. Поскольку требуемый алгоритм функционирования, в общем случае, может быть реализован с помощью различных схем, то должна быть определена некоторая оптимальная схема, например схема, отличающаяся минимумом аппаратурных затрат, т.е. минимальным числом логических элементов.

1.11. Нечёткие высказывания

Определение 1. Пусть задано некоторое непустое множество X. Нечетким называется множество A, определенное как множество пар вида: $A = \{(x,\ \mu(x)),\ x \in X\}$, где $\mu : X \to [0;\ 1]$.

Множество X называется базовым множеством, а функция $\mu(x)$ называется функцией принадлежности (к X).

Замечание 1. Значения функции принадлежности формируются субъективно и могут иметь различный вид для одного и того же субъекта при различных обстоятельствах и настроениях.

Определение 2. Высказывание A называется нечётким, если мера (степень) его истинности определяется функцией принадлежности $\mu_A(x)$, заданной на множестве X = {«ложь», «истина»}.

Любое оценочное суждение, основанное на неполных или недостоверных данных, является нечётким и сопровождается обычно выражением степени уверенности (или сомнения) в его истинности. Например, утверждение: «Скорее всего завтра похолодает».

Замечание 2. Чёткое истинное высказывание характеризуется функцией принадлежности μ_A («истина») = 1. Соответственно, ложное высказывание характеризуется функцией принадлежности μ_A («истина») = 0.

1.12. Логические операции над нечёткими высказываниями

Нечёткие высказывания могут быть простыми и составными. Составные высказывания образуются из простых с помощью логических операций, называемых также логическими связками.

1. Результатом отрицания нечёткого высказывания A называется нечеткое высказывание $\bar{A}$ ($\neg A$), степень истинности которого определяется выражением: $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

2. Результатом конъюнкции нечётких высказываний A и B называется нечеткое высказывание $A \wedge B$, степень истинности которого определяется выражением: $\mu_{A \wedge B}(x) = \min\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$; т.е. степень истинности нечёткого высказывания $A \wedge B$ определяется наименее истинным высказыванием.

3. Дизъюнкция нечетких высказываний A и B приводит к нечёткому высказыванию $A \vee B$, степень истинности которого определяется выражением: $\mu_{A \vee B}(x) = \max\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$; т.е. степень истинности нечёткого высказывания A∨B определяется наиболее истинным высказыванием.

4. Степень истинности «нечеткой импликации» $A \rightarrow B$ нечётких высказываний A и B определяется выражением: $\mu_{A \rightarrow B}(x) = \max\{1 - \mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$.

5. Эквиваленция нечётких высказываний A и B приводит к нечёткому высказыванию $A \leftrightarrow B$, степень истинности которого определяется выражением: $\mu_{A \leftrightarrow B}(x) = \min\{\max\{1 - \mu_A(x),\ \mu_B(x)\},\ \ \max\{\mu_A(x),\ 1 - \mu_B(x)\}\}$.

2. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ТИПОВОГО РАСЧЁТА

1. *Приведите пример составного высказывания, которое можно было бы записать в следующем виде. Определите его значение истинности.*

1. $(A \rightarrow B) \vee (C \wedge \overline{B})$;	16. $(A \wedge B) \vee (C \wedge \overline{B})$;
2. $(A \rightarrow \overline{B}) \leftrightarrow (C \wedge B)$;	17. $(A \vee B) \wedge (C \vee \overline{B})$;
3. $\overline{B} \vee (C \rightarrow (B \wedge A)\ )$;	18. $(A \leftrightarrow B) \wedge (C \vee \overline{B})$;
4. $(A \rightarrow B) \vee \overline{(C \wedge B)}$;	19. $((A \vee B) \leftrightarrow C) \wedge \overline{B}$;
5. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (C \vee \overline{B})$;	20. $\overline{(A \rightarrow B)} \vee (C \rightarrow \overline{B})$;
6. $(A \rightarrow \overline{B}) \vee (C \rightarrow B)$;	21. $(A \wedge (B \rightarrow C)) \leftrightarrow \overline{B}$;
7. $\overline{B} \vee (\overline{A} \rightarrow (C \wedge B))$;	22. $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge \overline{B})$;
8. $\overline{B} \vee (A \rightarrow \overline{(C \wedge B)})$;	23. $(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow \overline{B})$;
9. $\overline{B} \leftrightarrow (\overline{A} \rightarrow (C \wedge B))$;	24. $(A \vee B) \rightarrow (C \vee \overline{B})$;
10. $(A \wedge (C \rightarrow B)) \leftrightarrow \overline{B}$;	25. $\overline{(A \wedge B)} \rightarrow (C \wedge \overline{B})$;
11. $\overline{(A \vee (C \leftrightarrow \overline{B})}$;	26. $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (C \leftrightarrow \overline{B})$;
12. $(C \vee \overline{B}) \wedge (A \leftrightarrow B)$;	27. $(A \vee B \vee C) \rightarrow (C \wedge \overline{B})$;
13. $(A \vee (C \rightarrow \overline{B})) \leftrightarrow B$;	28. $(A \wedge B \wedge C) \vee (C \wedge \overline{B})$;
14. $(A \leftrightarrow B) \vee (C \leftrightarrow \overline{B})$;	29. $(A \wedge B \wedge \overline{C}) \leftrightarrow (C \wedge \overline{B})$;
15. $\overline{(A \vee \overline{(C \wedge \overline{B})})}$;	30. $\overline{(A \rightarrow B)} \vee \overline{(C \rightarrow \overline{B})}$.

2. *Приведите пример нечёткого высказывания.*

3. *Вычислите степень истинности составного нечеткого высказывания при условии, что* $\mu_A(x) = 0{,}7$, $\mu_B(x) = 0{,}4$, $\mu_C(x) = 0{,}9$.

1. $(A \wedge B) \vee (C \wedge \overline{B})$;	8. $(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow \overline{B})$;
2. $(A \vee B) \wedge (C \vee \overline{B})$;	9. $(A \vee B) \rightarrow (C \vee \overline{B})$;
3. $(A \leftrightarrow B) \wedge (C \vee \overline{B})$;	10. $\overline{(A \wedge B)} \rightarrow (C \wedge \overline{B})$;
4. $((A \vee B) \leftrightarrow C) \wedge \overline{B}$;	11. $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (C \leftrightarrow \overline{B})$;
5. $\overline{(A \rightarrow B)} \vee (C \rightarrow \overline{B})$;	12. $(A \vee B \vee C) \rightarrow (C \wedge \overline{B})$;
6. $(A \wedge (B \rightarrow C)) \leftrightarrow \overline{B}$;	13. $(A \wedge B \wedge C) \vee (C \wedge \overline{B})$;
7. $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge \overline{B})$;	14. $(A \wedge B \wedge \overline{C}) \leftrightarrow (C \wedge \overline{B})$;
15. $\overline{(A \rightarrow B)} \vee \overline{(C \rightarrow \overline{B})}$;	23. $\overline{B} \vee (A \rightarrow \overline{(C \wedge B)})$;
16. $(A \rightarrow B) \vee (C \wedge \overline{B})$;	24. $\overline{B} \leftrightarrow (\overline{A} \rightarrow (C \wedge B))$;
17. $(A \rightarrow \overline{B}) \leftrightarrow (C \wedge B)$;	25. $(A \wedge (C \rightarrow B)) \leftrightarrow \overline{B}$;
18. $\overline{B} \vee (C \rightarrow (B \wedge A)$;	26. $\overline{A \vee (C \leftrightarrow \overline{B})}$;

19. $(A\to B)\vee\overline{(C\wedge B)}$;

20. $(A\to B)\leftrightarrow(C\vee\overline{B})$;

21. $(A\to\overline{B})\vee(C\to B)$;

22. $\overline{B}\vee(\overline{A}\to(C\wedge B))$;

27. $(C\vee\overline{B})\wedge(A\leftrightarrow B)$;

28. $(A\vee(C\to\overline{B}))\leftrightarrow B$;

29. $(A\leftrightarrow B)\vee(C\leftrightarrow\overline{B})$;

30. $\overline{A\vee\overline{(C\wedge\overline{B})}}$.

4. *Составьте таблицу истинности для формулы алгебры высказываний. Укажите вид формулы.*

1. $\overline{((\overline{Y}\vee\overline{Z})\leftrightarrow X)\wedge(\overline{X}\wedge(Y\to\overline{Z}))}$;
2. $((X\to Y)\wedge(Y\to\overline{X})\wedge(\overline{Z}\vee\overline{Y}))\to(\overline{X}\vee\overline{Y})$;
3. $((X\wedge Y\wedge Z)\vee((X\to\overline{Y})\wedge\overline{Z}))\leftrightarrow\overline{X}$;
4. $(((\overline{X}\wedge\overline{Z})\vee(X\wedge Z))\wedge\overline{Y})\to(X\leftrightarrow Y)$;
5. $\overline{\overline{X}\leftrightarrow((Y\vee\overline{Z})\to\overline{(X\vee\overline{Y})})}$;
6. $((X\wedge(Y\to Z))\vee\overline{(X\vee\overline{Z})})\leftrightarrow\overline{(\overline{Y}\leftrightarrow Z)}$;
7. $((X\leftrightarrow(Y\vee\overline{Z}))\wedge\overline{X})\to((X\vee\overline{Y})\leftrightarrow Z)$;
8. $\overline{((\overline{Y}\vee\overline{Z})\leftrightarrow X)\wedge(\overline{X}\vee(Y\to\overline{Z}))}$;
9. $((\overline{X}\to Y)\vee(\overline{Y}\wedge Z))\leftrightarrow\overline{((X\to Z)\vee Y)}$;
10. $\overline{((X\vee Y\vee\overline{Z})\to(\overline{X}\to Y))}\vee\overline{Y}$;
11. $\overline{((X\to\overline{Y})\to Z)}\leftrightarrow((Y\to\overline{X})\to\overline{Z})$;
12. $\overline{((Y\wedge Z)\leftrightarrow\overline{X})\vee(X\vee(\overline{Y}\to Z))}$;
13. $(((\overline{(X\vee Y)}\wedge Z)\to\overline{X})\vee\overline{Y})\wedge\overline{Z}$;
14. $((\overline{Y}\leftrightarrow(X\vee Y\vee Z))\to\overline{X})\to\overline{(Y\wedge Z)}$;
15. $((X\to\overline{Y})\vee Z)\wedge(\overline{(X\wedge Y)}\leftrightarrow\overline{Z})$;
16. $((X\wedge\overline{Y})\to(\overline{Z}\leftrightarrow Y))\vee(\overline{X}\vee(Y\to Z))$;
17. $(((Y\wedge Z)\vee\overline{X})\wedge\overline{Y})\leftrightarrow(\overline{(X\to Y)}\to Z)$;
18. $(X\to\overline{(\overline{Z}\leftrightarrow Y)})\leftrightarrow\overline{(Y\to(\overline{X}\vee Z))}$;
19. $(\overline{X}\vee(\overline{Y}\to Z)\vee(\overline{Z}\wedge Y))\leftrightarrow(\overline{Z}\to\overline{X})$;
20. $\overline{(X\vee Y)}\to((\overline{X}\wedge\overline{Y}\wedge Z)\leftrightarrow(\overline{X}\to Y))$;
21. $Y\to(\overline{Z}\leftrightarrow(\overline{X}\to(\overline{(Y\vee Z)}\wedge X)))$;
22. $((X\leftrightarrow\overline{Z})\to(Y\vee Z\vee\overline{X}))\to(\overline{Y}\wedge X)$;
23. $\overline{Y}\leftrightarrow((\overline{X}\to(Z\wedge\overline{Y}))\to(X\wedge\overline{(Y\vee Z)}))$;
24. $(\overline{X}\leftrightarrow(\overline{Z}\to(X\vee Y))\wedge(X\leftrightarrow\overline{(Z\to Y)})$;
25. $(((X\wedge Y)\to\overline{Z})\leftrightarrow((\overline{X}\vee\overline{Y})\to Z))\vee\overline{X}$;
26. $\overline{((\overline{X}\wedge Z)\vee Y)}\to(\overline{Y}\to(Z\leftrightarrow(X\wedge Y)))$;
27. $((X\wedge Z)\leftrightarrow(\overline{X}\vee\overline{Z}))\to\overline{(X\leftrightarrow(Y\to Z))}$;
28. $((Y\vee\overline{Z})\wedge(Y\to\overline{X})\wedge(\overline{Y}\leftrightarrow X))\to Y$;
29. $\overline{(\overline{Z}\vee(X\leftrightarrow\overline{Y})\vee(X\to Y))}\wedge(Y\to\overline{Z})$;
30. $\overline{\overline{X}\vee((X\leftrightarrow((Y\to Z)\wedge(Z\to\overline{Y})))\leftrightarrow Y)}$.

5. *С помощью равносильных преобразований упростите формулу.*

1. $((\overline{X}\leftrightarrow\overline{Y})\to(\overline{X}\vee\overline{Y}))\wedge X$;
2. $(X\leftrightarrow\overline{Y})\to(X\to(X\wedge\overline{Y}))$;
3. $(Y\to X)\to(\overline{X}\to(Y\to X))$;
4. $\overline{Y}\to((\overline{Y}\to X)\wedge(X\to Y))$;
6. $((X\leftrightarrow Y)\to(X\to Y))\wedge Y$;
7. $\overline{(\overline{X}\to Y)\to((\overline{X}\to\overline{Y})\to X)}$;
8. $((X\to Y)\wedge(X\to\overline{Y}))\to\overline{X}$;
9. $(X\to\overline{Y})\to((X\to Y)\to\overline{X})$;

5. $(Y \leftrightarrow X) \to (X \to (X \wedge Y))$;

10. $((X \wedge \overline{Y}) \to Y) \to (X \to Y)$;

Преобразуйте данную формулу равносильным образом так, чтобы она содержала только операции отрицания и конъюнкции.

11. $\overline{(X \to (Y \to \overline{X}))} \to (Y \to \overline{X})$;
12. $(X \to Y) \leftrightarrow (Y \to X)$;
13. $(X \to Y) \vee (X \to (Y \wedge X))$;
14. $(X \to Y) \vee (\overline{X} \to (Y \wedge X))$;
15. $(Y \to (\overline{X} \to (Y \wedge X))) \vee X$;
16. $((Y \vee X) \leftrightarrow X) \wedge (Y \to X)$;
17. $(X \to \overline{Y}) \wedge (\overline{X} \to (Y \wedge \overline{X}))$;
18. $(X \leftrightarrow \overline{Y}) \to (X \to (\overline{X} \wedge Y))$;
19. $(X \to Y) \vee (X \to (Y \wedge X))$;
20. $\overline{((X \to Y) \wedge (\overline{X} \to \overline{Y}))} \wedge \overline{X}$;

Преобразуйте данную формулу равносильным образом так, чтобы она содержала только операции отрицания и конъюнкции.

21. $((X \leftrightarrow Y) \to (X \vee Y)) \wedge \overline{X}$
22. $((X \to Y) \wedge (Y \to \overline{X})) \to Y$
23. $(X \to \overline{Y}) \wedge (\overline{X} \to (Y \wedge \overline{X}))$
24. $\overline{X} \wedge ((\overline{Y} \to X) \wedge (X \to Y))$
25. $(Y \leftrightarrow X) \wedge (X \to (X \wedge Y))$
26. $((X \leftrightarrow Y) \to (X \to \overline{Y})) \wedge Y$
27. $((\overline{X} \leftrightarrow \overline{Y}) \to (X \to \overline{Y})) \wedge X$;
28. $(Y \to X) \wedge (\overline{X} \to (Y \to X))$;
29. $\overline{((\overline{X} \wedge \overline{Y}) \to Y)} \wedge (X \to Y)$;
30. $\overline{(X \to \overline{Y})} \wedge ((\overline{X} \to Y) \to \overline{X})$.

6. *Приведите равносильными преобразованиями следующую формулу к ДНФ.*

1. $((X \leftrightarrow \overline{Y}) \vee Z) \wedge Y$;
2. $((X \to Y) \to Z) \to \overline{X}$;
3. $(X \leftrightarrow Z) \to (X \wedge \overline{Y})$;
4. $(\overline{X} \wedge Z) \vee (Y \to Z)$;
5. $\overline{(X \wedge Y)} \vee \overline{(Z \to Y)}$;
6. $X \to (Y \leftrightarrow Z)$;
7. $\overline{(X \vee (Y \leftrightarrow \overline{Z}))}$;
8. $(X \leftrightarrow Y) \vee (\overline{Y} \wedge Z)$;
9. $(X \vee (Y \to Z)) \to X$;
10. $(X \wedge Y) \vee ((X \to \overline{Y}) \wedge \overline{Z})$;
11. $(X \leftrightarrow Y) \wedge (\overline{Y} \vee Z)$;
12. $(X \wedge Y) \vee (Y \leftrightarrow Z)$;
13. $\overline{(\overline{(X \wedge Y)} \to Y)} \to (\overline{X} \wedge Z)$;
14. $((X \leftrightarrow \overline{Y}) \vee Z) \wedge Y$;
15. $(X \leftrightarrow Y) \to (\overline{X} \vee Z)$;
16. $((\overline{X} \leftrightarrow Y) \vee Z) \wedge \overline{Y}$;
17. $\overline{(\overline{(\overline{X} \wedge Y)} \to Y)} \to (X \wedge \overline{Z})$
18. $(X \wedge Z) \vee (\overline{Y} \leftrightarrow Z)$;
19. $(X \leftrightarrow Y) \wedge (\overline{X} \vee Z)$;
20. $(Z \wedge Y) \vee ((Z \to \overline{Y}) \wedge \overline{X})$;
21. $((Z \to Y) \vee \overline{X}) \to \overline{X}$;
22. $(\overline{Y} \wedge X) \vee (Z \leftrightarrow Y)$;
23. $\overline{X} \wedge \overline{(Y \leftrightarrow Z)}$;
24. $Y \to (\overline{X} \leftrightarrow Z)$;
25. $\overline{(X \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{Z} \to Y)}$;
26. $(\overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vee (X \to \overline{Z})$;
27. $(Y \leftrightarrow X) \to (Y \wedge \overline{Z})$;
28. $(X \leftrightarrow Y) \to (\overline{X} \vee Z)$;
29. $((\overline{Z} \leftrightarrow Y) \vee \overline{X}) \wedge \overline{Y}$;
30. $((\overline{X} \to Z) \to Y) \to X$.

7. *Приведите равносильными преобразованиями следующую формулу к КНФ.*

1. $((\overline{X} \leftrightarrow Y) \vee Z) \wedge \overline{Y}$;
2. $\overline{(\overline{(\overline{X} \wedge Y)} \to Y)} \to (X \wedge \overline{Z})$;
3. $\overline{(\overline{(X \wedge Y)} \to Y)} \to (\overline{X} \wedge Z)$;
4. $(X \wedge Z) \vee (\overline{Y} \leftrightarrow Z)$;
5. $(X \leftrightarrow Y) \wedge (\overline{X} \vee Z)$;
6. $(Z \wedge Y) \vee ((Z \to \overline{Y}) \wedge \overline{X})$;
7. $((Z \to Y) \vee \overline{X}) \to \overline{X}$;
8. $(\overline{Y} \wedge X) \vee (Z \leftrightarrow Y)$;
9. $\overline{X} \wedge \overline{(Y \leftrightarrow Z)}$;
10. $Y \to (\overline{X} \leftrightarrow Z)$;
11. $\overline{(X \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{Z} \to Y)}$;
18. $((X \to Y) \to Z) \to \overline{X}$;
19. $(X \leftrightarrow Z) \to (X \wedge \overline{Y})$;
20. $(\overline{X} \wedge Z) \vee (Y \to Z)$;
21. $\overline{(X \wedge Y)} \vee \overline{(Z \to Y)}$;
22. $X \to (Y \leftrightarrow Z)$;
23. $\overline{X \vee (Y \leftrightarrow \overline{Z})}$;
24. $(X \leftrightarrow Y) \vee (\overline{Y} \wedge Z)$;

12. $(\overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vee (X \to \overline{Z})$;

13. $(Y \leftrightarrow X) \to (Y \wedge \overline{Z})$;

14. $(X \leftrightarrow Y) \to (\overline{X} \vee Z)$;

15. $((\overline{Z} \leftrightarrow Y) \vee \overline{X}) \wedge \overline{Y}$;

16. $((\overline{X} \to Z) \to Y) \to X$;

17. $((X \leftrightarrow \overline{Y}) \vee Z) \wedge Y$;

25. $(X \vee (Y \to Z)) \to X$;

26. $(X \wedge Y) \vee ((X \to \overline{Y}) \wedge \overline{Z})$;

27. $(X \leftrightarrow Y) \wedge (\overline{Y} \vee Z)$;

28. $(X \wedge Y) \vee (Y \leftrightarrow Z)$;

29. $((X \leftrightarrow \overline{Y}) \vee Z) \wedge Y$;

30. $(X \leftrightarrow Y) \to (\overline{X} \vee Z)$.

8. *Применяя равносильные преобразования, найдите СДНФ и СКНФ для данной формулы. Проверьте полученные формы с помощью таблицы истинности.*

1. $((X \to Y) \to Z) \to \overline{X}$;
2. $(X \leftrightarrow Z) \to (X \wedge \overline{Y})$;
3. $(\overline{X} \wedge Z) \vee (Y \to Z)$;
4. $\overline{(X \wedge Y)} \vee \overline{(Z \to Y)}$;
5. $X \to (Y \leftrightarrow Z)$;
6. $\overline{X \vee (Y \leftrightarrow \overline{Z})}$;
7. $(X \leftrightarrow Y) \vee (\overline{Y} \wedge Z)$;
8. $(X \vee (Y \to Z)) \to X$;
9. $(X \wedge Y) \vee ((X \to \overline{Y}) \wedge \overline{Z})$;
10. $(X \leftrightarrow Y) \wedge (\overline{Y} \vee Z)$;
11. $(X \wedge Y) \vee (Y \leftrightarrow Z)$;
12. $\overline{(\overline{(X \wedge Y)} \to Y)} \to (\overline{X} \wedge Z)$;
13. $((X \leftrightarrow \overline{Y}) \vee Z) \wedge Y$;
14. $(X \leftrightarrow Y) \to (\overline{X} \vee Z)$;
15. $((\overline{X} \leftrightarrow Y) \vee Z) \wedge \overline{Y}$;
16. $\overline{(\overline{(\overline{X} \wedge Y)} \to Y)} \to (X \wedge \overline{Z})$
17. $(X \wedge Z) \vee (\overline{Y} \leftrightarrow Z)$;
18. $(X \leftrightarrow Y) \wedge (\overline{X} \vee Z)$;
19. $(Z \wedge Y) \vee ((Z \to \overline{Y}) \wedge \overline{X})$;
20. $((Z \to Y) \vee \overline{X}) \to \overline{X}$;
21. $(\overline{Y} \wedge X) \vee (Z \leftrightarrow Y)$;
22. $\overline{X} \wedge \overline{(Y \leftrightarrow Z)}$;
23. $Y \to (\overline{X} \leftrightarrow Z)$;
24. $\overline{(X \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{Z} \to Y)}$;
25. $(\overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vee (X \to \overline{Z})$;
26. $(Y \leftrightarrow X) \to (Y \wedge \overline{Z})$;
27. $(X \leftrightarrow Y) \to (\overline{X} \vee Z)$;
28. $((\overline{Z} \leftrightarrow Y) \vee \overline{X}) \wedge \overline{Y}$;
29. $((\overline{X} \to Z) \to Y) \to X$;
30. $((X \leftrightarrow \overline{Y}) \vee Z) \wedge Y$.

9. *Докажите следующее логическое следование 2-мя различными способами.*

1. $(X \vee Y) \to Z \models X \to (Y \to Z)$;
2. $(X \vee Y) \to Z \models Y \to Z$;
3. $(X \vee Y) \to Z \models (X \wedge Y) \to Z$;
4. $(X \vee Y) \to Z \models Y \to (X \vee Z)$;
5. $(X \vee Y) \to Z \models X \to Z$;
6. $(X \to Y) \wedge (X \vee Z) \models X \vee Z$;
7. $(X \to Y) \wedge (X \vee Z) \models (X \vee Y \vee Z)$;
8. $(X \to Y) \wedge (\overline{X} \to Z) \models Y \to (X \vee Z)$;
9. $(\overline{X} \vee Y) \wedge (X \vee Z) \models X \to Y$;
10. $(\overline{X} \vee Y) \wedge (X \vee Z) \models Y \vee Z$;
11. $(\overline{X} \to Z) \wedge (X \to Y) \models X \to (Y \vee Z)$;
12. $(\overline{X} \to Z) \wedge (X \to Y) \models (X \wedge Z) \to Y$;
13. $(\overline{X} \to Z) \wedge (X \to Y) \models (X \wedge Y) \to Z$;
14. $(\overline{X} \to Z) \wedge (X \to Y) \models X \to Z$;
15. $(\overline{X} \to Z) \wedge (X \to Y) \models X \to Y$;
16. $(X \to Y) \to Z \models X \vee Y \vee Z$;
17. $(X \to Y) \to Z \models Y \to (X \vee Z)$;
18. $(X \to Y) \to Z \models (X \wedge Y) \to Z$;
19. $(X \to Y) \to Z \models X \vee Z$;

20. $(X \to Y) \to Z \vdash Y \to Z$;

21. $X \to (\overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vdash \overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}$;

22. $X \to (\overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vdash (X \wedge Y) \to Z$;

23. $X \to (\overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vdash (X \wedge Z) \to Y$;

24. $X \to (\overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vdash \overline{X} \vee \overline{Y}$;

25. $X \to (\overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vdash X \to (Y \leftrightarrow Z)$;

26. $(X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \vdash X \to (Y \vee Z)$;

27. $(X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \vdash (X \wedge Z) \to Y$;

28. $(X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \vdash Z \to (X \leftrightarrow Y)$;

29. $(X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \vdash X \to Z$;

30. $(X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \vdash (X \wedge Y) \to Z$.

10. *Выясните, верны ли следующие следования из группы формул.*

1. $(Z \to T,\ T \to \overline{Y},\ X \to (Y \vee Z)) \vdash X \to Y$;
2. $(Z \to X,\ \overline{X} \to \overline{Y},\ \overline{X} \wedge T) \vdash \overline{Z} \wedge \overline{Y}$;
3. $(T \to \overline{Z},\ Z \to \overline{Y},\ X \to (Y \vee T)) \vdash Z \to X$;
4. $(Y \to X,\ Z \to \overline{T},\ T \vee \overline{X}) \vdash Y \to \overline{Z}$;
5. $(X \vee Y \vee \overline{Z},\ X \to (V \vee W),\ Y \to T,\ \overline{Z}) \vdash V \vee W \vee T$;
6. $(X \to Y,\ Z \to \overline{T},\ T \vee \overline{Y}) \vdash X \to \overline{Z}$;
7. $(Z \to X,\ Y \wedge T,\ \overline{Z} \to \overline{T}) \vdash \overline{X} \wedge T$;
8. $(X \to V,\ Z \to T,\ X \to Z,\ \overline{(V \wedge T)}) \vdash \overline{X}$;
9. $(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z},\ X \to V,\ Y \to T,\ Z \to X) \vdash V \vee T$;
10. $(X \to Z,\ Y \leftrightarrow \overline{T},\ Z \to T) \vdash \overline{X} \vee \overline{Y}$;
11. $(\overline{X} \to Z,\ \overline{Z} \to \overline{Y},\ Z \wedge T) \vdash \overline{X} \to \overline{Y}$;
12. $(\overline{X} \vee Y \vee Z,\ \overline{X} \to V,\ Y \to T,\ \overline{Z}) \vdash V \vee T$;
13. $(\overline{X} \to \overline{Z},\ Y \leftrightarrow \overline{T},\ \overline{Z} \to \overline{T}) \vdash X \vee Y$;
14. $(\overline{X} \to \overline{Z}, Y \leftrightarrow \overline{T}, \overline{Z} \to T) \vdash X \to Y$;
15. $(X \vee Y \vee Z,\ \overline{X} \to V,\ Y \to T,\ \overline{Z}) \vdash V \vee T$;
16. $(X \to Z,\ \overline{Z} \to \overline{Y},\ \overline{Z} \wedge T) \vdash \overline{X} \wedge \overline{Y}$;
17. $(X \to Z,\ Y \leftrightarrow T,\ Z \to T) \vdash \overline{X} \vee \overline{Y}$;
18. $(X \vee Y \vee \overline{Z},\ X \to V,\ Y \to T,\ Z) \vdash V \vee T$;
19. $(X \to Y,\ Z \to T,\ X \to Z,\ Y \wedge T) \vdash \overline{Z}$;
20. $(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z},\ Y \wedge T,\ \overline{Z} \to \overline{T}) \vdash \overline{X} \wedge T$;
21. $(X \to Y,\ Z \to \overline{T},\ T \vee \overline{Y}) \vdash X \vee \overline{Z}$;
22. $(X \vee Y \vee \overline{Z},\ X \to (V \vee W),\ Y \to T,\ Z) \vdash V \vee W \vee T$;
23. $(Y \to X,\ Z \to \overline{T},\ T \wedge \overline{X}) \vdash Y \to X$;
24. $(T \to Z,\ Z \to Y,\ X \to (Y \vee T)) \vdash X \to Y$;
25. $(Z \to X,\ \overline{X} \to \overline{Y},\ \overline{X} \wedge T) \vdash X \vee \overline{T}$;
26. $(Z \to T,\ T \to Y,\ X \to (Y \vee Z)) \vdash X \to Y$;
27. $(X \to \overline{Z},\ Y \leftrightarrow T,\ \overline{Z} \to (\overline{T} \wedge X)) \vdash X \to Y$;
28. $(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z},\ Y \vee T,\ \overline{Z} \to T,\ \overline{X}) \vdash \overline{X} \wedge T$;
29. $(Z \to X,\ \overline{Z} \leftrightarrow \overline{Y},\ T \to \overline{Y}) \vdash X \to \overline{T}$;
30. $(Y \to X,\ T \to Z,\ Y \vee T) \vdash \overline{X} \to Z$.

11. *Найдите все неравносильные между собой и не тождественно истинные следствия из данных посылок.*

1. $X \wedge Y,\ Y \vee \overline{X},\ X$;
2. $(X \wedge Y) \to Z,\ Y \vee X$;
3. $Y \vee \overline{X},\ X \vee Y$;
4. $X \leftrightarrow Y,\ \overline{X}$;
5. $X \vee Y,\ X \wedge \overline{Y}$;
6. $Y \to X,\ Y \to Z$;
7. $X \to Y,\ Y \vee Z$;
8. $X \to \overline{Y},\ X \to \overline{Z}$;
9. $(X \wedge Y) \to Z,\ X \to Y$;
10. $(Z \wedge Y) \to X,\ X \to Y$;
11. $Y \to X,\ Z \to X$;
12. $Y \to X,\ X \to (Y \vee Z)$;
13. $X \vee Y,\ X \vee Z$;
14. $(Z \wedge Y) \to X,\ X \to Y$;
15. $Y \to X,\ Z \to X$.

Найдите все неравносильные и не тождественно ложные посылки, для которых данная формула является следствием.

16. $X \wedge (Z \vee \overline{Y})$;
17. $X \wedge (Y \vee Z)$;
18. $\overline{X} \wedge (Y \vee Z)$;
19. $\overline{X} \wedge (\overline{Y} \vee \overline{Z})$;
20. $\overline{X} \wedge (\overline{Y} \vee Z)$;
21. $Y \wedge (\overline{X} \vee Z)$;
22. $\overline{Y} \wedge (\overline{Z} \vee X)$;
23. $Z \wedge (X \to Y)$;
24. $Z \wedge (X \vee Y)$;
25. $Z \wedge (X \vee \overline{Y})$;
26. $Z \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y})$;
27. $\overline{Z} \wedge (\overline{X} \vee Y)$;
28. $\overline{Z} \wedge (\overline{Y} \vee X)$;
29. $\overline{Z} \wedge (X \vee Y)$;
30. $\overline{Z} \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y})$.

12. *Задан алгоритм функционирования некоторого комбинационного цифрового устройства в виде связи между входными и выходными сигналами. Эта связь представлена таблицей истинности* (*задан последний столбец таблицы истинности, первые три столбца значений переменных имеют стандартный вид, указанный в условии задачи* 12 *решенного варианта типового расчёта*). *Спроектируйте схему этого цифрового устройства, отличающуюся минимумом аппаратурных затрат, т.е. минимальным числом логических элементов. Изобразите её графически с использованием условных обозначений.*

№ варианта	$\lambda(F)$							
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	0	0	0	0
3	0	0	1	1	1	0	0	0
4	0	0	0	1	1	1	0	0
5	0	0	0	0	1	1	1	0
6	0	0	0	0	0	1	1	1
7	1	0	0	0	0	0	1	1
8	1	1	0	0	0	0	0	1
9	0	1	1	0	1	0	0	0
10	0	0	1	1	0	1	0	0
11	0	0	0	1	1	0	1	0
12	0	0	0	0	1	1	0	1
13	1	0	0	0	0	1	1	0
14	0	1	0	0	0	0	1	1
15	1	0	1	0	0	0	0	1
16	0	0	0	1	1	1	1	1
17	1	0	0	0	1	1	1	1
18	1	1	0	0	0	1	1	1
19	1	1	1	0	0	0	1	1
20	1	1	1	1	0	0	0	1
21	1	1	1	1	1	0	0	0
22	0	1	1	1	1	1	0	0
23	0	0	1	1	1	1	1	0
24	0	0	1	0	1	1	1	1
25	1	0	0	1	0	1	1	1
26	1	1	0	0	1	0	1	1
27	1	1	1	0	0	1	0	1
28	1	1	1	1	0	0	1	0
29	0	1	1	1	1	0	0	1
30	1	0	1	1	1	1	0	0

3. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ТИПОВОГО РАСЧЁТА

1. *Приведите пример составного высказывания, которое можно было бы записать в следующем виде. Определите его значение истинности.*

$$(A \wedge B) \to (C \vee \overline{B})$$

Решение. В данном составном высказывании есть три простейших: *A*, *B*, *C*. В качестве них можно взять, например, следующие повествовательные предложения:

A – «Розовые слоны живут в Африке»;
B – «В Солнечной системе – девять планет»;
C – «5 меньше 3».

Заменяя логические связки соответствующими речевыми оборотами, получим: «Если розовые слоны живут в Африке и в Солнечной системе девять планет, то 5 меньше 3 или в Солнечной системе число планет отлично от девяти».

Чтобы определить истинность получившегося высказывания, определим сначала истинность его составляющих: $\lambda(A)=0$, $\lambda(B)=1$, $\lambda(C)=0$. Тогда соответственно $\lambda(A \wedge B)=0$, $\lambda(C \vee \overline{B}))=0$, и окончательно $\lambda((A \wedge B) \to (C \vee \overline{B}))=1$.

2. *Приведите пример нечеткого высказывания.*

Решение. В качестве примера нечеткого высказывания можно привести предложение: «Мужчина сорока лет – молодой человек».

Это высказывание может быть истинным или ложным в зависимости от того, какой эксперт определяет степень его истинности. Если эксперту 80 лет, то с его точки зрения 40 лет – возраст скорее молодой, чем пожилой. С точки же зрения 17-летнего эксперта, 40 лет – скорее зрелый, чем молодой возраст.

3. *Вычислите степень истинности составного нечеткого высказывания* $(A \wedge B) \to (C \vee \overline{B})$ *при условии, что* $\mu_A(x)=0{,}7$, $\mu_B(x)=0{,}4$, $\mu_C(x)=0{,}9$.

Решение. Согласно определениям логических операций над нечеткими высказываниями получаем:

$$\mu_{A \wedge B}(x) = \min\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\} = \min\{0{,}7,\ 0{,}4\} = 0{,}4\,,$$
$$\mu_{C \vee \overline{B}}(x) = \max\{\mu_C(x), 1-\mu_B(x)\} = \max\{0{,}9,\ 0{,}6\} = 0{,}9$$

и окончательно

$$\mu_{(A \wedge B) \to (C \vee \overline{B})}(x) = \max\{1-\mu_{A \wedge B}(x),\ \mu_{C \vee \overline{B}}(x)\} = \max\{0{,}6,\ 0{,}9\} = 0{,}9\,.$$

4. *Составьте таблицу истинности для формулы алгебры высказываний. Укажите её вид.*

$$((X \to \overline{Y}) \vee Z) \wedge (\overline{(X \wedge Y)} \leftrightarrow \overline{Z})\,.$$

Решение. Пользуясь определениями логических операций, составим таблицу истинности данной формулы. Так как формула зависит от трёх переменных, то её таблица будет содержать $2^3=8$ строк и 11 столбцов (количество операций плюс три столбца значений переменных).

Определим порядок выполнения операций:

$$((X \overset{5}{\to} \overset{1}{\overline{Y}}) \overset{6}{\vee} Z) \overset{8}{\wedge} (\overset{4}{\overline{(X \overset{3}{\wedge} Y)}} \overset{7}{\leftrightarrow} \overset{2}{\overline{Z}})\,.$$

$\lambda(X)$	$\lambda(Y)$	$\lambda(Z)$	Действие							
			1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1

Значения в последнем столбце свидетельствуют, что данная формула как выполнима, так и опровержима, поскольку существуют наборы значений переменных, обращающих её в и в истинные, и в ложные высказывания.

5. *С помощью равносильных преобразований упростите формулу.*

$$((X \to Y) \to \overline{X}) \to (X \to (Y \wedge X))\,.$$

Решение.

$$((X\to Y)\to\overline{X})\to(X\to(Y\wedge X))\overset{(12)}{\equiv}\overline{(\overline{\overline{X}\vee Y}\vee\overline{X})}\vee(\overline{X}\vee(Y\wedge X))\overset{(18)(3)(10)}{\equiv}$$

$$\equiv((\overline{X}\vee Y)\wedge X)\vee\overline{X}\vee(Y\wedge X)\overset{(5)(3)}{\equiv}(\overline{X}\wedge X)\vee(Y\wedge X)\vee\overline{X}\vee(Y\wedge X)\overset{(16)(9)}{\equiv}$$

$$\equiv\varnothing\vee(Y\wedge X)\vee\overline{X}\overset{(8)(6)}{\equiv}(Y\vee\overline{X})\wedge(X\vee\overline{X})\overset{(17)}{\equiv}(Y\vee\overline{X})\wedge E\overset{(7)(12)}{\equiv}X\to Y\ .$$

Преобразуйте данную формулу равносильным образом так, чтобы она содержала только операции отрицания и конъюнкции.

$$((X\leftrightarrow Y)\wedge(Y\to\overline{X}))\to Y\ .$$

Решение. Сначала упростим формулу:

$$((X\leftrightarrow Y)\wedge(Y\to\overline{X}))\to Y\overset{(12)(13)}{\equiv}\overline{((\overline{X}\vee Y)\wedge(\overline{Y}\vee X)\wedge(\overline{Y}\vee\overline{X}))}\vee Y\overset{(10)(11)(18)}{\equiv}$$

$$\equiv(X\wedge\overline{Y})\vee(Y\wedge\overline{X})\vee(Y\wedge X)\vee Y\overset{(15)}{\equiv}(X\wedge\overline{Y})\vee Y\overset{(6)}{\equiv}(X\vee Y)\wedge(\overline{Y}\vee Y)\overset{(17)}{\equiv}$$

$$\equiv(X\vee Y)\wedge E\overset{(7)}{\equiv}X\vee Y\ .$$

Затем, с помощью закона де Моргана, поменяем дизъюнкцию на конъюнкцию:

$$X\vee Y\overset{(11)}{\equiv}\overline{\overline{X}\wedge\overline{Y}}\ .$$

6. *Приведите равносильными преобразованиями следующую формулу к ДНФ*:

$$(X\to Y)\wedge(Z\to(X\wedge Y))\ .$$

Решение. Сначала все логические связки выразим через $\wedge$ и $\vee$:

$$(X\to Y)\wedge(Z\to(X\wedge Y))\overset{(12)}{\equiv}(\overline{X}\vee Y)\wedge(\overline{Z}\vee(X\wedge Y))\ .$$

Затем, на основании закона дистрибутивности, сделаем так, чтобы конъюнкции выполнялись раньше дизъюнкций:

$$(\overline{X}\vee Y)\wedge(\overline{Z}\vee(X\wedge Y))\overset{(5)}{\equiv}(\overline{X}\wedge\overline{Z})\vee(\overline{X}\wedge(X\wedge Y))\vee(Y\wedge\overline{Z})\vee(Y\wedge(X\wedge Y))\overset{(4)}{\equiv}$$

$$\overset{(4)}{\equiv}(\overline{X}\wedge\overline{Z})\vee(\overline{X}\wedge X\wedge Y)\vee(Y\wedge\overline{Z})\vee(Y\wedge X\wedge Y)\ .$$

Данная формула уже является ДНФ, но её ещё можно упростить:

$$(\overline{X}\wedge\overline{Z})\vee(\overline{X}\wedge X\wedge Y)\vee(Y\wedge\overline{Z})\vee(Y\wedge X\wedge Y)\overset{(16)(9)}{\equiv}$$

$$\overset{(16)(9)}{\equiv}(\overline{X}\wedge\overline{Z})\vee(\varnothing\wedge Y)\vee(Y\wedge\overline{Z})\vee(Y\wedge X)\overset{(8)}{\equiv}$$

$$\overset{(8)}{\equiv}(\overline{X}\wedge\overline{Z})\vee\varnothing\vee(Y\wedge\overline{Z})\vee(Y\wedge X)\overset{(8)}{\equiv}(\overline{X}\wedge\overline{Z})\vee(Y\wedge\overline{Z})\vee(Y\wedge X)\ .$$

Это и есть искомая дизъюнктивная нормальная форма.

7. *Приведите равносильными преобразованиями следующую формулу к КНФ*:

$$\overline{(X\wedge Y)}\vee\overline{(Z\to T)}\ .$$

Решение. Выразим все логические связки через $\wedge$ и $\vee$:

$$\overline{(X\wedge Y)}\vee\overline{(Z\to T)}\overset{(12)(11)}{\equiv}\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{(\overline{Z}\vee T)}\overset{(10)}{\equiv}\overline{X}\vee\overline{Y}\vee(Z\wedge\overline{T})\ .$$

Далее, на основании закона дистрибутивности, сделаем так, чтобы дизъюнкции выполнялись раньше конъюнкций:

$$\overline{X}\vee\overline{Y}\vee(Z\wedge\overline{T})\overset{(6)}{\equiv}(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee Z)\wedge(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{T})\ .$$

8. *Применяя равносильные преобразования, найдите СДНФ и СКНФ для данной формулы. Проверьте полученные формы с помощью таблицы истинности.*

$$\overline{Y}\wedge(Z\to(X\leftrightarrow Y)).$$

Решение. Чтобы найти СДНФ и СКНФ формулы, сначала построим её ДНФ и КНФ:

$$\overline{Y}\wedge(Z\to(X\leftrightarrow Y))\overset{(12)(13)}{\equiv}\overline{Y}\wedge(\overline{Z}\vee((\overline{X}\vee Y)\wedge(\overline{Y}\vee X))\overset{(5)(4)}{\equiv}$$

$$\overset{(5)(4)}{\equiv}(\overline{Y}\wedge\overline{Z})\vee(\overline{Y}\wedge(\overline{X}\vee Y)\wedge(\overline{Y}\vee X))\overset{(14)}{\equiv}$$

$$\overset{(14)}{\equiv}(\overline{Y}\wedge\overline{Z})\vee(\overline{Y}\wedge(\overline{X}\vee Y))\overset{(5)(3)}{\equiv}(\overline{Y}\wedge\overline{Z})\vee(\overline{Y}\wedge\overline{X})\vee(\overline{Y}\wedge Y)\overset{(16)}{\equiv}$$

$$\overset{(16)}{\equiv}(\overline{Y}\wedge\overline{Z})\vee(\overline{Y}\wedge\overline{X})\vee\varnothing\overset{(8)}{\equiv}(\overline{Y}\wedge\overline{Z})\vee(\overline{Y}\wedge\overline{X})\ .$$

Это дизъюнктивная форма; преобразуя её, найдем конъюнктивную форму:

$$(\overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vee (\overline{Y} \wedge \overline{X}) \overset{(6)}{\equiv} (\overline{Y} \vee \overline{Y}) \wedge (\overline{Y} \vee \overline{X}) \wedge (\overline{Z} \vee \overline{Y}) \wedge (\overline{Z} \vee \overline{X}) \overset{(9)}{\equiv} \overset{(9)}{\equiv} \overline{Y} \wedge (\overline{Y} \vee \overline{X}) \wedge (\overline{Z} \vee \overline{Y}) \wedge (\overline{Z} \vee \overline{X}).$$

Получившиеся нормальные формы не содержат одинаковых конъюнктов или дизъюнктов, и все элементарные конъюнкции и дизъюнкции правильны, т.е. не содержат одинаковых переменных.

Осталось пополнить каждый конъюнкт и дизъюнкт относительно набора $\{X, Y, Z\}$, чтобы получить соответственно СДНФ и СКНФ нашей формулы.

СДНФ:

$$(\overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vee (\overline{Y} \wedge \overline{X}) \overset{(2)}{\equiv} (\overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y}) \overset{(7)}{\equiv} ((\overline{Y} \wedge \overline{Z}) \wedge E) \vee ((\overline{X} \wedge \overline{Y}) \wedge E) \overset{(17)}{\equiv}$$

$$\overset{(17)}{\equiv} ((\overline{Y} \wedge \overline{Z}) \wedge (X \vee \overline{X})) \vee ((\overline{X} \wedge \overline{Y}) \wedge (Z \vee \overline{Z})) \overset{(5)}{\equiv} (X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vee$$

$$\vee (\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}) \overset{(9)}{\equiv} (X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z).$$

СКНФ:

$$\overline{Y} \wedge (\overline{Y} \vee \overline{X}) \wedge (\overline{Z} \vee \overline{Y}) \wedge (\overline{Z} \vee \overline{X}) \overset{(1)(8)}{\equiv} (\overline{Y} \vee \varnothing) \wedge ((\overline{X} \vee \overline{Y}) \vee \varnothing) \wedge ((\overline{Y} \vee \overline{Z}) \vee \varnothing) \wedge$$

$$\wedge ((\overline{X} \vee \overline{Z}) \vee \varnothing) \overset{(16)}{\equiv} (\overline{Y} \vee (X \wedge \overline{X})) \wedge ((\overline{Y} \vee \overline{X}) \vee (Z \wedge \overline{Z})) \wedge ((\overline{Z} \vee \overline{Y}) \vee (X \wedge \overline{X})) \wedge$$

$$\wedge ((\overline{X} \vee \overline{Z}) \vee (Y \wedge \overline{Y})) \overset{(6)}{\equiv} (\overline{Y} \vee X) \wedge (\overline{Y} \vee \overline{X}) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee$$

$$\vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \overset{(8)(9)}{\equiv} ((X \vee \overline{Y}) \vee \varnothing) \wedge ((\overline{X} \vee$$

$$\vee \overline{Y}) \vee \varnothing) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \overset{(16)}{\equiv} ((X \vee$$

$$\vee \overline{Y}) \vee (Z \wedge \overline{Z})) \wedge ((\overline{X} \vee \overline{Y}) \vee (Z \wedge \overline{Z})) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee$$

$$\vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \overset{(6)}{\equiv} (X \vee \overline{Y} \vee Z) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge$$

$$\wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \overset{(9)}{\equiv} (X \vee \overline{Y} \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee$$

$$\vee \overline{Y} \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}).$$

Для проверки построим таблицу истинности исходной формулы:

$$\overset{1}{\overline{Y}} \overset{4}{\wedge} (Z \overset{3}{\rightarrow} (X \overset{2}{\leftrightarrow} Y).$$

$\lambda(X)$	$\lambda(Y)$	$\lambda(Z)$	Действие				СДНФ	СКНФ
			1	2	3	4		
1	1	1	0	1	1	0		$(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})$
1	1	0	0	1	1	0		$(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z)$
1	0	1	1	0	0	0		$(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z})$
1	0	0	1	0	1	1	$(X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z})$	
0	1	1	0	0	0	0		$(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})$
0	1	0	0	0	1	0		$(X \vee \overline{Y} \vee Z)$
0	0	1	1	1	1	1	$(\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z)$	
0	0	0	1	1	1	1	$(\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z})$	

9. *Докажите следующее логическое следование 2-мя различными способами.*

$$((X \vee Y) \rightarrow Z) \vdash (X \rightarrow (Y \vee Z)).$$

Решение. Приведем 4 способа решения; читатель выберет 2 наиболее для него приемлемых.

1 способ.

□ Для доказательства построим таблицы истинности обеих формул.

$$P(X,Y,Z) = ((X \overset{1}{\vee} Y) \overset{2}{\rightarrow} Z) \qquad Q(X,Y,Z) = (X \overset{2}{\rightarrow} (Y \overset{1}{\vee} Z))$$

$\lambda(X)$	$\lambda(Y)$	$\lambda(Z)$	Действия		Действия	
			1	2	1	2
1	1	1	1	**1**	1	**1**
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	**1**	1	**1**
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	**1**	1	**1**
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	**1**	1	**1**
0	0	0	0	**1**	0	**1**

Так как *Q(X*, *Y*, *Z)* принимает значение истины на всяком наборе пропозиционных переменных, на котором значение истины принимает формула *P*(*X*, *Y*, *Z*), то *по определению логического следования* $P \vdash Q$. ■

2 способ.

□ Рассмотрим следующую формулу:

$$((X \vee Y) \to Z) \to (X \to (Y \vee Z)),$$

с помощью равносильных преобразований докажем, что она тождественно истинна.

$$((X \vee Y) \to Z) \to (X \to (Y \vee Z)) \stackrel{(12)(3)}{\equiv} \overline{(\overline{(X \vee Y)} \vee Z)} \vee \overline{X} \vee Y \vee Z \stackrel{(18)(10)}{\equiv} ((X \vee$$
$$\vee Y) \wedge \overline{Z}) \vee \overline{X} \vee Y \vee Z \stackrel{(5)}{\equiv} (X \wedge \overline{Z}) \vee (Y \wedge \overline{Z}) \vee \overline{X} \vee Y \vee Z \stackrel{(15)}{\equiv} (X \wedge \overline{Z}) \vee \overline{X} \vee$$
$$\vee Y \vee Z \stackrel{(6)}{\equiv} ((X \vee \overline{X}) \wedge (\overline{Z} \vee \overline{X})) \vee Y \vee Z \stackrel{(17)}{\equiv} \equiv (E \wedge (\overline{Z} \vee \overline{X})) \vee Y \vee Z \stackrel{(7)}{\equiv} \overline{Z} \vee \overline{X} \vee \vee Y \vee Z \stackrel{(17)}{\equiv} \overline{X} \vee Y \vee E \stackrel{(7)}{\equiv} E.$$

Итак, формула $P \to Q$ является тавтологией, следовательно, по *теореме* 1 (п. 1.8) $P \vdash Q$. ■

3 способ.

□ Предположим *противное*, т.е., что *Q* не является логическим следствием *P*, тогда $\lambda((X \vee Y) \to Z) = 1$, а $\lambda(X \to (Y \vee Z)) = 0$.

Так как

$$\lambda(X \to (Y \vee Z)) = 0, \Rightarrow \lambda(X) = 1, \lambda(Y \vee Z) = 0, \Rightarrow \lambda(Y) = 0, \lambda(Z) = 0.$$

Но если $\lambda(X) = 1,\ \lambda(Y) = 0,\ \lambda(Z) = 0,$ то $\lambda((X \vee Y) \to Z) = 0$. Получено противоречие, следовательно, наше предположение неверно и $P \vdash Q$. ■

4 способ.

□ Рассмотрим следующую формулу:

$$\overline{((X \vee Y) \to Z) \to (X \to (Y \vee Z))},$$

преобразуем её:

$$\overline{((X \vee Y) \to Z) \to (X \to (Y \vee Z))} \stackrel{(3)(12)}{\equiv} \overline{\overline{\overline{((X \vee Y)} \vee Z)} \vee \overline{X} \vee Y \vee Z} \stackrel{(18)(10)}{\equiv} ((\overline{X} \wedge$$
$$\wedge \overline{Y}) \vee Z) \wedge X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z} \stackrel{(8)}{\equiv} ((\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee Z) \wedge (\varnothing \vee \overline{Z}) \wedge X \wedge \overline{Y}.$$

Затем воспользуемся формулой *метода резолюций*

$$(P \vee Q) \wedge (R \vee \overline{Q}) \vdash P \vee R,$$

где в качестве *Q* выступает *Z*.

$$(((\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee Z) \wedge (\varnothing \vee \overline{Z}) \wedge X \wedge \overline{Y}) \vdash ((\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee \varnothing) \wedge X \wedge \overline{Y} \stackrel{(8)(4)}{\equiv}$$
$$\stackrel{(8)(4)}{\equiv} \overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge X \wedge \overline{Y} \stackrel{(16)}{\equiv} \varnothing.$$

Тогда $((X \vee Y) \to Z) \to (X \to (Y \vee Z)) = E$ и по *теореме* 1 (п. 1.8) $P \vdash Q$. ■

10. *Выясните*, *верны ли следующие следования из группы формул*:

$$(X \vee Y \vee Z, \quad \overline{Y} \wedge T, \quad Z \to \overline{T}) \vdash (X \wedge T).$$

Решение. Допустим, что данное следование неверно, т.е. существуют такие значения переменных, для которых $\lambda(X \vee Y \vee Z) = 1, \quad \lambda(\overline{Y} \wedge T) = 1,\ \lambda(Z \to \overline{T}) = 1,$ а $\lambda(X \wedge T) = 0.$

Тогда из $\lambda(\overline{Y} \wedge T) = 1$ следует, что $\lambda(T) = 1$ и $\lambda(\overline{Y}) = 1$, а значит $\lambda(Y) = 0$. Если $\lambda(T) = 1$, следовательно, $\lambda(\overline{T}) = 0$ и одновременно $\lambda(Z \to \overline{T}) = 1, \ \Rightarrow\ \lambda(Z) = 0$. Так как $\lambda(T) = 1$ и $\lambda(X \wedge T) = 0$, то $\lambda(X) = 0$.

Но если $\lambda(Y) = 0$, $\lambda(Z) = 0$, $\lambda(X) = 0$, то $\lambda(X \vee Y \vee Z) \neq 1$. Получено противоречие; следовательно, наше предположение неверно и логическое следование имеет место.

11. *Найдите все неравносильные между собой и не тождественно истинные следствия из данных посылок*:

$$X \to Y, \quad \overline{Y} \to Z.$$

Решение. Составляем конъюнкцию посылок и приводим её равносильными преобразованиями к СКНФ:

$$(X \to Y)\wedge(\overline{Y}\to Z) \overset{(12)(18)}{\equiv} (\overline{X}\vee Y)\wedge(Y\vee Z) \overset{(8)}{\equiv} ((\overline{X}\vee Y)\vee\varnothing)\wedge((Y\vee Z)\vee\varnothing)\equiv$$
$$\overset{(16)}{\equiv}((\overline{X}\vee Y)\vee(Z\wedge\overline{Z}))\wedge((Y\vee Z)\vee(X\wedge\overline{X}))\overset{(6)}{\equiv}(\overline{X}\vee Y\vee Z)\wedge(\overline{X}\vee Y\vee\overline{Z})\wedge$$
$$\wedge(X\vee Y\vee Z)\wedge(\overline{X}\vee Y\vee Z)\overset{(9)}{\equiv}(\overline{X}\vee Y\vee Z)\wedge(\overline{X}\vee Y\vee\overline{Z})\wedge(X\vee Y\vee Z).$$

Логическими следствиями из данных посылок будут все дизъюнкты, входящие в полученную СКН-форму, а также всевозможные их конъюнкции. Выписываем получившиеся формулы, придав им более удобную равносильную форму.

1) $\overline{X}\vee Y\vee Z \overset{(12)}{\equiv} X\to(Y\vee Z)$;

2) $\overline{X}\vee Y\vee\overline{Z}\overset{(12)}{\equiv}(X\wedge Z)\to Y$;

3) $X\vee Y\vee Z$;

4) $(\overline{X}\vee Y\vee Z)\wedge(\overline{X}\vee Y\vee\overline{Z})\overset{(6)}{\equiv}(\overline{X}\vee Y)\vee(Z\wedge\overline{Z})\overset{(16)(8)}{\equiv}\overline{X}\vee Y\overset{(12)}{\equiv}X\to Y$ (первая посылка);

5) $(\overline{X}\vee Y\vee Z)\wedge(X\vee Y\vee Z)\overset{(6)}{\equiv}(\overline{X}\wedge X)\vee(Y\vee Z)\overset{(16)(8)}{\equiv}Y\vee Z\overset{(12)}{\equiv}\overline{Y}\to Z$ (вторая посылка);

6) $(\overline{X}\vee Y\vee\overline{Z})\wedge(X\vee Y\vee Z)\overset{(6)}{\equiv}Y\vee((\overline{X}\vee\overline{Z})\wedge(X\vee Z))\overset{(12)(18)}{\equiv}Y\vee((X\to\to\overline{Z})\wedge(\overline{Z}\to X))\overset{(13)}{\equiv}\equiv Y\vee(X\leftrightarrow\overline{Z})$;

7) $(\overline{X}\vee Y\vee Z)\wedge(\overline{X}\vee Y\vee\overline{Z})\wedge(X\vee Y\vee Z)\equiv(X\to Y)\wedge(\overline{Y}\to Z)$.

Найдите все неравносильные и не тождественно ложные посылки, для которых данная формула является следствием:

$$(X\vee Y)\wedge Z .$$

Решение. Чтобы определить, логическим следствием каких посылок является данная формула, её необходимо привести к совершенной конъюнктивной нормальной форме; в данном случае это проще сделать с помощью таблиц истинности:

$$(X\overset{1}{\vee}Y)\overset{2}{\wedge}Z .$$

$\lambda(X)$	$\lambda(Y)$	$\lambda(Z)$	Действие		СКНФ
			1	2	
1	1	1	1	1	
1	1	0	1	0	$(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee Z)$
1	0	1	1	1	
1	0	0	1	0	$(\overline{X}\vee Y\vee Z)$
0	1	1	1	1	
0	1	0	1	0	$(X\vee\overline{Y}\vee Z)$
0	0	1	0	0	$(X\vee Y\vee\overline{Z})$
0	0	0	0	0	$(X\vee Y\vee Z)$

Недостающими дизъюнктами в этой форме являются:

$$(X\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}),\ (\overline{X}\vee Y\vee\overline{Z}),\ (\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}),$$

а искомые посылки получатся из всевозможных конъюнкций исходной формулы с этими дизъюнктами.

Выписываем получившиеся формулы, придав им более удобную равносильную форму:

1) $(X\vee Y)\wedge Z\wedge(X\vee\overline{Y}\vee\overline{Z})\overset{(6)}{\equiv}Z\wedge(X\vee(Y\wedge(\overline{Y}\vee\overline{Z})))\overset{(5)}{\equiv}Z\wedge(X\vee((Y\wedge$
$\wedge\overline{Y})\vee(Y\wedge\overline{Z})))\equiv Z\wedge(X\vee(Y\wedge\overline{Z}))\overset{(5)}{\equiv}(Z\wedge X)\vee(Z\wedge Y\wedge\overline{Z})\overset{(16)(8)}{\equiv}X\wedge Z$.

2) $(X\vee Y)\wedge Z\wedge(\overline{X}\vee Y\vee\overline{Z})\overset{(6)}{\equiv}Z\wedge(Y\vee(X\wedge(\overline{X}\vee\overline{Z})))\overset{(5)}{\equiv}Z\wedge(Y\vee((X\wedge$
$\wedge\overline{X})\vee(X\wedge\overline{Z})))\equiv Z\wedge(Y\vee(X\wedge\overline{Z}))\overset{(5)}{\equiv}(Z\wedge Y)\vee(Z\wedge X\wedge\overline{Z})\overset{(16)(8)}{\equiv}Y\wedge Z$.

3) $(X\vee Y)\wedge Z\wedge(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z})\overset{(5)}{\equiv}(X\vee Y)\wedge((Z\wedge(\overline{X}\vee\overline{Y}))\vee(Z\wedge\overline{Z}))\overset{(16)(8)}{\equiv}\equiv(X\vee Y)\wedge Z\wedge(\overline{X}\vee\overline{Y})\overset{(12)(13)}{\equiv}Z\wedge(\overline{X}\leftrightarrow Y)$.

4) $(X\vee Y)\wedge Z\wedge(X\vee\overline{Y}\vee\overline{Z})\wedge(\overline{X}\vee Y\vee\overline{Z})\equiv X\wedge Z\wedge(\overline{X}\vee Y\vee\overline{Z})\overset{(5)}{\equiv}X\wedge$
$\wedge((Z\wedge(\overline{X}\vee Y))\vee(Z\wedge\overline{Z}))\overset{(16)(8)}{\equiv}X\wedge Z\wedge(\overline{X}\vee Y)\overset{(5)}{\equiv}Z\wedge((X\wedge\overline{X})\vee\vee(X\wedge Y))\overset{(16)(8)}{\equiv}Z\wedge X\wedge Y$.

5) $(X\vee Y)\wedge Z\wedge(X\vee\overline{Y}\vee\overline{Z})\wedge(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z})\equiv X\wedge Z\wedge(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z})\overset{(5)}{\equiv}X\wedge$
$((Z\wedge(\overline{X}\vee\overline{Y}))\vee(Z\wedge\overline{Z}))\overset{(16)(8)}{\equiv}X\wedge Z\wedge(\overline{X}\vee\overline{Y})\overset{(5)}{\equiv}Z\wedge((X\wedge\overline{X})\vee(X\wedge\wedge\overline{Y}))\overset{(16)(18)}{\equiv}Z\wedge X\wedge\overline{Y}$.

6) $(X \vee Y) \wedge Z \wedge (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \equiv Y \wedge Z \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \overset{(5)}{\equiv} Y \wedge$

$\wedge ((Z \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y})) \vee (Z \wedge \overline{Z})) \overset{(16)(8)}{\equiv} Y \wedge Z \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y}) \overset{(5)}{\equiv} Z \wedge ((Y \wedge \overline{X}) \vee (Y \wedge \wedge \overline{Y})) \overset{(16)(8)}{\equiv} Z \wedge \overline{X} \wedge Y$.

7) $(X \vee Y) \wedge Z \wedge (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \equiv Z \wedge X \wedge Y \wedge \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \overset{(11)}{\equiv} (Z \wedge X \wedge Y) \wedge \overline{(Z \wedge X \wedge Y)} \overset{(8)}{\equiv} \varnothing$.

Замечание. Так как нас интересуют только не тождественно ложные посылки, то последний случай мы исключаем из ответа к задаче.

12. *Задан алгоритм функционирования некоторого комбинационного цифрового устройства в виде связи между входными и выходными сигналами. Комбинации входных сигналов представлены следующей таблицей*:

$\lambda(X)$	$\lambda(Y)$	$\lambda(Z)$
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

На выходе получены (соответственно каждой строке таблицы) сигналы:

$\lambda(F)$	1	1	0	1	0	0	0	0

Спроектируйте схему этого цифрового устройства, отличающуюся минимумом аппаратурных затрат, т.е. минимальным числом логических элементов. Изобразите её графически с использованием условных обозначений.

Решение. Запишем таблицу истинности в полном виде:

$\lambda(X)$	$\lambda(Y)$	$\lambda(Z)$	$\lambda(F)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

По данным таблицы истинности перейдём к формализованному заданию алгоритма функционирования цифрового устройства с помощью логической формулы, для этого построим СДН-форму искомой формулы (в данном случае предпочтительней она, так как в последнем столбце таблицы истинности 1 значительно меньше чем 0).

Таким образом, искомая формула имеет вид:

$$(X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \overline{Z}) \vee (X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}).$$

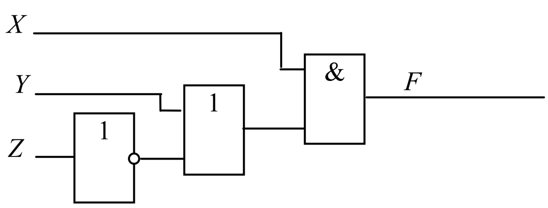
Далее минимизируем её, упрощая формулу равносильными преобразованиями:

$$(X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \overline{Z}) \vee (X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}) \overset{(5)}{\equiv} ((X \wedge Y) \wedge (Z \vee \overline{Z})) \vee (X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}) \overset{(17)}{\equiv}$$

$$\equiv ((X \wedge Y) \wedge E) \vee (X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}) \overset{(7)}{\equiv} (X \wedge Y) \vee (X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}) \overset{(5)}{\equiv} X \wedge (Y \vee (\overline{Y} \wedge \overline{Z})) \overset{(6)}{\equiv}$$

$$\equiv X \wedge (Y \vee \overline{Y}) \wedge (Y \vee \overline{Z}) \overset{(17)}{\equiv} X \wedge E \wedge (Y \vee \overline{Z}) \overset{(7)}{\equiv} X \wedge (Y \vee \overline{Z}).$$

Теперь построим схему комбинационного цифрового устройства с использованием необходимых логических элементов:



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игошин, В.И. Математическая логика и теория алгоритмов / В.И. Игошин. – М. : Академия, 2008.
2. Игошин, В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов / В.И. Игошин. – М. : Академия, 2006.