Оглавление

ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ

Вариант 1

1. Доказать, что функция $y = \mathrm{e}^{x}\sin x$ удовлетворяет уравнению $y'' - 2y' + 2y = 0$.
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\sqrt{35{,}94}$; б) $\operatorname{ctg} 28^{\mathbf{0}}$; в) $\lg 9$.
3. Найти n-ю производную функции $y = \sin^3 x$.
4. Разложить функцию $f(x) = x^5$ по целым неотрицательным степеням разности $x - 1$.
5. Доказать неравенство $\arcsin x > x + \dfrac{x^3}{6}$ при $0 < x < 1$.
6. Исследовать функции и начертить их графики:

   а) $f(x) = \dfrac{x^4}{(x+1)^3}$; б) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x+1}$;

   в) $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$; г) $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$.
7. В соответствии с прогнозами прибыль предприятия описывается функцией $\Pi(q) = q^2 - 10q + 20$, где q – величина, характеризующая объем производства (в млн. руб.). Найти оптимальный объем выпуска продукции для предприятия, если его производственные мощности составляют: а) 10 млн. руб.; б) 20 млн. руб.
8. Функция спроса $q = 10 - p + 2\sqrt{p}$ и предложения $s = 4p - 6$, где q и s – количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p – цена единицы товара. Найти: а) равновесную цену; б) эластичность спроса и предложения; в) изменение дохода при увеличении цены на $5\ \%$ от равновесной.

Вариант 2

1. Доказать, что функция $y = \dfrac{x-3}{x+4}$ удовлетворяет уравнению $2(y')^2 = (y-1)y''$.
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\sqrt[4]{15{,}80}$; б) $\operatorname{tg} 44^{\circ}50'$; в) $\arccos 0{,}07$.
3. Найти n-ю производную функции $y = \sin ax \cos bx$.
4. Составить многочлен Тейлора для функции $f(x) = \sqrt{x}$ в окрестности точки $x_0 = 1$.
5. Доказать неравенство $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \geq 2x$ при $0 \leq x < 1$.
6. Исследовать функции и начертить их графики:

   а) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x+1)^2}$; б) $f(x) = x - 2\ln x$;

   в) $f(x) = (x+4)e^{2x}$; г) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$.
7. Зависимость между издержками предприятия C и количеством выпускаемой продукции x выражается формулой

$$C(x) = \begin{cases} 48x, & x \leq 125, \\ 375 + (x-50)^2, & 125 < x \leq 150. \end{cases}$$

   Доход от реализации единицы продукции на двух различных рынках составил $p(x) = 120 - \dfrac{4}{3}\sqrt{x}$ и, соответственно, $p(x) = 120 + \dfrac{x}{6}$.
   Какие рекомендации о количестве выпускаемой продукции можно дать руководителю предприятия? Какой рынок предпочтительней?

8. Функция совокупной полезности U товара x для потребителя имеет вид: $U = 10x + 9x^2 - x^3$, где x – количество потребленного в единицу времени товара. Определите степень насыщения и точку снижения предельной полезности функции U; укажите эти точки на графиках совокупной и предельной полезности.

Вариант 3

1. Доказать, что функция $y = \ln\dfrac{1}{1+x}$ удовлетворяет уравнению $xy' + 1 = \mathrm{e}^{y}$.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\sqrt[5]{\dfrac{1{,}85}{2{,}15}}$; б) $\sin 28^{\mathbf{0}}$; в) $\arccos\ 0{,}05$.

3. Найти 20-ю производную функции $y = x^2\ \mathrm{e}^{-x}$.

4. Составить многочлен Тейлора 4-го порядка для функции $f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ в окрестности точки $x_{\mathbf{0}} = 1$.

5. Доказать неравенство $\operatorname{ch} x \geq 1 + \dfrac{x^2}{2}$ для $x \in \mathrm{R}$.

6. Исследовать функции и начертить их графики:

   а) $f(x) = 1 + \dfrac{4x+1}{x^2}$; б) $f(x) = x^3\mathrm{e}^{-3x}$;

   в) $f(x) = 1 - x + \sqrt{\dfrac{x^3}{3+x}}$; г) $f(x) = x(\ln x - 3)$.

7. Зависимость объема выпуска продукции V от капитальных затрат K определяется функцией $V = V_0 \ln\left(4 + K^3\right)$. Найдите интервал изменений K, на котором увеличение капитальных затрат неэффективно.

8. Функция потребления некоторой страны имеет вид

$$C(x) = 53{,}76 + 0{,}78x - 0{,}96x^{3/4},$$

где x – совокупный национальный доход. Найти: а) предельную склонность к потреблению; б) предельную склонность к сбережению; в) эластичность потребления по доходу, если национальный доход составляет 256. Склонно ли общество данной страны при существующем потреблении и национальном доходе к прогрессу? Почему?

Вариант 4

1. Доказать, что функция $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ удовлетворяет уравнению $(1-x^2)y'-xy=1$.
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\sqrt[3]{1,02}$; б) $\sin 34^{\circ}$; в) $\operatorname{arcctg} 0,98$.

3. Найти 50-ю производную функции $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.
4. Разложить функцию $f(x)=xe^{-x}$ по формуле Маклорена n-го порядка.
5. Доказать неравенство $2\sqrt{x}\ge 3-\dfrac{1}{x}$ при $x\ge 1$.
6. Исследовать функции и начертить их графики:

   а) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$; б) $f(x)=(x+1)\sqrt[3]{x^2}$;

   в) $f(x)=x^2e^{-x}$; г) $f(x)=x^2(\ln x-1)$.

7. Зависимость дохода R и издержек C от объема производства x задается функциями следующего вида: $R(x)=30x-2x^2$, $C(x)=x^3-35x^2+150x$. Производственные мощности позволяют производить до 25 единиц продукции. При каком объеме производства прибыль максимальна?
8. По оценке Tastee Food Company отношения спроса – дохода на ее продукцию описывают уравнением $q=500+0,1I$, где q – количество ед. продукции, а I – средний семейный доход.

   A. Определить эластичность спроса по доходу при $I=15\,000$ дол., $I=20\,000$ дол., $I=25\,000$ дол.

   B. Результат предыдущих вычислений должен показать, что эластичность по доходу увеличивается с ростом дохода. Почему это так? Сохранилось бы это отношение при $q=0,1I$?

Вариант 5

1. Доказать, что функция $y = e^{-x} \sin x$ удовлетворяет уравнению $y'' + 2y' + 2y = 0$.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\sqrt[3]{125{,}18}$; б) $\operatorname{tg} 59^{o}$; в) $\arccos 0{,}03$.

3. Найти 10-ю производную функции $y = x \log_2 x$.

4. Для функции $f(x) = e^{2x - x^2}$ написать формулу Маклорена до членов 3-го порядка включительно.

5. Доказать неравенство $x^{\alpha} - 1 \le \alpha(x - 1)$ при $x > 1$, $0 < \alpha < 1$.

6. Исследовать функции и начертить их графики:

   а) $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$; б) $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$;

   в) $f(x) = \left(2 + x^2\right) e^{-x^2}$; г) $f(x) = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

7. Производитель реализует свою продукцию по цене 500 рублей за единицу, а издержки при этом задаются кубической зависимостью $C(x) = 50x + 6x^3$. Найдите оптимальный для производителя объем выпуска продукции и соответствующую ему прибыль.

8. Бизнесмен Вася решил основать небольшое предприятие по выпуску изделий народного потребления. Ознакомившись со статистикой, он увидел, что зависимость между спросом q и ценой p за единицу изделия выражается формулой $q = 60 - 2\sqrt{p}$. Найти эластичность спроса. Выяснить, при каких значениях цены спрос является эластичным, нейтральным и неэластичным. Какие рекомендации о цене за единицу продукции можно дать Васе при $p = 324$ и при $p = 484$ ден. ед.?

Вариант 6

1. Доказать, что функция $y=\sqrt{2x-x^2}$ удовлетворяет уравнению $y^3+y''+1=0$.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\sqrt{15{,}92}$; б) $\cos 28°$; в) $\lg 11$.

3. Найти n-ю производную функции $y=x\mathrm{e}^{2x}$.

4. Составить многочлен Тейлора для функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ в окрестности точки $x_0=1$ до членов 20-го порядка.

5. Доказать неравенство $\mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}x$ при $x\in \mathrm{R}$.

6. Исследовать функции и начертить их графики:

   а) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2}$; б) $f(x)=3\sqrt[3]{(x-1)^2}-2x$;

   в) $f(x)=x^2\,\mathrm{e}^{1/x}$; г) $f(x)=x^2/2+\ln x$.

7. Объем добычи строительного песка y (т/ч) зависит от количества вложенного труда x (чел./ч): $y=4\sqrt{x}$. Цена щебня – 100 руб./т, зарплата рабочего – 50 руб./ч. Кроме зарплаты, другие издержки не учитываются. Найдите оптимальное количество вложенного труда (рабочих).

8. Спрос q на некоторое лекарство зависит от его цены p следующим образом: $q=\dfrac{20}{\sqrt{p}}$. Найти эластичность спроса. Какие рекомендации о цене лекарства можно дать руководителю фармацевтического предприятия?

Вариант 7

1. Доказать, что функция $y = \mathrm{e}^{4x} + 2\mathrm{e}^{-x}$ удовлетворяет уравнению $y''' - 13y' - 12y = 0$.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\mathrm{e}^{2,003}$; б) $\sin 147^{o}$; в) $\operatorname{arcctg} 1{,}05$.

3. Найти n-ю производную функции $y = x\ln x$.

4. Составить многочлен Тейлора 10-го порядка для функции $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+2x-1}$ в окрестности точки $x_0 = -1$.

5. Доказать неравенство $1 - 2\ln x \le \dfrac{1}{x^2}$ при $x > 0$.

6. Исследовать функции и начертить их графики:

   а) $f(x) = -\dfrac{8}{x^4} + x$; б) $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{(x-1)^2}$;

   в) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x-2}$; г) $f(x) = \ln(x^2 + 4x)$.

7. Функция издержек имеет вид: $C(x) = 200 + 10x + (1/2)x^2$. На начальном этапе фирма организует производство так, чтобы минимизировать средние издержки. В дальнейшем на товар устанавливается цена, равная 50 руб. за единицу. Определить оптимальное для фирмы значение выпускаемой продукции (предполагается, что весь выпущенный товар реализуется). На сколько следует увеличить выпуск товара по сравнению с начальным этапом? Как изменятся при этом средние и предельные издержки?

8. Функции спроса q и предложения s от цены p выражаются соответственно уравнениями: $q = 100(10 - \sqrt{p})$, $s = 2p + 72$. Найти эластичность спроса и предложения при равновесной цене, а также изменение дохода (в процентах) при увеличении цены на 10 %.

Вариант 8

1. Доказать, что функция $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ удовлетворяет уравнению $xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0$.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\sqrt{16{,}08}$; б) $\sin 359^o$; в) $\operatorname{arcctg} 1{,}08$.

3. Найти n-ю производную функции $y = x^{n-1} e^{1/x}$.

4. Составить многочлен Тейлора 15-го порядка для функции $f(x) = \sin(9x/2)$ в окрестности точки $x_0 = \pi/6$.

5. Доказать неравенство $\ln(1+x) > \dfrac{x}{x+1}$ при условии $x > 0$.

6. Исследовать функции и построить их графики:

   а) $f(x) = \dfrac{x^3}{12(x-2)}$; б) $f(x) = x^{2/3} + (x-2)^{2/3}$;

   в) $f(x) = 2x^3 e^{-x}$; г) $f(x) = x^2 - 2\ln x$.

7. Зависимость между доходом фермерского хозяйства (ден. ед./день) и количеством его работников x имеет вид: $R(x) = 2500\sqrt{x}$. Найти оптимальный размер фермерского хозяйства и его прибыль, если дневная зарплата рабочего равна 360 (ден. ед.), а прочие расходы хозяйства составляют $510 \ln x$ (ден. ед.).

8. Пусть производственная функция $y = 4\sqrt{x}$ выражает зависимость объема выпускаемой продукции y от численности персонала x. Сейчас на фирме работают 25 человек. Найдите средний и предельный объем выпускаемой продукции, эластичность выпуска по фондам (численности персонала). На сколько нужно увеличить численность персонала, чтобы объем выпускаемой продукции увеличился на 5 %?

Вариант 9

1. Доказать, что функция $y = \cos e^x + \sin e^x$ удовлетворяет уравнению $y'' - y' + ye^{2x} = 0$.
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\sqrt[6]{67{,}84}$; б) $\cos 151^o$; в) $\operatorname{arcctg}(-0{,}91)$.

3. Найти n-ю производную функции $y = \cos^4 x + \sin^4 x$.
4. Функцию $f(x) = \ln\left(x^2 - 7x + 12\right)$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$ до членов 20-го порядка.
5. Доказать, что $\sin x \ge x - \dfrac{x^3}{6}$ при условии $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
6. Исследовать функции и построить их графики:

   а) $\operatorname{arcctg}(-0{,}51)$; б) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

   в) $f(x) = 3\sqrt[3]{(x-1)^2} - 2x + 2$; г) $f(x) = e^{1/x} - x$.

7. Расходы x на рекламу влияют на валовой доход $R(x)$ по полученному эмпирически закону $R(x) = R\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)$, где R – доход в отсутствие рекламы. При каких значениях R оптимальные расходы на рекламу могут превысить весь доход в отсутствие рекламы?
8. Зависимость спроса q от цены p за единицу товара задается формулой $q = q_0 e^{-p^2/50}$. При каких значениях p спрос является эластичным? Какие рекомендации о цене за единицу продукции можно дать при $p = 4$ и при $p = 6$? Как изменится выручка при увеличении цены на $5\ \%$ в первом и во втором случае?

Вариант 10

1. Доказать, что функция $y = \arcsin x$ удовлетворяет уравнению $(1 - x^2)y'' = xy'$.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $3^{-1{,}97}$; б) $\operatorname{ctg} 34^o$; в) $\arcsin 0{,}46$.

3. Найти n-ю производную функции $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$.

4. Функцию $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 5x + 6}$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$ до членов 10-го порядка.

5. Доказать неравенство $\dfrac{\ln x}{x - 1} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при $x > 0, \quad x \neq 1.$

6. Исследовать функции и начертить их графики:

   а) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{(x + 2)^2} - 2;$ б) $f(x) = (x + 1)^{2/3} - x^{2/3} + 1;$

   в) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x + 4);$ г) $f(x) = x - \ln(x + 1)$.

7. Капитал в 1 млрд руб. может быть размещен в банке под 20 % годовых или инвестирован в производство, причем эффективность вложения ожидается в размере 50 %, а издержки равны квадрату вложенных в производство денег. Прибыль облагается налогом в p %. При каких значениях p вложение в производство является более эффективным, нежели чистое размещение капитала в банке? На сколько увеличится вклад по сравнению с чистым размещением под проценты, если прибыль облагается налогом: а) в 10 %; б) в 12 %?

8. Для производственной функции $y = x^2 \operatorname{arctg} x$ найти эластичность ресурса x при $x = 1$.

Вариант 11

1. Доказать, что функция $y = \mathrm{e}^{-x} \cos x$ удовлетворяет уравнению $y^{(4)} + 4y = 0$.
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\sqrt[3]{63{,}94}$; б) $\sin 151^o$; в) $\operatorname{arctg} 1{,}06$.

3. Найти формулу производной n-го порядка для функции $y = x^n$:

   а) $n \in \mathrm{R}$; б) $n \in \mathrm{N}$.

4. Функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$.
5. Доказать неравенство $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$ при $x \in \mathrm{R}$.
6. Исследовать функции и построить их графики:

   а) $f(x) = \dfrac{x}{(x+2)^2}$; б) $f(x) = x\sqrt[3]{(x-1)^2}$;

   в) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2/2}$; г) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

7. Известно, что прогнозная цена акции имеет вид: $C_{\text{прогн}} = C_0 \dfrac{gr}{(r_{\text{e}} - r) + gr}$, где C_0 – начальная цена; g – доля прибыли, выделенная на выплату дивидендов; r_{e} – наиболее эффективная ставка, по которой можно реинвестировать дивиденды; r – относительная прибыль корпорации. Рассматриваются две акции с начальной ценой, равной единице, и следующими характеристиками: $r_1 = 0{,}4$, $r_2 = 0{,}2$, $g_1 = g_2 = g$. Известно, что $r_{\text{e}} = 0{,}5$. Инвестор продал первую акцию и купил вторую. При каких значениях g эта операция принесет наибольшую ожидаемую прибыль?
8. Уравнение спроса имеет вид: $p = 1000 + 3q - 4q^2$. Определить эластичность спроса по цене при $q = 10$ ед. Каково значение совокупной и предельной выручки при $q = 10$ ед.?

Вариант 12

1. Доказать, что функция $y = e^{-x^2}\left(5 + x^2/2\right)$ удовлетворяет уравнению $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\sqrt{640}$; б) $\operatorname{tg} 116^o$; в) $\arccos 0{,}45$.
3. Найти n-ю производную функции $y = xa^{kx}$.
4. Функцию $f(x) = 1/\sqrt{x}$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$.
5. Доказать неравенство $e^x \geq 1 + x$ при $x \in R$.
6. Исследовать функции и построить их графики:

   а) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2x$;

   в) $f(x) = 2x^3 e^{-x}$; г) $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.
7. Стоимость эксплуатации катера, плывущего со скоростью v (км/ч), составляет (80 + 0,2 v^2) ден. ед. за 1 ч. С какой скоростью должен плыть катер, чтобы стоимость прохода 1 км пути была наименьшей?
8. Пусть зависимость между себестоимостью единицы продукции C и объемом q ее производства выражается формулой $C = 60 - 0{,}3q$. При каких значениях q издержки производства с увеличением его объема будут уменьшаться? На сколько процентов увеличатся издержки производства при увеличении его объема с $q = 70$ до $q = 77$ единиц изделия?

Вариант 13

1. Доказать, что функция $y = x^2 e^{1/x} + x^2$ удовлетворяет уравнению $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\sqrt{24{,}96}$; б) $\operatorname{ctg} 33^o$; в) $\ln(e + e/10)$.

3. Найти n-ю производную функции $y = \cos^3 x$.

4. Для функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ написать формулу Маклорена до членов 5-го порядка включительно.

5. Доказать неравенство $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$ при $0 < x < \pi/2$.

6. Исследовать функции и построить их графики:

   а) $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^4}$; б) $f(x) = \sqrt[3]{(1 - x^2)^2}$;

   в) $f(x) = -2x^2 e^{-x}$; г) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x}$.

7. При производстве первых пятидесяти единиц продукции издержки составляют $C(x) = 10x$. Далее при производстве каждой следующей единицы продукции издержки возрастают на 2 усл. ед. Цена единицы продукции равна 71 усл. ед. Найти оптимальное значение выпуска продукции.

8. Менеджеры по производству фирмы Cosmic Paper Corporation считают, что объем бумаги, производимой за определенный период времени, можно описать следующей функцией: $q = 72x + 15x^2 - x^3$, где x – количество (ед.) ресурса, используемого за тот же период. Найти предельный и средний продукт. На сколько вырастет выработка, если ресурс возрастет с 7 до 8 единиц за период? При каком значении ресурса достигается максимальное значение среднего продукта?

Вариант 14

1. Доказать, что функция $y=\dfrac{x}{\cos x}$ удовлетворяет уравнению $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\sec x$.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\sqrt[5]{250}$; б) $\ln\left(\mathrm{tg}\,47^{o}15'\right)$; в) $\mathrm{arctg}\,1{,}04$.

3. Найти производную n-го порядка функции $y=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$.

4. Для функции $f(x)=\mathrm{tg}\,x$ написать формулу Маклорена до членов 5-го порядка включительно.

5. Доказать неравенство $x^{\alpha}\geq 1+\alpha\ln x$ при $x>0$, $\alpha>0$.

6. Исследовать функции и построить их графики:

   а) $f(x)=\dfrac{x^3}{2-3x}$; б) $f(x)=x\ln(\mathrm{e}+1/x)$;

   в) $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-2x}$; г) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2+2x}$.

7. Банк в конце года увеличивает вклад клиента на r_1 процент, а в середине года еще на r_2 процентов, причем $r_1+r_2=30$. Вкладчик желает в середине года сразу после начисления процентов снять десятую часть положенных им в банк денег. При каком значении r_1 счет вкладчика в конце года окажется максимальным, и какова прибыль вкладчика по отношению к его первоначальному вкладу?

8. Объем продукции u (тыс. руб.) в течение рабочего дня, выпускаемой некоторой фирмой, можно выразить функцией $u=-2t^3+21t^2+48t+650$, где t – время. Найти производительность труда, скорость и темп ее изменения: а) в начале дня $(t=0)$; б) в середине дня $(t=4)$; в) в конце дня $(t=8)$.

Вариант 15

1. Доказать, что функция $y = x^6/6 - \sin x + x$ удовлетворяет уравнению $y'' = 5x^4 + \sin x$.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $1{,}01^2 \cdot 2{,}01^2 \cdot 3{,}01^2$; б) $\ln 1{,}2$; в) $\cos 63^o$.

3. Найти n-ю производную функции $y = x\sin 2x$.

4. Составить многочлен Тейлора 50-го порядка для функции $f(x) = x/(x-1)$ в окрестности точки $x_0 = 2$.

5. Доказать неравенство $\operatorname{tg} x > x + x^3/3$ при $0 < x < \pi/2$.

6. Исследовать функции и построить их графики:

   а) $f(x) = \dfrac{x^3}{12(x-2)}$; б) $f(x) = -2x\mathrm{e}^{-x/2}$;

   в) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x+3}} - x + 1$; г) $f(x) = x^2(\ln x - 1)$.

7. Фирма из-за нестабильности рынка сбыта имела в течение пяти лет чередование прибылей и убытков с одним и тем же числом процентов каждый год по отношению к предыдущему финансовому году. При какой исходной процентной ставке, не превышающей 100 % годовых, итоговая прибыль фирмы за пять лет будет наибольшей, и какова она по отношению к первоначальному капиталу?

8. Функции спроса q и предложения s на некоторые фрукты от их цены p имеют соответственно вид: $q = 1100 - 2p$, $s = 400 + 8p$. Найти эластичность спроса в точке равновесной цены. Как изменятся равновесная цена, спрос и эластичность спроса при увеличении предложения фруктов в супермаркете на 25 %?

Вариант 16

1. Доказать, что функция $y = e^x - x - x^2/2$ удовлетворяет уравнению $y'' = y' + x$.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\sqrt{\dfrac{2,05^2 - 3}{2,05^2 + 5}}$; б) $\cos 31^o$; в) $\log_2 15,97$.

3. Найти n-ю производную функции $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$.

4. Составить многочлен Тейлора 4-го порядка для функции $f(x) = x^8 - x^4 + x^2$ в окрестности точки $x_0 = 1$.

5. Доказать неравенство $e^{2x} < \dfrac{1+x}{1-x}$ при $0 < x < 1$.

6. Исследовать функции и построить их графики:

   а) $f(x) = 1 + 3/x + 2/x^2$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)(x-2)}$;

   в) $f(x) = e^{2x - x^2}$; г) $f(x) = x^2 \ln x$.

7. У фермера имеется стадо в 100 коров, каждая массой 200 кг. Содержание одной коровы обходится в 90 центов в день. Корова прибавляет 2 кг в день. Рыночная цена коров на момент продаж составляет 4 доллара за 1 кг и падает каждый следующий день на полцента больше, чем в предыдущий. Как долго фермер должен откладывать продажу, чтобы получить наибольший доход? Сколько он выиграет по сравнению с немедленной продажей?

8. Производительность труда бригады в течение рабочего дня представляет функцию $y = -2,5t^2 + 10t + 100$, где $0 \le t \le 8$ – рабочее время. Вычислить скорость и темп изменения производительности труда при $t = 3$ и при $t = 6$.

Вариант 17

1. Доказать, что функция $y = 2 + \ln\left(x^2/4\right)$ удовлетворяет уравнению $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$.
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\sqrt[3]{64{,}05}$; б) $\mathrm{tg}\, 63^o$; в) $\arcsin 0{,}05$.

3. Найти n-ю производную функции $y = x^2/(1-x)$.
4. Для функции $f(x) = \dfrac{x+3}{3+x^2}$ в окрестности точки $x_0 = 1$ составить формулу Тейлора до членов 3-го порядка включительно.
5. Доказать неравенство $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ при $x > 0$.
6. Исследовать функции и построить их графики:

   а) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x(x+2)}$;

   в) $f(x) = (1+x^2)\mathrm{e}^{-x}$; г) $f(x) = \ln(x^2 + x^3)$.

7. Экспериментально установлено, что расход бензина y (л) на 100 км пути автомобиля ГАЗ-69 в зависимости от скорости x (км/ч) является функцией $y = 18 - 0{,}3x + 0{,}003x^2$, где $30 \le x \le 100$. Определить наиболее экономичную скорость автомобиля, при которой расход бензина будет наименьшим. Найти это наименьшее количество бензина.
8. Зависимость между издержками производства C и объемом продукции q выражается функцией $C = 40q + 2q^2 - 0{,}1q^3$. При каком объеме продукции q предельные и средние издержки совпадают? Определить средние и предельные издержки: а) при $q = 5$ ед; б) при $q = 15$ ед. В каком случае выгодно увеличивать объем производства?

Вариант 18

1. Доказать, что функция $y=\dfrac{4}{(x+4)^2}$ удовлетворяет уравнению $2y''=3y^2$.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\mathrm{e}^{1,03}$; б) $\arccos\ 0,05$;

   в) $\sqrt[4]{2x-\sin(\pi x/2)}$ при $x=1,02$.

3. Найти n-ю производную функции $y=x\cos 2x$.

4. Для функции $f(x)=\sqrt{1+x}$ написать формулу Маклорена до членов 5-го порядка включительно.

5. Доказать неравенство $\mathrm{e}^x\geq 1+\ln(1+x)$ при $x>-1$.

6. Исследовать функции и начертить их графики:

   а) $f(x)=x\big/\left(1-x^2\right)^2$; б) $f(x)=(x-1)^{2/3}(x+1)^3$;

   в) $f(x)=x+\mathrm{e}^{-x}$; г) $f(x)=x(\ln x-4)$.

7. Некто нанял пароход для перевозки грузов на расстояние в 1000 км. Он предлагает плату хозяину парохода в размере 1500 монет, но требует вернуть 9 монет за каждый час пребывания парохода в пути. Предполагается, что пароход будет двигаться с постоянной скоростью. Если эта скорость будет равна v км/ч, то в конце пути хозяин обязан выплатить команде премию, равную $10v$ монет. С какой скоростью хозяин должен вести пароход, чтобы заработать максимальное число монет? Какое это число?

8. Как связаны предельные и средние полные затраты предприятия, если эластичность полных затрат равна: а) $1/2$; б) 2. В каком случае выгодно расширять производство?

Вариант 19

1. Доказать, что функция $y=\sqrt{2x-x^2}$ удовлетворяет уравнению $y^3y''=-1$.
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $2{,}004^{2{,}005}$; б) $\operatorname{arctg} 0{,}97$;

   в) $\sqrt[3]{3x+\cos x}$ при $x=0{,}01$.
3. Найти n-ю производную функции $y=\dfrac{1-2x}{\sqrt{1+2x}}$.
4. Составить формулу Тейлора 100-го порядка для функции $f(x)=1/x$ в окрестности точки $x_0=2$.
5. Доказать неравенство $\sin x\operatorname{tg} x>x^2$ при $x\in(0,\pi/2)$.
6. Исследовать функции и начертить их графики:

   а) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2}$; б) $f(x)=\sqrt[3]{x(x-2)}$;

   в) $f(x)=\mathrm{e}^x(x-5)$; г) $f(x)=\dfrac{\ln^{2/3}x}{x}$.
7. При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\dfrac{t}{t+1}$-ю часть курса, а забывает $\dfrac{t}{25}$-ю часть. Сколько дней надо затратить студенту на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса? Какая часть курса останется не подготовленной к экзамену?
8. Пусть стоимость q изготовления x экземпляров продукта задается формулой $q=1500+50x+\dfrac{x^2}{150\,000}$. При каком объеме производства средняя стоимость единицы продукта совпадает с маргинальной (предельной)? Найти коэффициенты эластичности полных и средних затрат при данном объеме.

Вариант 20

1. Доказать, что функция $y=\sqrt{1+e^{2x}}$ удовлетворяет уравнению $y^4-y^3y''=1$.
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\sqrt[7]{100}$; б) $\sin 148^o$; в) $\operatorname{arctg} 1{,}02$.

3. Найти n-ю производную функции $y=\ln\dfrac{1+2x}{1-2x}$.
4. Для функции $f(x)=\sin(2x+3)$ в окрестности точки $x_0=-1$ составить формулу Тейлора до членов 5-го порядка включительно.
5. Доказать неравенство $\cos x+x\sin x>1$, $x\in(0;\ \pi/2)$.
6. Исследовать функции и начертить их графики:

   а) $f(x)=\dfrac{3-x^2}{x+2}$; б) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2-4x+3}$;

   в) $f(x)=\operatorname{arctg}(1/x)$; г) $f(x)=x^2\ln^2 x$.

7. Бизнесмен Вася купил две автомашины по 20 тыс. долларов и перепродал их. При перепродаже первой автомашины прибыль составила p_1 %, второй – p_2 %, причем $p_1+p_2=20$. О второй сделке Вася не сообщил в налоговую инспекцию, и с него взяли штраф, составляющий 25 p_1 % прибыли, полученной от продажи второго автомобиля. Выгодной ли оказалась сделка Васи? Каковы его максимально возможные потери?
8. Функция издержек фирмы имеет кубическую зависимость от объема продукции q: $c(x)=q^3-80\,q^2+1\,200q+50\,000$. При каком объеме производства предельные и средние издержки фирмы совпадают? Найти коэффициенты эластичности полных и средних издержек при данном объеме.

Вариант 21

1. Доказать, что функция $y=\dfrac{x+1}{x}$ удовлетворяет уравнению $2(y')^2=y''(y-1)$.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\sqrt[3]{8{,}09}$; б) $\operatorname{ctg}272^o$; в) $\arcsin 0{,}99$.

3. Найти n-ю производную функции $y=\sin^2 x$.

4. Для функции $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ написать формулу Маклорена до членов 4-го порядка включительно.

5. Доказать неравенство $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$ при $x>0$.

6. Исследовать функции и начертить их графики:

   а) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$; б) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2+4x+3}$;

   в) $f(x)=x^2 e^{-x^2}$; г) $f(x)=x\ln^{2/3}x$.

7. Завод A нужно соединить шоссейной дорогой с прямолинейной железной дорогой, на которой расположен поселок B. Расстояние AC от завода до железной дороги равно a, а расстояние BC по железной дороге равно b. Стоимость перевозок грузов по шоссе в k раз $(k>1)$ выше стоимости перевозок по железной дороге. В какую точку D отрезка BC нужно провести шоссе от завода, чтобы стоимость перевозок грузов от завода A к поселку B была наименьшей?

8. Функция потребления некоторой страны имеет вид

$$C(x)=-21{,}12+0{,}35x+0{,}36x^{5/6},$$

   где x – совокупный национальный доход. Найти: а) предельную склонность к потреблению; б) предельную склонность к сбережению; в) эластичность потребления по доходу, если национальный доход составляет 32. Склонно ли общество данной страны при существующем потреблении и национальном доходе к прогрессу? Почему?

Вариант 22

1. Доказать, что функция $y = 2e^{x^2/2} - 1$ удовлетворяет уравнению $y'' = xy' + y + 1$.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $e^{0,1x(1-x)}$, $x = 1{,}05$; б) $\operatorname{ctg} 31^o$; в) $\arcsin 0{,}08$.

3. Найти 10-ю производную функции $y = x^2 \sin 3x$.

4. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$ до членов 3-го порядка.

5. Доказать, что $\dfrac{\sin x}{x} \ge \cos x$ при условии $0 < x \le \pi/2$.

6. Исследовать функции и построить их графики:

   а) $f(x) = \dfrac{4x}{(x-2)^2}$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}$;

   в) $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$; г) $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln|x|}$.

7. Пусть q – количество реализованного товара. Найдите максимум прибыли, если издержки на производство товара и доход выражаются соответственно формулами: $c(q) = q^3 - 40q^2 + 147q + 2000$, $r(q) = 90q - 10q^2$.

8. Даны две функции, моделирующие связь между величиной дохода x и величиной спроса потребителей на товары Q:

   а) $Q = \dfrac{15(x-10)}{x+20}$; б) $Q = \dfrac{15x(x+20)}{x^2+10}$.

   Найти коэффициенты эластичности этих функций при доходе $x = 20$. Что можно сказать о качестве приобретаемых товаров?

Вариант 23

1. Доказать, что функция $y=\frac{1}{3}(1-2x)^{3/2}+x$ удовлетворяет уравнению $y'''=(y'')^3$.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\sqrt[4]{90}$; б) $\operatorname{ctg} 46^{\circ}$; в) $\arcsin 0{,}44$.

3. Найти 50-ю производную функции $y=\cos^4 x$.

4. Разложить функцию $f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0=2$ до членов 5-го порядка.

5. Доказать неравенство $\operatorname{arctg} x\le\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}$ при условии $x>-1$.

6. Исследовать функции и построить их графики:

   а) $f(x)=\frac{x-2}{(x+3)^2}-1$; б) $f(x)=\sqrt[3]{4x(x-1)}$;

   в) $f(x)=(x+2)\mathrm{e}^{1/x}$; г) $f(x)=\ln\left|x^2-1\right|$.

7. Когда пароходы были еще несовершенны, считалось, что количество расхода в час топлива пропорционально кубу скорости парохода. При скорости 15 км/ч тратили 1,5 т угля в час по цене 18 руб. за тонну, а другие расходы составляли 16 руб. в час. Найти в рублях наименьшую стоимость прохождения пути в 2 000 км.

8. Спрос q на некоторые товары народного потребления зависит от их стоимости p следующим образом: $q=\frac{400}{\sqrt{p}}-6$. При каком значении p спрос будет нейтральным (с единичной эластичностью)?

Вариант 24

1. Доказать, что функция $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{10}$ удовлетворяет уравнению $\left(1+x^2\right)y''+xy'-100y=0$.
2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

а) $\sqrt[10]{1000}$; б) $\sin 35^{\circ}$; в) $\ln\left(0,01+\sqrt{1,01}\right)$.

3. Найти десятую производную функции $y=\dfrac{e^x}{x}$.
4. Разложить функцию $f(x)=\operatorname{ctg} x$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0=\pi/2$ до членов третьего порядка.
5. Доказать неравенство $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\le\dfrac{3}{5}+\dfrac{16}{25}\ln\dfrac{x}{2}$ при $x>1$.
6. Исследовать функции и построить их графики:

   а) $f(x)=-1+\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$; б) $f(x)=x^{2/3}e^{-x}$;

   в) $f(x)=-3\sqrt[3]{(x+3)^2}+x$; г) $f(x)=x\ln^2|x|$.

7. В степи, на расстоянии 9 км к северу от шоссе, идущего с запада на восток, находится поисковая партия. В 15 км к востоку от ближайшей на шоссе к поисковой партии точки расположен райцентр. Поисковая партия отправляет курьера-велосипедиста в райцентр. Каков должен быть маршрут следования курьера, чтобы он прибыл в райцентр в кратчайший срок, если известно, что по степи он едет со скоростью 8 км/ч, а по шоссе со скоростью 10 км/ч?
8. Зависимость между объемом выпуска готовой продукции y млн руб. и объемом производственных фондов x млн руб. выражается уравнением $y=0{,}65x-0{,}4\sqrt{x}-6{,}2$. Найти эластичность выпуска продукции для предприятия, имеющего фонды в размере 36 млн руб.

Вариант 25

1. Доказать, что функция $y = a\,\mathrm{tg}\sqrt{a/x-1}$ удовлетворяет уравнению
$$a^2 + y^2 + 2x\sqrt{ax-x^2}\,y' = 0.$$

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\sqrt[5]{1{,}03^2}$; б) $\arcsin 0{,}09$; в) $\sqrt[4]{2x-\sin(\pi x/2)}, \quad x = 1{,}02.$

3. Найти пятую производную функции $y = \mathrm{e}^{x/2}\sin 2x$.

4. Разложить функцию $f(x) = \sin^3 x$ по целым неотрицательным степеням переменной x.

5. Вычислить расстояние от начала координат до нормали к кривой $y = \mathrm{e}^{2x} + x^2$, проведенной через точку с абсциссой $x = 0$.

6. Исследовать функции и построить их графики:

   а) $f(x) = \dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$; б) $f(x) = \arcsin\dfrac{4x}{4+x^2}$;

   в) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}$; г) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

7. Расходы на топливо для топки парохода пропорциональны кубу его скорости. Известно, что при скорости 10 км/ч расходы на топливо составляют 30 руб. в час, остальные же расходы (не зависящие от скорости) составляют 480 руб. в час. При какой скорости парохода общая сумма расходов на 1 км пути окажется наименьшей? Какова будет при этом общая сумма расходов в час?

8. Используя понятие дифференциала, определить, на сколько процентов изменится величина степени $5{,}1^{4{,}1}$, если ее основание увеличить на 3 %.

Вариант 26

1. Доказать, что функция $y = 2e^{3x} - e^{-3x}$ удовлетворяет уравнению $y'\,y'' = y\,y'''$.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $33^{0,2}$; б) $\lg 11$; в) e^{1-x^2} при $x = 1{,}05$.

3. Найти 10-ю производную функции $y = x^3 \ln x$.

4. Разложить функцию $f(x) = \sin^2(x/2)$ по целым неотрицательным степеням переменной x.

5. Доказать неравенство $\dfrac{2x + \pi x^2}{2x^2 + 2} > \operatorname{arctg} x$ при $x > 0$.

6. Исследовать функции и построить их графики:

   а) $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{(x+1)^2}$; б) $f(x) = x^2 e^{-x}$;

   в) $f(x) = \sqrt[3]{x(x-3)^2}$; г) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.

7. Функция издержек имеет вид: $C(x) = \begin{cases} x/5, & x \le 20; \\ x/5 + (x-20)^2/8, & x > 20. \end{cases}$ При какой цене p за единицу товара оптимальное значение выпуска $x_{\text{опт}} = 30$?

8. Зависимость между объемом произведенной продукции Q и численностью персонала L имеет вид: $Q = 108 + 6L^2 - 0{,}25L^3$. Требуется: а) определить численность персонала L, при которой выпуск Q достигает максимального значения; б) определить численность персонала L, при которой средняя производительность труда становится максимальной; в) найти интервал изменения L, на котором увеличение численности персонала неэффективно.

Вариант 27

1. Доказать, что функция $y = 4/15\, x^2 \sqrt{x}$ удовлетворяет уравнению $2x\, y''' = y''$.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $30^{1/3}$; б) $\ln \operatorname{tg} 45^{\circ} 15'$; в) $\operatorname{arctg} 1{,}07$.

3. Найти 5-ю производную функции $y = x^2\, \mathrm{e}^{5x}$.

4. Разложить функцию $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ по формуле Тейлора порядка 5 в точке $x_0 = 0$.

5. Доказать неравенство $e^x > 1 + \ln(1 + x)$ при $x > 0$.

6. Исследовать функции и построить их графики:

   а) $f(x) = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$; б) $f(x) = (x - 1)\, \mathrm{e}^{-x+1}$;

   в) $f(x) = \sqrt[3]{x}\,(x - 1)$; г) $f(x) = \arcsin \dfrac{2 - x}{1 + x}$.

7. Зависимость между издержками производства C и и объемом продукции Q выражается функцией $C(Q) = 30Q - 0{,}08Q^3$. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции: а) $Q = 5$ ед., б) $Q = 10$ ед.

8. Для производственной функции $y = x^2 \operatorname{arctg} x$ найти предельную эффективность ресурса при $x = 1$.

Вариант 28

1. Доказать, что функция $y = x\ln x - x$ удовлетворяет уравнению $y'' x\ln x = y'$.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\sqrt{16{,}2}$; б) $\operatorname{tg} 46^{\circ}$; в) $\lg 11$.

3. Найти производную 3-го порядка функции $y = x^2 \sin 2x$.

4. Представить функцию $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+x}$ формулой Тейлора порядка 4 в окрестности точки $x_0 = 0$.

5. Доказать, что уравнение $x^3 - 4x^2 + 8x - 27 = 0$ имеет единственный действительный корень.

6. Исследовать функции и построить их графики:

   а) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{(x-1)^2}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{1/x}}$;

   в) $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{2x^2}$; г) $f(x) = \ln\left(\mathrm{e} + x^2\right)$.

7. Затраты на производство x единиц продукции равны $C(x) = 3x^2 + 200x + 6000$, цена продукции – $p(x) = 520 - 5x$. Найти оптимальный объем выпуска продукции и соответствующую ему прибыль.

8. Функции спроса q и предложения s на некоторый товар от его цены p имеют соответственно вид $q = 600 - 0{,}2p$, $s = 200 + 0{,}3p$. Найти эластичность спроса в точке равновесной цены. Как изменятся равновесная цена, спрос и эластичность спроса при уменьшении предложения товара на рынке на 20 %?

Вариант 29

1. Доказать, что функция $y=1-2e^{x}+e^{2x}$ удовлетворяет уравнению $y'''-3y''+2y'=0$.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\sqrt[3]{8,01}$; б) $\cos 151^{\circ}$; в) $\lg 101$.

3. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. Найти y''.

4. Представить функцию $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$ формулой Тейлора шестого порядка в окрестности точки 0.

5. При каких значениях параметра a функция $y=ax+3\sin x+4\cos x$ возрастает на всей числовой прямой?

6. Исследовать функции и построить их графики:

   а) $f(x)=\dfrac{2x-5}{(x-2)^2}$; б) $f(x)=xe^{1/x}$;

   в) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$; г) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$.

7. Объем реализации y продукции зависит от цены p: $y=100-4p$. При этом издержки определяются формулой $C(y)=(y-20)^2/8$. Найти оптимальный объем производства и соответствующие ему значения прибыли и издержек.

8. Найти темп роста объема выпуска продукции для производственной функции $y=x^2\operatorname{arctg}x$ при $x=1$.

Вариант 30

1. Доказать, что функция $y = \mathrm{e}^{x+x^2} + 2\mathrm{e}^x$ удовлетворяет уравнению $y' - y = 2xe^{x+x^2}$.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

   а) $\sqrt[4]{258}$; б) $\lg 11$; в) $\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{0{,}98}{1{,}02}}$.

3. $y = \left(1 + x^2\right)\operatorname{arctg} x$. Найти y''.

4. Разложить функцию $f(x) = x\sin\left(x/2\right)$ по формуле Маклорена n-го порядка с остаточным членом в форме Пеано.

5. Доказать неравенство $\operatorname{arctg} x \le x$ при $x \ge 0$.

6. Исследовать функции и построить их графики:

   а) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2 - 2x}$; б) $f(x) = \left(1 - x\right)\mathrm{e}^{2x-1}$;

   в) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$; г) $f(x) = 2\cos x + \sin 2x$.

7. Для функции спроса $y = 5/x$ в зависимости от цены x найти эластичность спроса по цене $E_x(y)$ в точках $x = 1$, $x = 4$, $x = 8$, $x = 10$. В каждом из рассмотренных случаев выяснить, является ли спрос эластичным, нейтральным или неэластичным.

8. Зависимость объема выпуска продукции Q от времени t определяется функцией $Q = 100t + \dfrac{1}{3}\ln\left(32 + t^3\right)$. Найти промежуток времени, в течение которого количество произведенной продукции увеличивается. С какого момента времени производство замедляется?

ПРИМЕРНЫЙ ТИПОВОЙ ВАРИАНТ

1. Доказать, что функция $y = 3\,\mathrm{tg}\,(2x-1)$ удовлетворяет уравнению $y'' = \frac{4}{3}yy'$.

2. Найти время удвоения вклада в банк, если ставка банковского процента за год составляет 10 % годовых.

3. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение выражений:

1) $f(x) = \sqrt{x^3 + 5x + 3}$ при $x = 1{,}03$; 2) $y = \sin^2 5x$.

4. С какой относительной погрешностью надо измерить радиус шара, чтобы объем его можно было определить с точностью до 1 %?

5. Найти n-ю производную функций:

1) $y = \dfrac{x}{4-x^2}$; 2) $y = \sin^2 5x$.

6. Разложить функцию $f(x) = \ln(1+x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$.

7. Исследовать функции и начертить их графики:

1) $y = \dfrac{(x-1)^3}{3(x+1)^2}$; 2) $y = \sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{2x}{3}}$;

3) $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{(x-1)^2}$; 4) $f(x) = \ln(x^2 + 4x)$.

8. Доказать неравенство $1 + 2\ln x \le x^2$ при $x > 0$.

9. В соответствии с прогнозами прибыль предприятия описывается функцией $\pi(q) = q^2 - 8q + 10$, где q – величина, характеризующая объем производства (млн руб.). Найти оптимальный объем выпуска продукции, производимой фирмой.

10. В экономике цена обычно откладывается по вертикальной оси, а величина спроса по горизонтальной оси, уравнение спроса обычно записывается так, что цена p является функцией спроса q, а не q – функцией p. Рассмотрим уравнение спроса: $p = 940 - 48q + q^2$. Какова эластичность спроса по цене при продаже 10 единиц продукции?

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

Пример 1

Показать, что функция $y = 3\,\mathrm{tg}\,(2x-1)$ удовлетворяет уравнению $y'' = \frac{4}{3} y y'$.

Решение. Применяя правило дифференцирования производной сложной функции, находим первую производную $y' = \frac{3}{\cos^2(2x-1)}(2x-1)' = \frac{6}{\cos^2(2x-1)}$.

Еще раз дифференцируя y', получим $y'' = 6\cdot(-2)\cos^{-3}(2x-1)(-\sin(2x-1))\cdot 2 = = \frac{24\sin(2x-1)}{\cos^3(2x-1)} = 24\frac{\mathrm{tg}\,(2x-1)}{\cos^2(2x-1)}$. Подставим y и y' в правую часть уравнения: $\frac{4}{3}\cdot 3\mathrm{tg}(2x-1)\frac{6}{\cos^2(2x-1)} = 24\frac{\mathrm{tg}\,(2x-1)}{\cos^2(2x-1)} \equiv y''$. Получаем тождество, следовательно, функция y удовлетворяет данному уравнению.

Пример 2

Найти время удвоения вклада в банк, если ставка банковского процента за год составляет 10 % годовых.

Решение. Найдем количество лет T, в течение которых сумма вклада увеличится в 2 раза. За год вклад увеличивается в $\left(1+\frac{10}{100}\right)=1{,}1$ раз, поэтому за T лет вклад увеличится в $(1{,}1)^T$ раз. Т.о., необходимо решить уравнение

$(1{,}1)^T = 2$. Логарифмируя, получаем $T\ln 1{,}1 = \ln 2$, откуда $T = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}1}$. Для приближенного вычисления $\ln 1{,}1$ воспользуемся формулой

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \quad \Delta x \to 0. \tag{1}$$

Полагая $f(x) = \ln x$, найдем $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ и $\ln(x + \Delta x) \approx \ln x + \dfrac{\Delta x}{x}$. В данном примере при $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}1$ получим $\ln 1{,}1 \approx 0{,}1$. Т. к. $\ln 2 \approx 0{,}7$, то время удвоения вклада $T \approx 7$ (лет).

Пример 3

1) Вычислить приближенно значение функции $f(x) = \sqrt{x^3 + 5x + 3}$ при $x = 1{,}03$.

Решение. Принимаем $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}03$. Тогда $f(1) = \sqrt{1^3 + 5\cdot 1 + 3} = 3$. Найдем производную $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 5}{2\sqrt{x^3 + 5x + 3}}$, далее $f'(1) = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$. Согласно формуле (1) получаем $\sqrt{1{,}03^3 + 5\cdot 1{,}03 + 3} \approx 3 + \dfrac{4}{3}\cdot 0{,}03 = 3{,}04$.

2) Найти приближенное значение $\sqrt[3]{7{,}98}$.

Решение. Имеем $\sqrt[3]{7{,}98} = \sqrt[3]{8 - 0{,}02} = 2\sqrt[3]{1 - \dfrac{0{,}02}{8}} = 2\sqrt[3]{1 - \dfrac{1}{400}}$. Здесь $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $f(1) = 1$, $f'(1) = \dfrac{1}{3}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = -\dfrac{1}{400}$, и согласно формуле (1) получаем $\sqrt[3]{7{,}98} \approx 2\left(1 + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{400}\right)\right) = 1\dfrac{599}{600} \approx 1{,}998$.

<u>Замечание.</u> В этом пункте можно было положить $x_0 = 8$, тогда $\Delta x = -0{,}02$.

Пример 4

С какой относительной погрешностью надо измерить радиус шара, чтобы объем его можно было определить с точностью до 1 %?

Решение. $V = {}^4\!/_3\,\pi r^3$. Нужно, чтобы $\dfrac{\Delta V}{V} \approx \dfrac{dV}{V} \le 0{,}01$. Имеем $\dfrac{dV}{V} = 3\dfrac{dr}{r}$, значит, $\dfrac{dr}{r} \le \left({}^1\!/_3\right) \cdot 0{,}01$. Итак, радиус шара нужно измерить с точностью 1/3 %.

Пример 5

1. Найти n-ю производную функций:

а) $y = \dfrac{x}{4 - x^2}$; б) $y = \sin^2 5x$.

Для нахождения *n-й* производной функции полезно в некоторых случаях функцию предварительно преобразовать, например, рациональную функцию разложить на сумму простейших дробей, понизить степень тригонометрической функции и т. д. Так в пункте $\underline{a}$ представим заданную функцию в виде суммы простейших дробей: $\dfrac{x}{4 - x^2} = \dfrac{A}{2 - x} + \dfrac{B}{2 + x}$. Умножая обе части этого равенства на знаменатель левой части, приходим к тождеству: $x \equiv A(2 + x) + B(2 - x)$. Последовательно полагая $x = 2$, $x = -2$, получим: $2A + 2B = 0$, $A - B = 1$. Отсюда $A = \dfrac{1}{2}$, $B = -\dfrac{1}{2}$. Таким образом, $\dfrac{x}{4 - x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2 - x} - \dfrac{1}{2 + x}\right)$. Находим $y' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1}{(2 - x)^2} \cdot (-1) - \dfrac{1}{(2 + x)^2}\right)$,

$$y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)(-2)}{(2 - x)^3} \cdot (-1)^2 - \frac{1 \cdot 2}{(2 + x)^3}\right),\; y''' = \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)(-2)(-3)}{(2 - x)^4} \cdot (-1)^3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(2 + x)^4}\right), \mathbf{K},$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)(-2)(-3)\mathbf{K}(-n)}{(2 - x)^{n+1}} \cdot (-1)^n - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3\mathbf{K}\,n}{(2 + x)^{n+1}}\right) = \frac{n!\left((2 + x)^{n+1} - (2 - x)^{n+1}\right)}{2\left(4 - x^2\right)^{n+1}}.$$

В пункте *б* представим функцию $y=\sin^2 5x$ в виде $y=\frac{1}{2}(1-\cos 10x)$. Первая производная $y'=\frac{1}{2}(\sin 10x)\cdot 10=-\frac{1}{2}\left(\cos\left(10x+\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot 10$. Если $y^{(n-1)}=$ $=-\frac{1}{2}\left(\cos\left(10x+\frac{\pi}{2}(n-1)\right)\right)\cdot 10^{n-1}$, то согласно принципу математической индукции $y^{(n)}=\frac{1}{2}\left(\sin\left(10x+\frac{\pi}{2}(n-1)\right)\right)\cdot 10^{n-1}\cdot 10=-\frac{10^{\,n}}{2}\left(\cos\left(10x+\frac{\pi}{2}n\right)\right)$.

2. Для функции $y(x)=\left(x^3+5x-6\right)\mathrm{e}^{4x}$ в точке $x=0$ найти производную 10-го порядка.

Решение. Заданная функция представляет собой произведение двух функций. В этом случае для нахождения n-й производной нужно применить формулу Лейбница

$$y^{(n)}=\left(u(x)v(x)\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(u(x)\right)^{(n-k)}\left(v(x)\right)^{(k)},$$

где $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\mathbf{K}(n-k+1)}{1\cdot 2\mathbf{K}k}$.

Для заданной функции в случае $n=10$ формула Лейбница принимает вид

$$y^{(10)}(x)=\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k\left(\mathrm{e}^{4x}\right)^{(10-k)}\left(x^3-5x+6\right)^{(k)}=C_{10}^0\left(\mathrm{e}^{4x}\right)^{(10)}\left(x^3-5x+6\right)^{(0)}+$$
$$+C_{10}^1\left(\mathrm{e}^{4x}\right)^{(9)}\left(x^3-5x+6\right)^{(1)}+C_{10}^2\left(\mathrm{e}^{4x}\right)^{(8)}\left(x^3-5x+6\right)^{(2)}+C_{10}^3\left(\mathrm{e}^{4x}\right)^{(7)}\left(x^3-5x+6\right)^{(3)}.$$

Так как $\left(x^3-5x+6\right)^{(4)}=\mathbf{K}=\left(x^3-5x+6\right)^{(10)}=0$, все остальные слагаемые равны нулю. Находим производные:

$$\left(\mathrm{e}^{4x}\right)^{(10)}=\mathrm{e}^{4x}\cdot 4^{10},\ \left(\mathrm{e}^{4x}\right)^{(9)}=\mathrm{e}^{4x}\cdot 4^{9},\ \left(\mathrm{e}^{4x}\right)^{(8)}=\mathrm{e}^{4x}\cdot 4^{8},\ \left(\mathrm{e}^{4x}\right)^{(7)}=\mathrm{e}^{4x}\cdot 4^{7},$$
$$\left(x^3-5x+6\right)^{(1)}=3x^2-5,\ \left(x^3-5x+6\right)^{(2)}=6x,\ \left(x^3-5x+6\right)^{(3)}=6.$$

Соответственно при $x=0$ получаем

$$\left(x^3-5x+6\right)^{(0)}\Big|_{x=0}=6,\ \left(x^3-5x+6\right)^{(1)}\Big|_{x=0}=-5,\ \left(x^3-5x+6\right)^{(2)}\Big|_{x=0}=0,$$

$$\left(\mathrm{e}^{4x}\right)^{(10)}\Big|_{x=0}=4^{10},\ \left(\mathrm{e}^{4x}\right)^{(9)}\Big|_{x=0}=4^{9},\ \left(\mathrm{e}^{4x}\right)^{(8)}\Big|_{x=0}=4^{8},\ \left(\mathrm{e}^{4x}\right)^{(7)}\Big|_{x=0}=4^{7}.$$

Таким образом,

$$y^{(10)}(0)=1\cdot4^{10}\cdot6+10\cdot4^9\cdot(-5)+\frac{10\cdot9}{1\cdot2}\cdot4^8\cdot0+\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}\cdot4^7\cdot6=304\cdot4^7=$$
$$=4\,980\,736.$$

Пример 6

Разложить функцию $f(x)=\ln(1+x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0=2$.

Решение. Имеем $f(2)=\ln3$, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $f'(2)=\dfrac{1}{3}$,

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad f''(2)=-\frac{1}{3^2},\quad f'''(x)=\frac{1\cdot2}{(1+x)^3},\quad f'''(2)=\frac{1\cdot2}{3^3},\ \ldots,$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},\quad f^{(n)}(2)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{3^n},$$

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}},\quad f^{(n+1)}(\xi)=\frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^{n+1}},\ \text{где}\ \ 2<\xi<x.$$

Поэтому $f(x)=\ln3+\dfrac{1}{1!\cdot3}(x-2)-\dfrac{1}{2!\cdot3^2}(x-2)^2+\dfrac{1\cdot2}{3!\cdot3^3}(x-2)^3+\ldots+$

$$+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!\,3^n}(x-2)^n+R_{n+1}(x)=\ln3+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(x-2)^k}{k\cdot3^k}+R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)!}(x-2)^{n+1}=\dfrac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)}(x-2)^{n+1}$, $2<\xi<x$.

Пример 7

Исследовать функции и начертить их графики:

1. $y=\dfrac{(x-1)^3}{3(x+1)^2}$;

2. $y=\sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{2x}{3}}$;

3. $f(x)=2x-3\sqrt[3]{(x-1)^2}$;

4. $f(x)=\ln(x^2+4x)$.

1. $y=\dfrac{(x-1)^3}{3(x+1)^2}$.

Решение.

А) Область определения функции $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$. Функция обращается в ноль при $x=1$, при $x=0$ $y=-\dfrac{1}{3}$, т. е. график функции пересекает ось Ox в точке $(1,0)$, ось Oy в точке $\left(0;-\dfrac{1}{3}\right)$. При $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)$ $y<0$, а при $x\in(1;+\infty)$ $y>0$ (рис. 1).

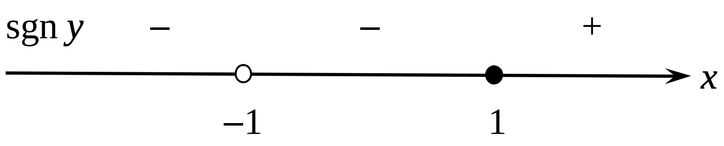

Рис. 1

Б) Исследуем точку разрыва $x=-1$. Так как пределы функции при $x\to-1-0$ (слева) и при $x\to-1+0$ (справа) бесконечны, т. е. $\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{(x-1)^3}{3(x+1)^2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{(x-1)^3}{3(x+1)^2}=-\infty$, то прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонные асимптоты $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{3x\,(x+1)^2}=\frac{1}{3},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{-5x^2+2x-1}{(x+1)^2}\right)=-\frac{5}{3}.$$

Итак, наклонная асимптота $y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$.

В) Определим промежутки монотонности и экстремумы данной функции. Первая производная функции равна: $y'(x)=\frac{(x-1)^2(x+5)}{3(x+1)^3}$. Находим критические точки: $y'=0$ при $x=1$, $x=-5$ и y' не существует при $x=-1$.

При $x\in(-\infty;-5)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$ $y'>0$, при $x\in(-5;1)$ $y'<0$. На промежутках $x\in(-\infty;-5]\cup(-1;1]\cup[1;+\infty)$ функция возрастает, на промежутке $x\in[-5;-1)$ убывает (рис. 2), в точке (–5; –4,5) имеет локальный минимум. Отметим, что $y'(1)=0$, т. е. график функции имеет в этой точке горизонтальную

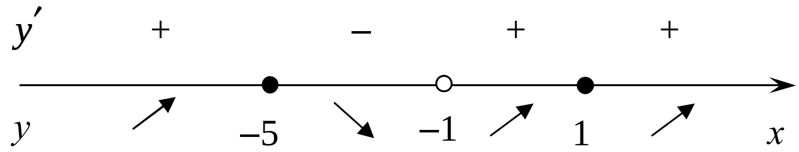

Рис. 2

касательную, точка $x=1$ является критической, но локального экстремума у функции в этой точке нет, т. к. первая производная не меняет знак.

Г) Определим промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции. Находим вторую производную функции: $y''(x)=\frac{8(x-1)}{(x+1)^4}$. Точки из области определения первой производной, в которых вторая производная обращается в нуль или не определена, являются точками возможного перегиба графика функции. В нашем случае это точка $x=1$. Так как $y''>0$ при $x\in(1;+\infty)$, то на этом интервале график функции является выпуклым вниз. Аналогично при $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)$ $y''<0$, т. е. на соответствующем интервале график функции является выпуклым вверх. Следовательно, точка $(1;0)$ –

это точка перегиба графика функции (рис. 3).

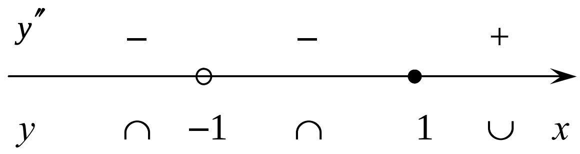

Рис. 3

График данной функции, построенной по результатам исследования представлен на рис. 4.

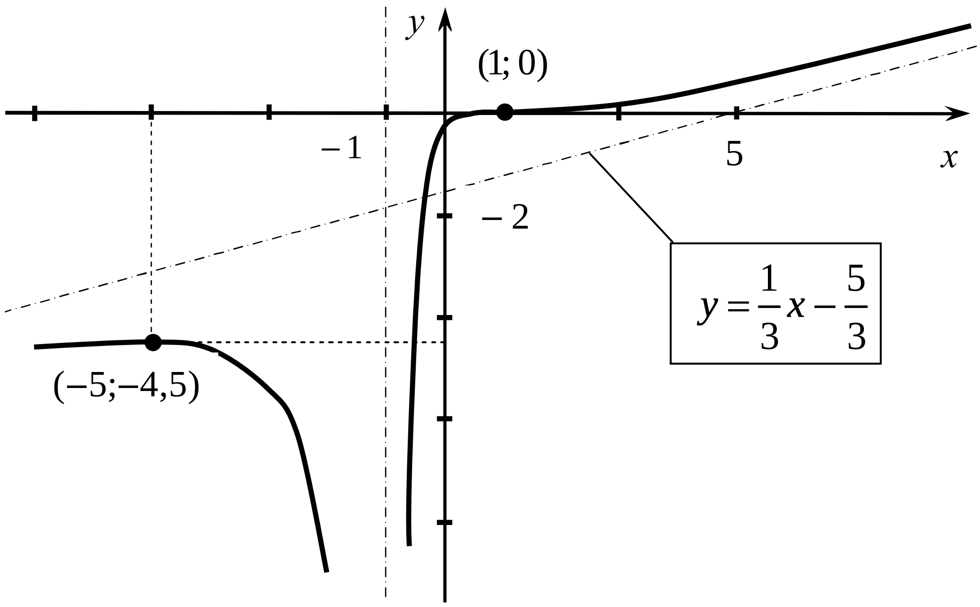

Рис. 4

2. $y=\sqrt[3]{x^2}\ \mathrm{e}^{-\frac{2x}{3}}$.

Решение.

А) Область определения функции $D(y)=\mathrm{R}$; $y(x)\geq 0$ при $x\in \mathrm{R}$, $y(0)=0$.

Б) Вертикальных асимптот нет, т. к. функция непрерывна при всех $x\in \mathrm{R}$. Найдем наклонные асимптоты $y=kx+b$:

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}\cdot \mathrm{e}^{2x/3}}=0;$$

$$b_+ = \lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{e^{2x/3}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'}{\left(e^{2x/3}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}\cdot e^{2x/3}} = 0;$$

$$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-2x/3}}{\sqrt[3]{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -2\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}\ e^{-2x/3}}{1} = -\infty.$$

Следовательно, при $x\to+\infty$ имеем правую горизонтальную асимптоту $y=0$; при $x\to-\infty$ наклонных и горизонтальных асимптот нет.

В) Определим промежутки монотонности и экстремумы данной функции. Первая производная функции: $y' = \dfrac{2e^{-2x/3}(1-x)}{3\sqrt[3]{x}}$. Находим критические точки: $y'=0$ при $x=1$ и y' не существует при $x=0$. При $x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$ $y'<0$, при $x\in(0;1)$ $y'>0$. На промежутках $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$ функция убывает,

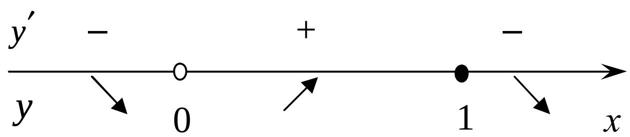

Рис. 5

на промежутке $x\in[0;1]$ функция возрастает (рис. 5); локальный минимум $(0;0)$; локальный максимум $\left(1;\sqrt[3]{e^{-2}}\right)\approx(1;\ 0{,}51)$; в точке $(0;0)$ – вертикальная полукасательная $x=0$, $y(x)\ge 0$.

Г) Определим промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции. Вторая производная $y''(x) = \dfrac{2e^{-2x/3}\left(2x^2-4x-1\right)}{9\,x\sqrt[3]{x}}$. Найдем корни уравнения $2x^2-4x-1=0$: $x_1 = 1-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $x_2 = 1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ $(x_1\approx-0{,}22;\ x_2\approx 2{,}22)$.

Так как $y''>0$ при $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$, то на этих интервалах график функции является выпуклым вниз. Аналогично при $x \in (x_1; 0) \cup (0; x_2)$ $y'' < 0$, т. е. на соответствующих интервалах график функции выпуклый вверх, рис. 6.

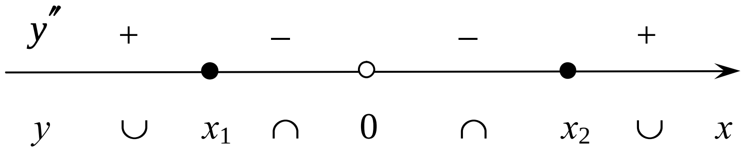

Рис. 6

Точки перегиба графика функции $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$. Здесь $y_1 = y(x_1) \approx 0{,}43$, $y_2 = y(x_2) \approx 0{,}39$. График функции представлен на рис. 7.

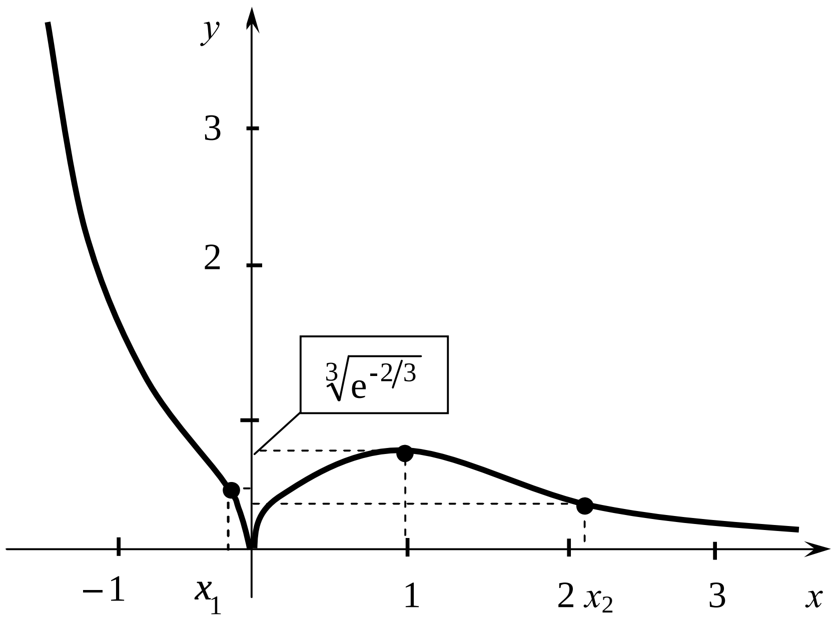

Рис. 7

3. $y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}$.

Решение.

А) Область определения $x \in \mathrm{R}$; $y = 0$ при $x = 0$ и при $x = -3$. При $x \in (-\infty; -3)$ $y < 0$, а при $x \in (-3; 0) \cup (0; +\infty)$ $y > 0$. Точки $(-3; 0)$ и $(0; 0)$ являются точками пересечения графика функции с осями координат.

Б) Вертикальных асимптот нет, так как функция определена и непрерывна на множестве действительных чисел. Для наклонной асимптоты $y = kx + b$ найдем коэффициенты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x+3)x^2}}{x} = 1; \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(y - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt[3]{(x+3)x^2} - x) = 1,$$

т. е. $y = x + 1$ – наклонная асимптота.

В) Найдем производную $y'(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt[3]{(x+3)^2 x}}$; $y'(x) = 0$ при $x = -2$ и $y'(x)$ не существует при $x = -3$ и при $x = 0$.

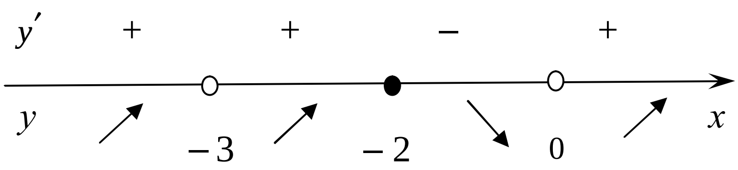

Рис. 8

При $x \in (-2; 0)$ $y' < 0$, при $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (0; +\infty)$ $y' > 0$. На промежутке $[-2; 0]$ функция убывает, на промежутках $(-\infty; -3] \cup [-3; -2] \cup [0; +\infty)$ возрастает (рис. 8), в точке (–2; $\sqrt[3]{4}$) имеет локальный максимум, в точке $(0; 0)$ локальный минимум. Отметим, что $y'(-2) = 0$, т. е. график функции имеет в этой точке горизонтальную касательную. В точке (–3; 0) имеем вертикальную касательную $x = -3$ (функция $y = \sqrt[3]{(x+3)\,x^2}$ в точке $x = -3$ непрерывна и $\lim\limits_{x\to -3} y'(x) = +\infty$). Поскольку $y(x)$ непрерывна в нуле и $\lim\limits_{x\to 0-} y'(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} y'(x) = +\infty$; то полупрямая $x = 0$, $y \ge 0$ является и левой и правой полукасательной к графику функции в точке $(0; 0)$.Следовательно, точка $(0; 0)$ – точка возврата кривой.

Г) Определим промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции. Находим вторую производную $y''(x) = -\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^5}}$. Знаки второй производной: $y''(x) < 0$ при $x \in (-3; 0) \cup (0; +\infty)$, $y''(x > 0)$ при $x \in (-\infty; -3)$ (рис. 9). Точка перегиба графика функции $(-3; 0)$. На промежутке (–∞;–3) график функции выпуклый вниз; на $(-3; 0)$ и (0; +∞) – выпуклый вверх.

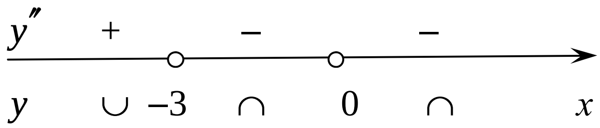

Рис. 9

График данной функции представлен на рис. 10.

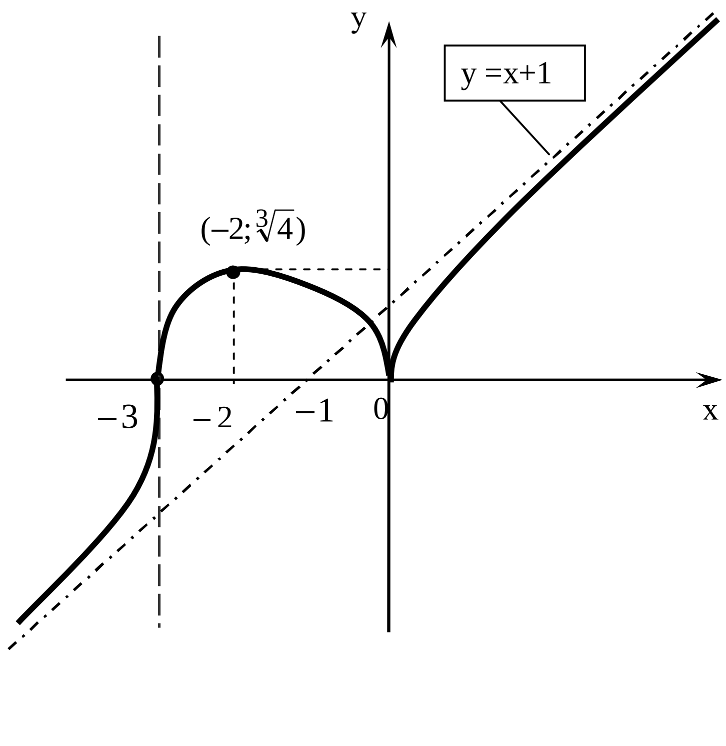

Рис. 10

4. $y = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$.

Решение.

А) Область определения $x \in \mathrm{R}$. При $x = 1$ значение функции $y = 0$.

Б) Вертикальных асимптот нет, т. к. функция определена и непрерывна на множестве действительных чисел. Для наклонной асимптоты $y = kx + b$ найдем коэффициенты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-2}{x^2-2x+2}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left(x^2-2x+2\right)=+\infty,$$

т. е. наклонных асимптот также нет.

В) Производная $y'=\dfrac{2x-2}{x^2-2x+2}$. Точка $x=1$ является точкой минимума функции; $y_{\min}=y(1)=0$.

Г) Вторая производная $y''=\dfrac{-2x(x-2)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$. Знаки второй производной: $y''(x)<0$ при $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$, $y''(x)>0$ при $x\in(0;2)$. Точки перегиба графика функции $(2;\ln 2)$ и $(0;\ln 2)$. При $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ график функции выпуклый вверх; на $(0;2)$ – выпуклый вниз (рис. 11).

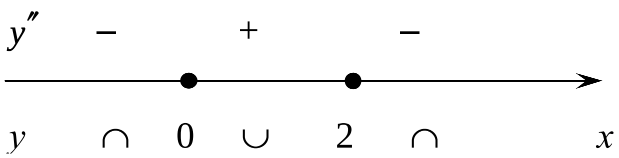

Рис 11.

График данной функции представлен на рис. 12.

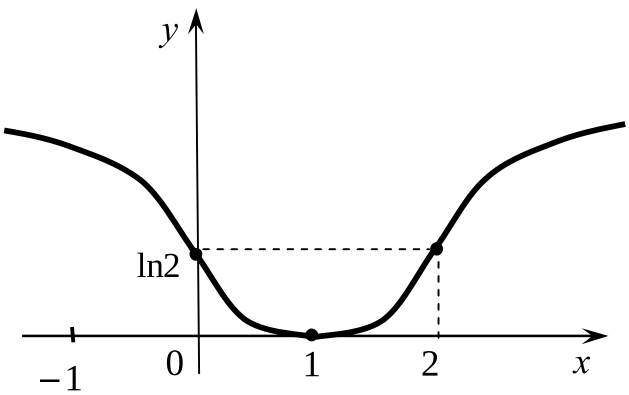

Рис. 12

Пример 8

Доказать неравенство $1+2\ln x \le x^2$ при $x>0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2-2\ln x-1$. Имеем $f(1)=0$, $f'(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x}$. При $x>1$ $f'(x)>0$, а при $0<x<1$ $f'(x)<0$. Таким образом, $f(x)$ на интервале $(0;1)$ убывает, на интервале $(1;+\infty)$ возрастает, и т. к. функция $f(x)$ непрерывна при $x=1$, то точка $x=1$ является точкой минимума. Следовательно, при $x>0$ $f(x)=x^2-2\ln x-1\ge f(1)=0$, откуда и вытекает неравенство $x^2\ge 1+2\ln x$, $x>0$.

Пример 9

В соответствии с прогнозами прибыль предприятия описывается функцией $\pi(q)=q^2-8q+10$, где q – величина, характеризующая объем производства (млн руб.). Найти оптимальный объем выпуска продукции, производимой фирмой.

Решение. Предельная прибыль фирмы $M\pi=\dfrac{d\pi}{dq}=2q-8$. Приравниваем производную нулю $M\pi\equiv 2q-8=0\to q_{\text{extr}}=4$. Является ли объем выпуска, равный четырем, оптимальным для фирмы? Исследуем характер изменения знака производной. При $q<q_{extr}=4\to\pi'(q)<0$ и прибыль убывает.

При $q>q_{\text{extr}}=4\to\pi'(q)>0$ и прибыль возрастает. Следовательно, в точке экстремума $q_{\text{extr}}=4$ прибыль принимает минимальное значение, и, таким образом, этот объем производства не является оптимальным для фирмы.

Каким же будет оптимальный объем выпуска для фирмы? Ответ на этот вопрос зависит от дополнительного исследования производственных мощностей фирмы. Если фирма не может производить за рассматриваемый период больше 8 единиц продукции ($\pi(q=0)=\pi(q=8)=10$), то оптимальным решением для фирмы будет вообще ничего не производить, а получать доход от сдачи в аренду помещений и/или оборудования. Если же фирма способна производить за рассматриваемый период больше 8 единиц продукции, то оптимальным решением для фирмы будет выпуск на пределе своих производственных мощностей.

Пример 10

В экономике цена обычно откладывается по вертикальной оси, а величина спроса по горизонтальной оси, уравнение спроса обычно записывается так, что цена p является функцией спроса q, а не q – функцией p. Рассмотрим уравнение спроса: $p = 940 - 48q + q^2$. Какова эластичность спроса по цене при продаже 10 единиц продукции?

При $q = 10$ цена $p = 940 - 480 + 100 = 560$ ден. ед. Найдем производную $\frac{dq}{dp} = \frac{1}{dp/dq} = \frac{1}{-48 + 2q}$. При $q = 10$ получаем $\frac{dq}{dp} = \frac{1}{-48 + 2 \cdot 10} = -\frac{1}{28}$. Поэтому $E_p(q) = -\frac{1}{28} \cdot \frac{560}{10} = -2$. Таким образом, изменение цены на 1 % от текущей цены 560 ден. ед. изменит величину спроса в обратном направлении на 2 %. Мы приходим к выводу, что при цене 560 ден. ед. спрос эластичен.

Библиографический список

1. Виноградова И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу: в 2 кн. / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. М.: Высш. шк., 2000. Кн. 1. 725 с.
2. Общий курс высшей математики для экономистов / В.И. Ермаков [и др.]. М.: ИНФРА-М, 2000. 656 с.
3. Замков О.О. Математические методы в экономике / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. М.: ДИС, 1997. 368 с.
4. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов / А.Н. Колесников. М.: ИНФРА-М, 1997. 208 с.
5. Красс М.С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. М.: Дело, 2001. 688 с.
6. Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремер [и др.]. М.: ЮНИТИ, 1998. 472 с.
7. Практикум по высшей математике для экономистов / Н.Ш. Кремер [и др.]. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. 423 с.
8. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / С.И. Ляшко [и др.]. М.: Изд. дом «Вильямс», 2001. Ч. 1. 432 с.
9. Малыхин В.И. Математика в экономике / В.И. Малыхин. М.: ИНФРА-М, 2001. 356 с.
10. Сборник задач по математике для втузов / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1986. Ч. 1. 464 с.
11. Томпсон А. Экономика фирмы / А. Томпсон, Д. Формби. М.: ЗАО «Изд-во БИНОМ», 1998. 544 с.
12. Шикин Е.В. Математические методы и модели в экономике / Е.В. Шикин, А.Г. Чхартишвили. М.: Дело, 2000. 440 с.