Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский государственный университет леса

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С EXCEL

Практикум

Для студентов всех специальностей МГУЛа

Издательство Московского государственного университета леса

Москва — 2004

УДК 65.012 (075.8)

6Л2 Данилин Г. А. и др. Элементы теории вероятностей с EXCEL:

Практикум для студентов всех специальностей МГУЛа.,

/ Г. А. Данилин, В. М. Курзина, П. А. Курзин, О. М. Полещук. —

М.: МГУЛ, 2004. — 87 с.: ил.

Практикум содержит основные элементы теории вероятностей, используемые в различных экономических приложениях; задания по расчетно-графическим работам и сведения, необходимые для их выполнения.

Разработано в соответствии с Государственным образовательным стандартом ВПО 2000 г. для направления подготовки студентов на основе примерной программы дисциплины "Высшая математика" для всех специальностей 2004 года.

Одобрено и рекомендовано к изданию в качестве практикума редакционно-издательским советом университета

Рецензенты: профессор А. В. Корольков,
профессор Л.С. Цветкова

Кафедра высшей математики

Авторы: Геннадий Александрович Данилин, доцент;
Вера Михайловна Курзина, доцент;
Павел Алексеевич Курзин, ас.;
Ольга Митрофановна Полещук, доцент

Введение

Теория вероятностей играет важную роль в выявлении количественных закономерностей и качественных утверждений в естественно-научных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Необходимость её изучения диктуется современным уровнем развития науки и экономики, когда математика стала универсальным языком науки и элементом общей культуры.

Необходимость применения персональных компьютеров в процессе принятия управленческих решений в наше время стала особенно актуальна. Однако, к сожалению, не все специалисты владеют простым и доступным даже непрофессиональным программистам средством решения задач теории вероятностей. Это средство – табличный процессор Excel. Для успешного решения задач с помощью Excel необходимо знать основные идеи и методы теории вероятностей, условия их применения.

Цель курса – помочь студентам усвоить элементы теории вероятностей и методы поиска решений её задач с использованием Excel, дающие возможность оперативно и на современном уровне принимать решения в будущей деятельности студентов как специалистов.

Курс исключает разрыв между математической и компьютерной подготовкой и обеспечивает тесную связь обучения математическим методам с общеинженерной подготовкой специалиста.

Таким значком в пособии отмечены примеры решения задач с применением *Microsoft*® *Excel*, а также примечания, поясняющие применение *Microsoft*® *Excel* для решения задач.

Наряду с решением задач теории вероятности студенты выполняют лабораторные работы, требующие использовать средства *Microsoft*® *Excel*. Усвоение курса позволит будущим специалистам исследовать математические модели, решать задачи в условиях риска и принимать необходимые управленческие решения.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Случайные события и их вероятности

Под ***событием*** понимают любой факт действительности. ***Опыт*** (***испытание***) – это осуществление определенного набора условий.

Пример. Подбрасывание монеты – опыт, исход (выпадение герба или цифры) – событие. Здесь и в дальнейшем предполагаем, что падение монеты на ребро не рассматривается, так как это неустойчивое состояние равновесия, а изучаемая монета достаточно тонкая.

Все события (явления) действительности можно подразделить на три вида: достоверные, невозможные и случайные.

Событие называется ***достоверным***, если оно обязательно произойдёт в условиях данного опыта.

Событие называется ***невозможным***, если оно в условиях данного опыта заведомо не произойдёт.

Событие называется ***случайным***, если оно может либо произойти, либо не произойти в данном опыте.

Пример. Что после вторника наступит среда – событие достоверное. Вода превратится в лёд при температуре +30° С – событие невозможное. В четверг пойдёт дождь – событие случайное.

События будем обозначать большими буквами A, B, ... При этом достоверное событие будем обозначать буквой W, а невозможное событие – символом $\varnothing$ – пустое множество (благоприятствующих событий).

События называются ***равновозможными***, если имеются основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем любое другое из них. Два события называются ***противоположными***, если при наступлении одного из них, второе событие не происходит. Если событие обозначено A, то противоположное ему обозначают $\overline{A}$. Случайные события называются ***несовместными***, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Пример. Выпадение любой цифры при бросании игральной кости – равновозможные несовместные и противоположные события. Дождь и тучи на небе – совместные события, зима и лето – несовместные события.

Если любое из событий происходит независимо от реализации любой комбинации других событий, то они называются ***независимыми в совокупности***. Если появление одного из событий влияет на возможность появления другого, они называются ***зависимыми.***

Пример. Наличие продуктов в различных, не связанных друг с другом, магазинах – события независимые в совокупности. Стоимость бензина зависит от уровня цен на нефть. А количество звёзд на небе не зависит от числа наших желаний.

Несколько событий в данном опыте образуют ***полную группу событий***, если в результате опыта обязательно произойдёт хотя бы одно из них. Если события, образующие полную группу, несовместны, то появление одного и только одного из них является достоверным событием. Два несовместных события, образующие полную группу событий, являются противоположными.

Пример. Выпадение герба или цифры при подбрасывании монеты образуют полную группу событий. Совершённые покупки какого-либо предмета из партии распроданного к концу дня товара задают полную группу событий – группу совершённых покупок.

Классическое определение вероятности

Вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа благоприятствующих этому событию случаев m к числу всех возможных случаев, образующих полную группу несовместных равновозможных событий, n:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Понятие вероятности позволяет дать новые определения для разных видов событий. А именно, событие B называется **независимым** от события A, если вероятность события B не зависит от того, произошло событие A или не произошло. Событие B называется **зависимым** от события A, если вероятность события B зависит от того, произошло или не произошло событие A.

Свойства вероятности

1. Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(W) = 1.$$

2. Вероятность невозможного события равна нулю:

$$P(\varnothing) = 0.$$

3. Вероятность случайного события есть положительное число, меньшее единицы:

$$0 < P(A) < 1.$$

Основные формулы комбинаторики

Правило произведения. Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. При этом первое действие можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами и так до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами. Тогда число m способов, которыми могут быть выполнены все k действий, по правилу произведения комбинаторики равно

$$m = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k .$$

Пример. В гардеробе имеется 5 различных галстуков, 8 сорочек и 3 заколки для галстука. Общее число разных вариантов по их использованию в одном комплекте согласно правилу произведения будет равно

$$m = 5 \cdot 8 \cdot 3 = 120.$$

Правило произведения часто применяется при подсчёте числа способов использования элементов одного и того же множества, когда элемент множества используется в образуемой подгруппе неоднократно. Например, при составлении номера из цифр. В этом случае элемент множества возвращается после его применения обратно в исходное множество. Говорят, что осуществляется ***выборка с возращением***. Число способов, которыми можно выполнить *k* действий, согласно правилу умножения для множеств с одинаковым числом элементов *n* равно

$$m = n^k .$$

Пример. Если при кодировании замков боксов в гаражном кооперативе используются трёхзначные номера из 5 цифр от 0 до 5, то число различных кодов, которые можно составить, равно $m = 5^3 = 125$.

Сочетания. Произвольное *k*-элементное подмножество данного множества из *n* элементов называется сочетанием из *n* элементов по *k*. Порядок элементов в сочетании не существенен.

При составлении сочетания взятый из множества элемент не возвращается в исходное множество. Говорят, что в том опыте осуществляется ***выборка без возвращения***.

Число *k*-элементных сочетаний множества из *n* элементов обозначается C_n^k и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (читается "эн факториал").

Пример. Имеется 3 красные и 4 оранжевые гвоздики. Букет составляют из 5 цветков. Число различных вариантов составления букета будет равно

$$C_7^5 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21.$$

Число сочетаний $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ можно вычислить с помощью функции ЧИСЛКОМБ(*n*, *k*), которая относится к математическим функциям.

Перестановки. Множество из n элементов называется ***упорядоченным***, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое натуральное число (номер элемента) от 1 до n так, что различным элементам соответствуют различные числа. Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов, то есть могут быть получены из того же самого множества перестановкой местами элементов, называются перестановками этого множества.

Число перестановок множества из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = n!.$$

Пример. Вокруг стола рассаживают 7 человек. Способов различного распределения их за столом $P_7 = 7! = 5040$.

Число перестановок можно вычислить, применяя функции из Excel, двумя способами: либо с помощью математической функции ФАКТР(n), либо используя статистическую функцию ПЕРЕСТ(n; n).

Размещения. Различные упорядоченные k-элементные подмножества множества из n элементов называются размещениями из n элементов по k. Размещения отличаются друг от друга либо элементами, либо их порядком следования.

Число k-элементных размещений множества, состоящего из n элементов, обозначается A_n^k и вычисляется по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример. В группе 9 девушек и 11 юношей. Для представительства этой группе на форуме выбирают 3 человек, которых по присвоенным в процессе выбора порядковым номерам выстраивают в ряд. Различных рядов можно построить

$$A_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = 18 \cdot 19 \cdot 20 = 6840.$$

Число перестановок из n элементов по k (размещения) $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ можно вычислить с помощью статистической функции

ПЕРЕСТ(n; k).

Число сочетаний, перестановок и размещений связано формулой

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

Задачи

1. Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется: а) случайно названное число; б) случайно названное число, цифры которого различны.

2. Монета брошена три раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится изображение герба.

3. В коробке семь одинаковых пронумерованных кубиков. Наудачу извлекают все кубики по очереди. Найти вероятность того, что номера кубиков появятся в убывающем порядке.

4. В пачке 30 пронумерованных карточек. Наудачу взяли 3 карточки. Какова вероятность того, что взяли карточки с номерами 12, 24, 30?

5. Среди 25 участников розыгрыша лотереи находятся 10 девушек. Разыгрывается 5 призов. Вычислить вероятность того, что обладателями двух призов окажутся девушки.

6. В коробке 4 белых и 5 черных футболок. Наугад вытаскивают две футболки. Найти вероятность того, что одна из футболок белая, другая – черная.

7. В 30 экзаменационных билетах содержатся по три вопроса, которые не повторяются. Студент знает ответы на 45 вопросов. Какова вероятность того, что доставшийся ему билет состоит из подготовленных им вопросов?

8. Из партии, состоящей из 20 плееров, для проверки произвольно отбирают три плеера. Партия содержит 2 плеера с дефектами. Какова вероятность того, что в число отобранных плееров попадут только два бракованных плеера?

9. Потребители сдали в ремонт 16 компьютеров. Из них 8 нуждаются в мелком ремонте. Мастер берет 6 компьютеров. Какова вероятность того, что два из них нуждаются в мелком ремонте?

10. В туристической группе 14 женщин и 9 мужчин. Среди них разыгрываются 6 билетов на бесплатное посещение театра. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся три женщины и трое мужчин?

11. В ящике лежат 6 чёрных и 6 синих перчаток. Наудачу извлекли 7 перчаток. Какова вероятность того, что 3 из них синие, а 4 – чёрные?

12. В коробке 12 мячиков, из которых 3 красных, 5 зелёных и 4 жёлтых. Наудачу взяли 3 мячика. Какова вероятность того, что все три мячика разного цвета?

13. В партии из 12 шкафов при транспортировке 4 получили повреждение. Наудачу выбрано 6 шкафов. Вычислить вероятность того, что 2 шкафа из них имеют повреждения.

14. В клуб принесли в корзине 9 рыжих и 11 серых котят. Наугад вынимают двух котят. Какова вероятность того, что они разного цвета?

15. С блюда с 30 пирожками взяли наугад 3. Какова вероятность того, что хоть один пирожок окажется с грибами, если их на блюде лежало шесть.

16. Молодой человек забыл номер своего приятеля, но помнит из него первые 4 цифры. В телефонном номере 7 цифр. Какова вероятность, что молодой человек дозвонится до своего приятеля, если наберёт номер случайным образом?

17. Сейфовый замок имеет 4 диска с пятью секторами, на каждом из которых записана одна из цифр от 0 до 4 . Какова вероятность открыть замок сейфа, набрав 4 цифры наугад?

18. Владелец лотерейной карточки зачеркивает 6 номеров из 49. Какова вероятность того, что им будет угадано 5 номеров в очередном тираже?

19. В группе 16 юношей и 14 девушек. Выбирают делегацию из 5 человек. Какова вероятность того, что при случайном выборе в состав делегации попадут 3 девушки и два юноши?

20. В мешке лежат 25 красных, 19 синих и 16 зелёных шарфов, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимают 9 шарфов. Вычислить вероятность того, что взяли 4 красных, 3 синих и 2 зелёных шарфа.

21. Из полной колоды карт (52 карты) вынимаются наугад сразу три карты. Найти вероятность того, что этими картами будут: а) тройка, семёрка, дама; б) тройка, семёрка, туз; в) три туза?

22. Трёх стюардесс для рейса выбирают по жребию из 25 девушек, среди которых 5 блондинок, 15 шатенок и 5 брюнеток. Какова вероятность того, что среди выбранных девушек все будут иметь разный цвет волос?

23. В ящике лежат 15 игрушек, среди которых 4 с дефектами. Найти вероятность того, что среди 7 наудачу вынутых игрушек одна окажется с дефектом.

24. Среди 17 желающих поехать на модный курорт 10 женщин. Определить вероятность того, что среди 12 случайным образом купивших путёвки оказались 7 женщин?

25. В непрозрачной шкатулке лежат 7 белых, 6 красных и 9 чёрных бусин. Мастерица берет 5 бусин наугад. Какова вероятность того, что среди них окажутся 2 чёрных и 1 красная бусины?

26. Из партии, состоящей из 22 пар ботинок, для проверки отбирают 6 пар. Партия содержит 3 бракованные пары. Какова вероятность того, что в число отобранных ботинок войдёт не более одной бракованной пары?

27. На прилавке лежат 15 дынь, среди которых 3 нестандартные. Найти вероятность того, что среди четырёх отобранных продавцом дынь будет хотя бы одна нестандартная?

28. Кодовый замок содержит 5 цифр, которыми могут быть числа от 0 до 9. Замок открывается при наборе только одной единственной комби-

нации из пяти цифр. Какова вероятность открыть этот замок, набрав случайным образом 5 цифр?

29. К празднику в фирме формируют наборы из 45 шейных платков, 30 булавок для галстука и 25 дезодорантов. Менеджеру нравится только по одному предмету из всего предложенного ассортимента – один платок, одна булавка и один дезодорант. Какова вероятность того, что случайным образом составленный набор будет содержать все три предмета, понравившиеся менеджеру?

30. Из 5 лётчиков, 7 штурманов и 5 стюардесс необходимо сформировать экипаж, в который должны войти 2 лётчика, 1 штурман и 3 стюардессы. Сколькими способами это можно сделать?

Контрольные вопросы

1. Какие события называются случайными?
2. Как определяется классическая вероятность?
3. Какие события несовместны?
4. Какие события независимы?
5. Докажите, что если события A и B независимы, то события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы.
6. Определите понятие "сочетание".
7. Что называется размещением?
8. Как вычислить число перестановок?
9. Запишите формулу произведения и приведите пример ее применения.
10. Дайте определение противоположного события и выведите формулу для его вероятности.
11. Укажите границы применения классической вероятности.
12. В каких пределах изменяется вероятность случайного события?
13. Дайте определение статистической вероятности и приведите примеры.
14. Дайте определение геометрической вероятности и укажите границы её применения.
15. Вероятность какого события равна нулю?
16. Как связаны числа сочетаний, размещений и перестановок?
17. Дайте определение и приведите пример событий, образующих полную группу.
18. Вероятность какого события равна единице?
19. В каких пределах изменяется вероятность случайного события?
20. Какие события называются совместными?
21. Что называется полной группой событий?
22. Чем отличаются противоположные события?
23. Как определить, являются ли данные события зависимыми?

1. 2. Теоремы умножения и сложения вероятностей

Вероятность события *B*, определённая в предположении, что событие *A* произошло, называется условной вероятностью события *B* и обозначается $P(B/A)$ (или $P_A(B)$).

Условие независимости события B от события A определяется равенством

$$P(B/A) = P(B).$$

Если событие *B* зависит от события *A*, то $P(B/A) \neq P(A)$.

Произведением двух событий называется событие, заключающееся в наступлении и события A, и события *B*.

Пример. Девочка взяла спелое жёлтое яблоко. Событие "спелое жёлтое" является произведением событий "спелое" и "жёлтое".

Теорема (умножения вероятностей). Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A)P(B/A).$$

Следствие 1. Если событие *B* не зависит от события *A*, то и событие *A* не зависит от события *B*.

Следствие 2. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий, причём вероятность каждого следующего по порядку события вычисляется при условии, что все предыдущие наступили:

$$P(A_1 A_2 A_3 \ldots A_{k-1} A_k) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) \times \ldots$$
$$\times \ldots \cdot P(A_k / A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_{k-1}).$$

Сумма $A+B$ событий A и B – событие, состоящее в том, что или событие A, или событие B имеет место.

Пример. Девочка взяла или жёлтое, или красное яблоко. Событие "яблоко или жёлтое, или красное" является суммой событий "жёлтое яблоко" и "красное яблоко".

Теорема сложения вероятностей. Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Следствие 1. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Следствие 2. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу несовместных событий, равна единице.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Задачи

1. В команде из 16 спортсменов 6 являются мастерами спорта. Для выступления на Олимпиаде выбирают 4 спортсменов. Какова вероятность того, что все выбранные спортсмены являются мастерами спорта?

2. Экзаменационный билет содержит четыре вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос, равна 0,9; на второй – 0,85; на третий – 0,8; на четвёртый – 0,75. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить на три вопроса.

3. Первый стрелок попадает в мишень с вероятностью p, а второй с вероятностью 0,9. Известно, что вероятность одного попадания при одновременном выстреле обоих стрелков равна 0,48. Найти p.

4. Доля костюмов высшего качества в партии составляет 85 %. Какова вероятность того, что из двух наугад взятых костюмов хотя бы один будет высшего качества? А из трёх? Из четырёх?

5. Каждая из букв Д, Д, Д, М, О, О, О, Л, Л, Е, Я, А написана на одной из 12 карточек. Карточки раскладываются в произвольном порядке. Найти вероятность того, что при этом образуются слова "дело", "доля", "мода","аллея".

6. Охотник выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,9, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность того, что охотник попал в цель.

7. Шкаф состоит из 5 крупных деталей. Вероятности брака при изготовлении каждой детали равны 0,1; 0,05; 0,03; 0,02; 0,04 соответственно. Какова вероятность того, что изделие будет бракованным, если для этого достаточно наличие в сборке одной бракованной детали.

8. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 150. Какова вероятность того, что выбранное число при делении на 9 даёт в остатке два?

9. Заготовки деталей поступают из двух цехов предприятия: 60 % из первого и 40 % из второго. Заготовки первого цеха содержат 5 % брака, а второго – 3 % . Найти вероятность того, что наугад взятая заготовка будет без дефекта.

10. Два игрока бросают по очереди 3 кости. Если сумма оказывается равной 9, то выигрывает первый игрок, а если сумма равняется 12, то выигрывает второй игрок. У кого из игроков больше шансов на выигрыш?

11. Загадано число от 1 до 90. Какова вероятность того, что это число не делится ни на 2, ни на 3, ни на 4, ни на 5?

12. Слово "радость", составленное из карточек с буквами, рассыпали на отдельные буквы, которые сложили произвольно в коробку. Из коробки берут по одной подряд четыре карточки. Какова вероятность того, что при этом появится слово а) "рост"; б) "сода"; в) "оса"?

13. В банкомат заложено 100 купюр, номера которых идут подряд. Какова вероятность получить купюру, номер которой оканчивается на 7?

14. Два шахматиста играют в турнире. Один из них выигрывает в среднем три партии из четырёх, а второй – семь партий из восьми. Какова вероятность у каждого из них выиграть в турнире из 5 партий?

15. Три стрелка производят по одному выстрелу. Вероятности попадания в цель каждого стрелка равны 0,9; 0,8; 0,85 соответственно. Найти вероятность того, что в цель попадут только два стрелка.

16. Оператор обслуживает 4 агрегата. Вероятность того, что в течение часа первый агрегат потребует внимания рабочего, равна 0,6; для второго агрегата эта вероятность равна 0,5; для третьего – 0,8; а для четвёртого – 0,65. Найти вероятность того, что в течение часа, по крайней мере, один станок потребует к себе внимания оператора.

17. Гардеробщица выдала номерки 5 лицам, сдавшим в гардероб свои шляпы. После этого она перепутала все шляпы и повесила их наугад. Найти вероятность того, что каждому из 5 лиц гардеробщица выдаст его собственную шляпу.

18. В комиссии из 5 человек 4 члена принимают независимо друг от друга правильное решение с вероятностью 0,9, а пятый для принятия решения бросает монету. Окончательное решение принимается большинством голосов. Кто с большей вероятностью принимает правильное решение: комиссия или один человек из комиссии?

19. Из множества 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 наудачу выбрали три числа. Какова вероятность того, что их сумма будет кратна 5?

20. На гранях кубиков написаны числа от 1 до 6. Бросают три кубика. Какова вероятность того, что: а) сумма на трех кубиках будет чётной; б) выпадет число из одинаковых цифр; в) сумма на кубиках не превысит числа 12?

21. Вероятность попадания в кольцо первого игрока – 0,7, а второго игрока – 0,8. Игроки бросают мяч по два раза независимо друг от друга. Какова вероятность того, что мяч попадет в кольцо два раза?

22. В одном ящике 6 синих и 11 зелёных шаров, а в другом – 7 синих и 9 зелёных шаров. Из каждого ящика взяли по одному шару. Какова вероятность того, что один из двух шаров синий?

23. Вероятность безотказной работы блока питания равна 0,9. Для повышения надёжности устанавливают такой же резервный блок. Опреде-

лить вероятность безотказной работы устройства, с учётом резервного блока.

24. На 25 одинаковых жетонах нанесены двузначные числа от 25 до 49. Наугад берут один жетон. Какова вероятность вытащить жетон с номером, кратным 3 или 5?

25. Произведён залп из трёх орудий по мишени. Вероятность поражения мишени первым орудием равна 0,98; вторым – 0,95; третьим – 0,9. Найти вероятность поражения мишени.

26. Ребёнок играет с четырьмя буквами разрезной азбуки –А, А, К, Ш. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он составит слово "каша"?

27. Найти вероятность того, что наугад взятое число окажется кратным либо 3, либо 5, либо 15?

28. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наугад, помня только, что эти цифры нечётные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

29. Из колоды из 32 карт наугад одна за другой вынимают четыре карты. Найти вероятность того, что в руках окажутся валет, дама, король и туз.

30. На первом этаже девятиэтажного дома в лифт зашли три человека. Вероятность выхода каждого из лифта на любом этаже одинакова. Найти вероятность того, что все трое вышли на 5 этаже.

Контрольные вопросы

1. Докажите теорему о вероятности суммы двух несовместных событий.

2. Докажите теорему о вероятности суммы двух совместных событий.

3. Докажите теорему о вероятности произведения двух независимых событий.

4. Докажите, что если $P(A/B)=P(A/\overline{B})$, то события A и B независимы.

5. Выведите теорему сложения вероятностей для трёх совместных событий.

6. Докажите, что независимые события A и B, имеющие положительные вероятности, совместны.

7. Докажите, что $P(A/B)\geq 1-P(\overline{A})/P(B)$.

8. Выведите теорему умножения вероятностей для любых трёх событий.

9. Пусть $P(A/B)>P(B/A)$ и $P(A)>0, P(B)>0$. Справедливо ли неравенство $P(A)>P(B)$?

10. Проверьте справедливость равенства $P(A/B)+P(A/\overline{B})=1$.

11. События A_1, A_2, A_3 взаимно независимы и $P(A_k)=p_k$, $k=1,2,3$. Найдите вероятность произведения событий $(A_1+A_2)(A_3+A_1)$.

12. Докажите, что если события $A_1, A_2, ..., A_n$ независимы, то события $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$ также независимы.

13. События A_1, A_2, A_3 взаимно независимы, и $P(A_k)=p_k$, $k=1,2,3$. Найдите вероятность события $(A_3+A_2)(A_3+A_1)$.

14. События A_1, A_2, A_3 взаимно независимы, и $P(A_k)=p_k$, $k=1,2,3$. Найдите вероятность события $(A_1-A_2)(A_3-A_1)$.

15. События A_1, A_2, A_3 взаимно независимы, и $P(A_k)=p_k$, $k=1,2,3$. Найдите вероятность события $A_1+A_2A_3+A_1$.

16. $P(A)=p$, а $P(B)=q$. Найдите вероятность события *AAAAABBB*, если события *A* и *B* независимы.

17. Известна условная вероятность $P(A/BC)=p$ события A и безусловная вероятность события B: $P(B)=r$. Найдите условную вероятность $P(AC/B)$, если $P(ABC)=0{,}5$.

18. Найдите $P(AC/B)$, если $P(ABC)=0{,}3$; $P(A/BC)=0{,}5$; $P(B)=0{,}4$.

19. Найдите вероятность события *AAABBBBB*, если события *A* и *B* независимы и $P(A)=0{,}2$; $P(B)=0{,}4$.

20. Вычислите $P(ABC)$, если $P(A)=0{,}2$; $P(B)=0{,}4$; $P(C)=0{,}7$, и события *A*, *B*, *C* независимы.

1.3. Формула полной вероятности

Если событие *A* может произойти лишь при условии наступления одного из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу, события $H_1, H_2, ..., H_n$ называют гипотезами. Пусть известны вероятности гипотез H_i и условные вероятности события *A* при этих гипотезах, то есть известны значения $P(H_i)$ и $P(A/H_i)$, $i=\overline{1,n}$. В этом случае вероятность события *A* определяется по формуле, называемой формулой полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

Пример. В двух коробках лежат зелёные и красные мячи: в первой – 4 зелёных и 5 красных, во второй – 7 зелёных и 3 красных. Из второй коробки наугад взяли мяч и переложили его в первую коробку. Найти вероятность того, что наугад взятый после этого из первой коробки шар будет зелёным.

Решение. Перекладывание из второй коробки зелёного мяча (событие B_1 – первая гипотеза) и красного мяча (событие B_2 – вторая гипотеза) образует полную группу независимых событий. Вероятности их равны $P(B_1) = 0{,}7$ и $P(B_2) = 0{,}3$. Условные вероятности извлечения из первой коробки зелёного мяча (событие A) при перекладывании туда зелёного или красного мяча из второй коробки равны $P(A/B_1) = 0{,}5$ и $P(A/B_2) = 0{,}4$ соответственно. Искомая вероятность находится по формуле полной вероятности для двух гипотез:

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}47.$$

Задачи

1. Имеются два ящика. В первом ящике четыре белых и три чёрных шара, во втором – пять белых и семь чёрных шаров. Из первого и второго ящика перекладывают по одному шару в третий ящик. Наугад из третьего ящика берут один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

2. В группе из 25 стрелков имеются 5 отличных , 15 хороших и 5 посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для отличного стрелка равна 0,95; для хорошего – 0,75; для посредственного – 0,5. Найти вероятность того, что при одном выстреле двух стрелков из группы цель будет поражена.

3. В партии стаканов 95 % отвечают стандарту. Контроль признаёт пригодным стандартный стакан с вероятностью 0,98 и нестандартный стакан с вероятностью 0,03. Определить вероятность того, что стакан, прошедший контроль, отвечает стандарту.

4. Имеются две партии стульев по 25 и 48 штук, причём в первой партии 2 стула ниже других, а во второй – четыре. Взяв из первой партии один стул, присоединили его ко второй партии. Покупатель купил стул из второй партии. Какова вероятность того, что он купил стандартный стул?

5. Устройства сигнализации производятся тремя фирмами. Устройства первой фирмы установлены на 43 % машин; устройства второй фирмы – на 28 %; устройства третьей фирмы – на 29 %. Надёжность устройства, изготовленного первой фирмой, равна 0,9; второй – 0,8; третьей – 0,85. Какова надёжность устройства, принадлежность которого неопределенна.

6. Имеются две коробки с мячами для тенниса. В первой коробке 7 красных и 8 зелёных мячей; во второй – 9 красных и 11 зелёных. Из первой и второй коробок, не глядя, берут по одному мячу и кладут в третью коробку. Мячи в третьей коробке перемешивают и берут наугад один мяч. Определить вероятность того, что этот мяч зелёный.

7. На опытной станции имеется запас семян сосны, полученных из двух лесничеств. Среди них 30 % семян сосны заготовлены в первом лесничестве, а 70 % – во втором. Известно, что всхожесть семян из первого лесничества составляет 90 %, а семян из второго лесничества – 80 %. Определить вероятность того, что наугад посаженное семечко взойдёт.

8. По периметру охраняемого участка леса установлены четыре датчика различной конструкции, фиксирующих проникновение внутрь участка. Вероятность срабатывания датчиков равна 0,9; 0,8; 0,85; 0,75 соответственно. Исследователь включил наугад один из датчиков. Какова вероятность зафиксировать нарушение границы?

9. В ателье работают три портнихи. Первая выполняет 40 % всех заказов; вторая – 35 %, а третья – 25 %. При изготовлении костюмов процент брака у каждой из портних составляет 2, 3 и 5 % соответственно. Какова вероятность того, что случайно выбранный костюм будет иметь дефект?

10. В одной корзине лежат 25 красных и 35 желтых яблок, а во второй – 42 желтых и 37 красных яблок. Берут по два яблока из каждой корзины и перекладывают в третью, а затем не глядя берут одно яблоко из третьей корзины. Какова вероятность, что возьмут красное яблоко?

11. В одном мешке лежат 15 синих перчаток и 18 зелёных, а в другом – 21 синяя перчатка и 17 зелёных. Наугад из одного из мешков вынимают две перчатки. Найти вероятность того, что вынут обе перчатки одного цвета.

12. На двух станках изготавливаются детали для стульев и складываются в общую тару. Вероятность получения детали нестандартного типа на первом станке равна 0,086, а на втором – 0,065. Производительность второго станка втрое больше, чем первого. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь нестандартная.

13. В первой группе спортсменов 7 мастеров спорта и 8 кандидатов в мастера, во второй группе 6 мастеров и 10 кандидатов, в третьей 5 мастеров и 11 кандидатов. Из каждой группы выбрали случайным образом по два спортсмена. Какова вероятность того, что в сформированной команде будет три мастера спорта и 3 кандидата?

14. На склад поступает продукция трёх фабрик. Причём продукция первой фабрики составляет 20 %; второй – 46 %; третьей – 34 %. Известно также, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 1 %; для второй – 3 %, а для третьей – 1,5 %. Вычислите вероятность того, что наугад взятое изделие окажется стандартным.

15. Среди восьми винтовок пристрелянными оказываются только три. Вероятность попадания из пристрелянной винтовки равна 0,9, а из непристрелянной – 0,5. Выстрелом из одной наугад взятой винтовки цель поражена. Определить вероятность того, что взята пристрелянная винтовка.

16. В первом ящике 17 сосновых и 15 еловых шишек, а во втором – 20 сосновых и 19 еловых. Из первого ящика переложили две шишки во

второй, а потом из второго ящика достали одну шишку. Какова вероятность того, что эта шишка сосновая?

17. С первого склада на сборку поступает 35 % деталей; со второго – 22 %; с третьего – 25 %; с четвертого – 18 %. Вероятность получить с первого склада бракованную деталь равна 0,01; со второго – 0,003; с третьего – 0,005; с четвертого – 0,001. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь бракованная.

18. В первом мешке лежат 55 зелёных и 67 красных яблок, во втором мешке – 67 красных и 44 зелёных яблок, в третьем мешке – 38 зелёных и 65 красных яблок. Из каждого мешка взяли по яблоку и положили в корзину, из которой затем берут одно яблоко. Какова вероятность, что яблоко окажется красным?

19. На экзамене студентам предлагается 40 билетов. Студент выучил только 21 билет. Каким по счету ему выгоднее зайти: первым, вторым или третьим?

20. При исследовании жирности молока лосих всё стадо было разбито на три группы. В первой группе оказалось 70 %; во второй 23 % и в третьей 7 % всех лосих. Вероятность того, что молоко, полученное от отдельной лосихи, имеет не менее 4 % жирности, для каждой группы лосих соответственно равна 0,6; 0,35 и 0,1. Определить вероятность того, что для взятой наугад лосихи жирность молока составит не менее 4 %.

21. Имеется 5 ящиков с кружками. В первом, втором и третьем находится по 5 белых и 7 синих кружек, в четвертом и пятом ящиках по 6 белых и 6 синих кружек. Случайно выбирают ящик и из него извлекают кружки. Какова вероятность того, что извлеченная кружка будет синей?

22. Первой бригадой производится в четыре раза больше продукции, чем второй. Вероятность того, что производимая продукция окажется стандартной для первой бригады 0,88; для второй – 0,93. Определить вероятность того, что взятая наугад единица продукции будет стандартной.

23. Для посева заготовлены семена 4 видов клёна. Причем, 22 % всех семян клёна 1-го вида; 33 % – 2-го вида; 32 % – 3-го вида; 13 % – 4-го вида. Вероятность всхожести для семян первого вида равна 0,69; для второго – 0,74; для третьего – 0,43; для четвёртого – 0,38. Найти вероятность того, что наугад взятое семечко взойдёт.

24. В ящик, содержащий 6 одинаковых перчаток, брошена перчатка с дефектом, а затем извлечена одна перчатка. Найти вероятность того, что извлечена перчатка без дефекта, если равновероятны все возможные предположения о числе дефектных перчаток, первоначально находящихся в ящике.

25. Из полного набора 28 костей домино наугад извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую извлеченную кость можно приставить к первой.

26. В группе спортсменов 12 метателей снарядов, 17 бегунов и 19 прыгунов. Вероятность выполнить квалификационную норму для метателя снаряда равна 0,71; для бегуна – 0,89; для прыгуна – 0,73. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наугад, выполнит норму.

27. При попытке угона машины сигнализация первого вида подаёт сигнал тревоги с вероятностью 0,84, а сигнализация второго вида – с вероятностью 0,99. Вероятность того, что машина оборудована сигнализацией первого или второго вида соответственно равна 0,7 и 0,3. Какова вероятность подачи сигнала тревоги сигнализации на случайно выбранной машине?

28. Агентство по страхованию автомобилей разделяет водителей по 3 классам: P_1 (практически не рискует), P_2 (мало рискует), P_3 (всегда рискует). Анализ застрахованных водителей предыдущих периодов показал, что 32 % водителей принадлежит классу P_1; 48 % – классу P_2 и 20 % – классу P_3. Вероятность попасть в течение года в аварию для водителей класса P_1 равна 0,01; класса P_2 – 0,015; класса P_3 – 0,124. Какова вероятность того, что наугад выбранный водитель за год не попадёт в аварию?

29. В соревнованиях участвуют 7 спортсменов из Москвы, 9 из городов Поволжья, 13 из городов Сибири. Спортсмен из Москвы попадает в сборную с вероятностью 0,9; из Поволжья – с вероятностью 0,7; а из Сибири – 0,85. Какова вероятность попасть в сборную наугад выбранному спортсмену?

30. В собранной электрической цепи могут быть поставлены предохранители 3 типов. Вероятности постановки предохранителя первого, второго или третьего типов равны 0,19; 0,63 и 0,18 соответственно. Вероятности перегорания при перегрузке цепи для предохранителей первого, второго и третьего типов равны 0,89, 0,97 и 0,82 соответственно. Какова вероятность того, что предохранитель в цепи перегорит, если его тип неизвестен?

Контрольные вопросы

1. Что называется полной группой событий?
2. Какие события называются совместными?
3. Для чего применяется формула полной вероятности?
4. Студент знает не все экзаменационные билеты. В каком случае вероятность вытащить неизвестный билет будет для него наименьшей: когда он берёт билет первым или последним?
5. Как записывается формула полной вероятности?
6. Что такое гипотеза в формуле полной вероятности?
7. Для каких событий справедлива формула полной вероятности?
8. Какие ограничения накладываются на гипотезы в формуле полной вероятности?

9. Если для наступления события A необходимо выполнение только одного события B, может ли быть применена для вычисления его вероятности формула полной вероятности?

10. Если наступление события A возможно в результате счётного числа гипотез, применима ли для вычисления его вероятности формула полной вероятности?

1.4. Формула Байеса (теорема гипотез)

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H_1,\ H_2,...,$ H_n, известны вероятности $P(H_i)$, $i=\overline{1,n}$, этих гипотез до опыта и условные вероятности $P(A/H_i)$ события A, которое может произойти лишь совместно с одной гипотезой.

Произведён опыт, в результате которого событие A произошло, тогда условные вероятности $P(H_i\ /\ A)$ вычисляются по формуле

$$P(H_i\ /\ A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)},$$

где $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)$.

Пример. В магазин поступают лампочки, изготовленные на трёх заводах, причем 40 % лампочек поступает с завода I; 50 % лампочек – с завода II и 10 % – с завода III. Процент бракованных лампочек, изготовленных на заводах I, II, III соответственно равен 1 %, 2 %, 4 %. Купленная лампочка оказалась качественной.

Определить вероятность того, что эта лампочка изготовлена на заводе I.

Решение. Пусть событие A – взятая лампочка качественная. Возможны три гипотезы H_1, H_2, H_3 – взятая лампочка изготовлена, соответственно, на I, II, III заводе. Вероятность каждой из гипотез определяется по условию задачи:

$$P(H_1)=0{,}4;\ P(H_2)=0{,}5;\ P(H_3)=0{,}1.$$

Соответствующие условные вероятности события A:

$$P(A/H_1)=1-0{,}01=0{,}99;$$

$$P(A/H_2)=1-0{,}02=0{,}98;$$

$$P(A/H_3)=1-0{,}04=0{,}96.$$

Полная вероятность события A:

$$P(A)=0{,}4\cdot 0{,}99+0{,}5\cdot 0{,}98+0{,}1\cdot 0{,}96=0{,}882.$$

Условная вероятность гипотезы H_1:

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A / H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}99}{0{,}882} = 0{,}449 .$$

Задачи

1. Браконьер, убегая от лесника, вышел на поляну, от которой в разные стороны идут пять дорог. Если браконьер пойдет по первой дороге, то вероятность его выхода из леса в течение часа составляет 0,7; если по второй – 0,4; если по третьей – 0,3; по четвёртой – 0,2; по пятой – 0,6. Какова вероятность того, что браконьер пошел по первой дороге, если он через час вышел из леса?

2. Вероятность попадания при каждом выстреле у трёх охотников равна, соответственно, 0,8; 0,6; 0,7. При одновременном выстреле всех трех охотников имелось одно попадание. Найти вероятность того, что попал первый стрелок.

3. Счётчик регистрирует частицы трёх типов: A, B и C. Вероятность появления этих частиц составляет 0,3; 0,6; 0,1 соответственно. Вместе с тем, счётчик улавливает частицы типа A с вероятностью 0,7; частицы типа B – 0,6; а частицы типа C – 0,9. Счётчик отметил частицу. Определить вероятность того, что это была : а) частица C; б) частица B.

4. Вероятность того, что клиент банка направится к первой кассе – 1/2; ко второй – 1/6; к третьей – 1/3. Вероятность того, что ему придётся стоять в очереди больше получаса в первую кассу составляет 1/6; во вторую кассу – 1/10; в третью – 1/9. Клиент обратился в одну из касс и был обслужен в течение 20 минут. Определите вероятность того, что клиент был обслужен в первой кассе.

5. Соревнования на стрельбище происходят следующим образом. Один из трёх спортсменов вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле для первого стрелка равна 0,2; для второго – 0,4; для третьего – 0,7. Мишень не была поражена стрелком. Какова вероятность того, что на линию огня вызывался: а) второй стрелок? б) третий стрелок?

6. Для сдачи экзамена по правилам дорожного движения слушателям нужно было выучить 45 билетов. Из 30 слушателей 15 выучили все билеты; 8 – 30 билетов; 6 – 20 билетов и 1 – 10 билетов. Слушатель сдал экзамен. Найти вероятность того, что он знал всего 20 билетов.

7. Среди абитуриентов, подавших документы в приёмную комиссию, 60 проц. закончили обучение в текущем году, 30 проц. – не более трёх лет назад и 10 проц. более трёх лет назад. Вероятность поступления из этих групп абитуриентов равна 0,88, 0,73 и 0,45 соответственно. Найти вероят-

ность того, что успешно сдавший экзамены абитуриент закончил обучение более трёх лет назад.

8. В лесхозе 50 % посадок составляет сосна; 40 % береза и 10 % ель. Вероятность поражения грибковыми заболеваниями для этих деревьев составляет 0,3; 0,6 и 0,8 соответственно. При санитарном осмотре было выбраковано дерево. Какова вероятность того, что это дерево ель?

9. На склад поступает продукция трёх фабрик. Причем продукция первой фабрики составляет 26 %; второй – 40 %; третьей – 34 %. Известно также, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 1 %; для второй – 3 %; а для третьей – 1,5 %. Вычислите вероятность того, что наугад взятое изделие произведено на первой фабрике, если оно оказалось нестандартным.

10. В гимназии 67 проц. учащихся девочки. 89 проц. девочек и 78 проц. мальчиков имеют билеты в театр. В учительскую принесли кем-то потерянный билет. Какова вероятность того, что билет принадлежит девочке?

11. В кафе посетителей обслуживают три официантки. Первая обслуживает 40 % столиков, вторая – 35 % столиков и третья – 25 % столиков. Вероятность ожидания клиентами каждой из них более 5 минут составляет 0,4; 0,35 и 0,2 соответственно. Какова вероятность того, что клиенты были обслужены второй официанткой, если они ждали официантку 2 минуты.

12. В первом ящике 22 сосновых и 15 еловых шишек, а во втором – 20 сосновых и 25 еловых. Из первого ящика переложили две шишки во второй, а потом из второго ящика достали одну шишку. Какова вероятность того, что эта шишка из первого ящика, если она еловая?

13. В группе из 30 стрелков 7 отличных, 11 хороших, 10 посредственных и 2 плохих. При одном выстреле отличный стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,98; хороший – с вероятностью 0,9; посредственный – с вероятностью 0,75; а плохой – с вероятностью 0,4. Наугад выбранный стрелок выстрелил дважды; отмечены одно попадание и один промах. Каким стрелком вероятнее всего были произведены выстрелы?

14. Два охотника одновременно стреляют в цель. Известно, что вероятность попадания у первого охотника равна 0,8, а у второго – 0,6. В результате трёх залпов оказалось 5 попаданий. Какова вероятность того, что промахнулся первый охотник?

15. В цеху изготавливается 40 % овощных соков и 60 % фруктово-ягодных. В среднем 9 пакетов овощных соков из 1 000 оказываются с недоливом, а среди 500 пакетов фруктово-ягодных соков недолив встречается в 2 пакетах. Случайно выбранный пакет с соком оказался неполным. Найти вероятность того, что это пакет с овощным соком.

16. При исследовании жирности молока лосих всё стадо было разбито на три группы. В первой группе оказалось 50 %; во второй 33 % и в

третьей 17 % всех лосих. Вероятность того, что молоко, полученное от отдельной лосихи, имеет не менее 4 % жирности, для каждой группы лосих соответственно равна 0,7; 0,45 и 0,2. Взятая наугад лосиха даёт молоко жирностью 4%. Найти вероятность того, что эта лосиха из первой группы.

17. Имеется 5 ящиков с кружками. В первом, втором и третьем находится по 6 белых и 8 синих кружек, в четвёртом и пятом ящиках по 4 белых и 6 синих кружек. Случайно выбирается ящик, и из него извлекается кружка. Какова вероятность того, что был выбран четвёртый или пятый ящик, если извлеченная кружка оказалась белой?

18. Покупатель с равной вероятностью посещает 3 магазина. Вероятность того, что он купит товар в первом магазине равна 0,3; во втором 0,4; в третьем – 0,2. Определить вероятность того, что покупатель купил товар только в одном магазине, если каждый магазин он посетил дважды.

19. Первая бригада производит в четыре раза больше продукции, чем вторая. Вероятность того, что производимая продукция окажется стандартной для первой бригады 0,88; для второй – 0,93. Взятая наугад единица продукции оказалась стандартной. Какова вероятность того, что она сделана первой бригадой?

20. Для посева заготовлены семена 4 видов клёна. Причем, 25 % всех семян клёна 1-го вида; 36 % – 2-го вида; 28 % – 3-го вида; 11 % – 4-го вида. Вероятность всхожести для семян первого вида равна 0,61, для второго – 0,54; для третьего – 0,33; для четвертого – 0,47. Найти вероятность того, что взошедшее семечко принадлежит к клёнам: а) третьего вида; б) второго вида; в) первого вида.

21. Агентство по страхованию автомобилей разделяет водителей по 3 классам: P_1 (практически не рискует), P_2 (мало рискует), P_3 (всегда рискует). Анализ застрахованных водителей предыдущих периодов показал, что 24 % водителей принадлежит классу P_1; 48 % – классу P_2 и 28 % – классу P_3. Вероятность попасть в течение года в аварию для водителей класса P_1 равна 0,01; класса P_2 – 0,015; класса P_3 – 0,024. Какова вероятность того, что водитель, ни разу не попавший за год в аварию, из класса P_1?

22. В собранной электрической цепи могут быть поставлены предохранители 3 типов. Вероятности постановки предохранителя первого, второго или третьего типов равны 0,17; 0,62 и 0,21. Вероятности перегорания при перегрузке цепи для предохранителей первого, второго и третьего типов равны 0,98; 0,87 и 0,84 соответственно. Какова вероятность того, что поставлен предохранитель первого или второго типа, если предохранитель перегорел?

23. На мебельной фабрике выпускаются столы: 24 % – "под орех"; 37 % – "под сосну"; 39 % – "под дуб". При этом в течение месяца продается 99 % выпускаемых столов "под орех"; 95 % – "под сосну"; 90 % –

"под дуб". Какова вероятность того, что проданный сегодня утром стол имеет окраску "под орех"?

24. На деревообрабатывающем предприятии выпускают фанеру трех типов, причем типа А – 27 % от общего количества; типа В – 45 %; типа С – 38 %. За день распродано 98 % фанеры типа А; 90 % фанеры типа В и 80 % фанеры типа С. Какова вероятность того, что последняя продажа дня пришлась на фанеру типа А?

25. При окраске изделий фабрики в 30 случаях из 100 используется синяя краска, в 15 красная, в 23 зелёная и в 33 белая. Среди изделий, окрашенных цветными красками, вероятность некачественной окраски составляет 0,04, а среди тех, что окрашены белой краской, – 0,06. Случайно проверенное изделие оказалось с дефектом окраски. Какова вероятность того, что это изделие: а) зелёное? б) синее? в) белое?

26. Три пассажира вышли из вагона метро на станции "Киевская". Вероятности того, что они сделают пересадку, равны 0,89; 0,73 и 0,92, соответственно, для перового, второго и третьего пассажиров. Двое из пассажиров вышли к Киевскому вокзалу. Найти вероятность того, что среди них был второй пассажир.

27. Для контроля влажности воздуха в музее установлены четыре датчика. Вероятности ошибки в их показаниях равны 0,01 для первого, 0,013 для второго, 0,011 для третьего и 0,009 для четвертого. Контролёр наугад снимает показания с одного из датчиков и записывает его показания в контрольный журнал. Какова вероятность того, что были сняты показания со второго датчика, если они оказались ошибочными?

28. На одной яблоне привиты три сорта яблок, а на второй два из них. В этом году с первой яблони собрали 30 яблок сорта анис, 42 яблока сорта грушовка и 32 яблока сорта пепин шафранный, а со второй яблони – 43 яблока сорта анис и 54 яблока сорта пепин шафранный. Хозяин угостил мальчика яблоком сорта пепин шафранный. Какова вероятность того, что это яблоко росло на второй яблоне?

29. Хоккейная команда собрана из представителей клубов трёх областей: 30 % ее состава из Псковской области, 33 % из Новгородской и 47 % из Ленинградской. В нападении играет 30 % игроков из Ленинградской области и 28 % из Новгородской. В игре тренер выпускает на замену нападающего. Какова вероятность того, что он из Псковской области?

30. Туристы могут пообедать в трёх ресторанах города. Вероятность того, что они направятся к первому ресторану – 1/3; ко второму – 1/5; к третьему –7/15. Вероятность того, что эти рестораны уже закрыты на обслуживание какой-то другой группы туристов, для первого ресторана равна 0,5; для второго – 0,127; для третьего – 0,333. Туристы пообедали в том ресторане, куда они пришли. Какова вероятность того, что это был второй ресторан?

Контрольные вопросы

1. Что называется гипотезой?
2. При каких условиях применяется теорема гипотез?
3. Что позволяет оценивать формула Байеса?
4. Запишите формулу Байеса.
5. Можно ли переоценить вероятность гипотезы до того, как стал известен результат испытания?

1.5. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли

Пусть производится несколько испытаний, в каждом из которых может появиться событие A. Если вероятность события A в каждом испытании не зависит от того, появилось или не появилось это событие в других испытаниях, то такие испытания называются независимыми относительно события A. Примером независимых испытаний является последовательность появления герба или решки при бросании монеты.

Пусть производится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых может появиться событие A с вероятностью $P(A) = p$. Вероятность того, что событие A не наступит, для каждого испытания равна

$$P(\overline{A}) = 1 - p = q.$$

Вероятность $P_n(m)$ того, что при n независимых испытаниях событие A появится ровно m раз, вычисляется по формуле, называемой формулой Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

или

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит: а) менее m раз; б) более m раз; в) не менее m раз; г) не более m раз, – находят соответственно по формулам:

$$P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(m-1);$$
$$P_n(m+1) + P_n(m+2) + ... + P_n(n);$$
$$P_n(m) + P_n(m+1) + ... + P_n(n);$$
$$P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(m).$$

Формула Бернулли представляется функцией

БИНОМРАСП(k, n, p, ЛОЖЬ),

где k – количество появления события, n – число независимых испытаний; p – вероятность появления события; "ЛОЖЬ" – указание на то, что определяется вероятность появления ровно k событий. В случае, когда последний аргумент функции равен "ИСТИНА", функция возвращает вероятность того, что в n испытаниях событие наступит не менее k раз.

Локальная теорема Лапласа. Вероятность $P_n(k)$ того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0<p<1)$, событие наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности), определяется формулой

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$,

значение $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Для вычисления значения $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$ можно использовать функцию НОРМАЛИЗАЦИЯ, а именно

x = НОРМАЛИЗАЦИЯ(k; μ; σ),

где $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{npq}$.

Для определения значения функции $\varphi(x)$ применяется функция НОРМРАСП с параметрами ноль и единица:

$\varphi(x)$ = НОРМРАСП (x; 0; 1; ЛОЖЬ).

Пример. Найти вероятность того, что событие X наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

Решение. По условию, $n=243$; $k=70$; $p=0{,}25$; $q=0{,}75$. Так как $n=243$ – достаточно большое число, воспользуемся локальной теоремой Лапласа. Найдём

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{70-243\cdot 0{,}25}{\sqrt{243\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}}=\frac{9{,}25}{6{,}75}=1{,}37.$$

По таблице значений функции Лапласа найдём $\varphi(1{,}37)=0{,}1561$. Искомая вероятность

$$P_{243}(70)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)=\frac{1}{6{,}76}\cdot 0{,}1561=0{,}0231.$$

Применяя функции Excel, решение этого примера можно найти следующим образом:

$$\mu = np=243\cdot 0{,}25=60{,}75;$$

$$\sigma = \sqrt{243\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}=6{,}75;$$

$x=$ НОРМАЛИЗАЦИЯ(70; 60,75; 6,75)=1,37;

$\varphi(x)=$ НОРМРАСП (1,37; 0; 1; ЛОЖЬ)=0,1561;

$$P_{243}(70)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)=\frac{1}{6{,}75}\cdot 0{,}1561=0{,}0231.$$

Интегральная теорема Лапласа. Вероятность $P(k_1,k_2)$ того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0<p<1)$, событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, задается зависимостью

$$P(k_1,k_2)\approx\Phi(x'')-\Phi(x'),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-(z^2/2)}dz$ – функция Лапласа;

значение $x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$;

значение $x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Функция Лапласа в её стандартном представлении для заданного значения аргумента может быть вычислена с помощью функции НОРМСТРАСП:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-(z^2/2)}dz=\text{НОРМСТРАСП}(x).$$

Пример. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.

Решение. а) По условию,

$$n = 100;\, k_1 = 75;\, k_2 = 90;\, p = 0{,}8;\, q = 0{,}2.$$

Так как $n = 100$ – достаточно большое число, воспользуемся интегральной теоремой Лапласа. Найдём x' и x'':

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 2{,}5.$$

Учитывая, что функция Лапласа нечётна, т. е. $\Phi(-x) = \Phi(x)$, получим

$$P_{100}(75; 90) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25).$$

По таблице значений функций Лапласа найдём:

$$\Phi(2{,}5) = 0{,}4938; \quad \Phi(1{,}25) = 0{,}3944.$$

Искомая вероятность

$$P_{100}(75; 90) \approx 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

б) Требование, чтобы событие появилось не менее 75 раз, означает, что число появлений события может быть равно 75 либо 76, либо 77, ..., либо 100. Таким образом, в рассматриваемом случае следует принять: $n = 100;\, k_1 = 75;\, k_2 = 100;\, p = 0{,}8;\, q = 0{,}2.$

Тогда

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 5.$$

По таблице находим $\Phi(5) = 0{,}5;\ \Phi(1{,}25) = 0{,}3944.$

Искомая вероятность

$$P_{100}(75;10) \approx \Phi(5) - \Phi(-1,25) = 0,5 + 0,3944 = 0,8944.$$

в) События – " A появилось не менее 75 раз" и " A появилось не более 74 раз" противоположны, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице. Следовательно, искомая вероятность

$$P_{100}(0;74) \approx 1 - P_{100}(75;100) = 1 - 0,8944 = 0,1056.$$

Используяя функции Excel, решение этого примера для пункта а можно найти следующим образом:

$$\mu = np = 100*0,8 = 80;$$

$$\sigma = \sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = 4;$$

$x' =$ НОРМАЛИЗАЦИЯ(75; 80; 4)= – 1,25;

$x'' =$ НОРМАЛИЗАЦИЯ(90; 80; 4)= 2,5;

$\Phi(x') =$ НОРМСТРАСП (–1,25)=0,3944;

$\Phi(x'') =$ НОРМСТРАСП (5)=0,5;

$$P_{100}(75;10) \approx \Phi(5) - \Phi(-1,25) = 0,5 + 0,3944 = 0,8944.$$

Наивероятнейшим называют число k_0 (наступления события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p), если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число k_0 определяют из двойного неравенства

$$np - q \le k_0 \le np + p,$$

причем:

а) если число $(np - q)$ – дробное, то существует одно наивероятнейшее число;

б) если число $(np - q)$ – целое, то существуют два наивероятнейших числа, а именно: k_0 и $k_0 + 1$;

в) если число np – целое, то наивероятнейшее число $k_0 = np$.

Пример. Товаровед осматривает 24 образца товаров. Вероятность того, что каждый из образцов будет признан годным к продаже, равна 0,6.

Найти наивероятнейшее число образцов, которые товаровед признает годными к продаже.

Решение. По условию задано: $n = 24; p = 0{,}6; q = 0{,}4$. Наивероятнейшее число годных к продаже образцов товаров найдем из двойного неравенства, вычислив значения $np - q$ и $np + p$:

$$24 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \le k_0 \le 24 \cdot 0{,}6 + 0{,}4,$$

или

$$14 \le k_0 \le 15.$$

Так как $np - q = 14$ – целое число, то наивероятнейших чисел два:

$$k_0 = 14 \text{ и } k_0 + 1 = 15.$$

Задачи

1. Мастер обслуживает шесть однотипных станков. Вероятность того, что станок потребует внимания мастера в течение дня, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение дня мастеру придется вмешаться в работу станков: а) меньше одного раза; б) больше двух раз; в) не меньше трёх раз; г) не больше двух раз; д) от двух до пяти раз.

2. Девушка согласилась пойти в кино с юношей только на четвёртое его приглашение. Вероятность того, что юноша приглашает девушку в какой-то день пойти с ним в кино, равна 0,4. Какова вероятность того, что девушка пойдет в кино с юношей, если он её сегодня приглашает в пятый раз?

3. Игральную кость бросаем 15 000 раз. Какова вероятность того, что шестёрка появится не менее 2 000 и не более 2 500 раз?

4. Вероятность выигрыша в лотерее равна 0,01. Какова вероятность того, что среди 1 000 наугад купленных билетов не менее 30 и не более 40 выигрышных?

5. Вероятность того, что студент забросит мяч в корзину, равна 0,4. Студент произвел 24 броска. Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую вероятность.

6. Мебельная фабрика производит продукцию, среди которой 90 % высшего качества. Какова вероятность того, что среди 200 изделий этой фабрики высшего сорта будет: а) не меньше 160; б) не больше 170?

7. Два равных по силе шахматиста играют в турнире. Что вероятнее: три победы одного из них в пяти партиях или 6 побед в десяти?

8. В освещении помещения фирмы используются 14 лампочек. Для каждой лампочки вероятность того, что она останется исправной в течение

года, равна 7/8. Какова вероятность того, что в течение года придётся заменить не меньше половины всех лампочек?

9. Вероятность встретить на улице знакомого равна 0,1. Сколько среди первых 100 случайных прохожих можно надеяться встретить знакомых с вероятностью 0,95?

10. Стрелок стреляет по цели до первого попадания. Найти вероятность того, что у стрелка останется хотя бы один неизрасходованный патрон, если он получил 7 патронов и вероятность попадания в цель при одиночном выстреле равна 1/7.

11. В июне в Москве в среднем бывает 20 дождливых дней. Какова вероятность того, что в период с 20 по 25 июня какие-то два дня окажутся дождливыми?

12. Саженцы сосны приживаются с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что из 400 посаженных саженцев число прижившихся будет заключено между 348 и 368.

13. Вероятность выздоровления больных при применении нового лекарства составляет 85 %. В больницу на лечение положили 125 больных. Какова вероятность того, что 117 из них вылечатся?

14. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного охотника равна 0,9 и не зависит от номера выстрела. Найти наиболее вероятное число попаданий в мишень при 7 выстрелах и соответствующую этому числу вероятность.

15. Всхожесть семян астры данного сорта оценивается вероятностью 0,85. Какова вероятность того, что из семи посеянных семян взойдут не менее четырёх?

16. Монета брошена 10 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет от 4 до 6 раз?

17. Игральная кость брошена 5 раз. Чему равна вероятность выпадения единицы хотя бы один раз?

18. Было посажено 800 деревьев. Чему равна вероятность того, что прижившихся деревьев больше 350, если вероятность приживания для одного дерева равна 0,85?

19. Вероятность выигрыша по облигациям займа за всё время его действия равна 0,25. Какова вероятность человеку, купившему 6 облигаций, выиграть по четырём из них?

20. Какова вероятность того, что при 18 бросаниях монеты герб выпадет ровно 10 раз?

21. Игральную кость бросают 180 раз. Сколько раз, вероятнее всего, выпадет шесть очков? Найти вероятность этого события.

22. Вероятность появления на занятиях студента равна 0,2. В семестре всего 385 занятий. Какова вероятность того, что студент будет присутствовать не менее чем на 76 занятиях?

23. В мастерской работают 8 моторов. Для каждого мотора вероятность перегрева к обеденному перерыву равна 0,8. Найти вероятность того, что к обеденному перерыву перегреются 4 мотора.

24. Монету бросают 387 раз. Какова вероятность того, что герб при этом выпадет не менее 195 раз, но не более 207 раз?

25. Вероятность опоздать на электричку для студента ежедневно равна 0,15. Студент ездит на учёбу 236 дней в году. Найти наивероятнейшее число опозданий в течение года. Какова вероятность этого числа?

26. Брошены три игральные кости. Найти вероятность того, что хотя бы на одной из костей выпало не больше двух очков.

27. В кольцо делают четыре независимых броска. Вероятность попадания в кольцо при одном броске равна 0,3. Чтобы победить, команде достаточно попасть три раза. При двух попаданиях в кольцо вероятность выигрыша равна 0,8, а при одном попадании – 0,5. Найти вероятность того, что команда выиграет.

28. Вероятность того, что телевизор в течение гарантийного срока потребует ремонта, равна 0,03. Найти вероятность того, что из 10 телевизоров хотя бы один потребует ремонта в течение гарантийного срока.

29. Вероятность изготовления детали высшего качества на данном станке равна 0,43. Найти наивероятнейшее число деталей высшего качества среди 42 деталей. Чему равна вероятность этого события?

30. По цели производятся три независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,12; при втором – 0,21 и при третьем – 0,34. Для поражения цели достаточно двух попаданий. При одном попадании цель поражается с вероятностью 0,63. Найти вероятность поражения цели.

Контрольные вопросы

1. Какие испытания называются независимыми?
2. Запишите формулу Бернулли.
3. Как вычислить вероятность того, что в n испытаниях событие наступит менее k раз?
4. Как вычислить вероятность того, что в n испытаниях событие наступит не менее k раз?
5. Как вычислить вероятность того, что в n испытаниях событие наступит более k раз?
6. Как вычислить вероятность того, что в n испытаниях событие наступит не более k раз?
7. Что вычисляется с помощью локальной теоремы Лапласа?
8. Как записывается локальная теорема Лапласа?
9. Какие задачи решаются с помощью интегральной теоремы Лапласа?

10. Как формулируется интегральная теорема Лапласа?

11. Запишите функцию Лапласа.

12. Функция Лапласа является чётной или нечётной?

13. Функция Лапласа является монотонной или нет?

14. Какая формула используется для получения зависимостей локальной и интегральной теорем Лапласа?

15. Как найти значение функции Лапласа для конкретно заданного числового значения?

1.6. Дискретные случайные величины

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять одно и только одно из возможных значений, причём неизвестно заранее, какое именно.

Дискретную случайную величину X с возможными значениями x_1, $x_2,...,x_n$ будем записывать в виде $X=(x_1;x_2;\ldots;x_n)$. Каждое из значений x_i возможно, но не достоверно, и случайная величина X может принять одно из них с некоторой вероятностью $P(X=x_i)=p(x_i)=p_i$ $(i=\overline{1,n})$. В результате опыта произойдет одно из полной группы несовместных событий $X=x_1$, $X=x_2$,..., $X=x_n$, следовательно, сумма вероятностей этих событий равна единице. Эта суммарная вероятность каким-то образом распределена между отдельными значениями.

Совокупность значений дискретной случайной величины и вероятности этих значений могут быть объединены в таблице следующего вида:

$X=x_i$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P=p_i$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины и их вероятности, является простейшей формой закона распределения дискретной случайной величины и называется ***законом распределения***.

Графическим изображением закона распределения является многоугольник распределения, который строится следующим образом. По оси абсцисс откладывают возможные значения случайной величины, а по оси ординат – вероятности этих значений; для наглядности полученные точки соединяют отрезками прямых.

В Excel для построения графиков, гистограмм и диаграмм применяется средство "Мастер диаграмм". Для его использования необходимо нажать на иконку с таким названием.

После включения окна "Мастер диаграмм" выбирают тот вид графического изображения заданной случайной величины, который наиболее соответствует решаемой задаче.

Задачи

В следующих задачах требуется найти законы распределения случайных величин $3X + A$, $AX - 5X$, X^2, $\sqrt{X}$, по закону распределения для дискретной случайной величины X, заданному рядом распределения, и построить для нее многоугольник распределения. Число A равно последней цифре в номере текущего года.

При построении различных диаграмм продемонстрировать возможности Excel для представления различных типов гистограмм, графиков и диаграмм. Сделать соответствующие надписи на осях и диаграммах. Применить возможности нахождения тренда и его аналитической зависимости для линейных графиков. Использовать при построении диаграмм цветовые возможности программы "Мастер диаграмм".

1.

X	12	14	16	24	27
P	0,4	0,3	0,1	0,15	0,05

2.

X	10	14	17	20	23
P	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

3.

X	20	24	28	34	37
P	0,2	0,3	0,25	0,15	0,1

4.

X	13	15	17	21	26
P	0,1	0,35	0,3	0,2	0,05

5.

X	10	20	25	30	35
P	0,2	0,15	0,15	0,3	0,2

6.

X	1,0	1,5	1,9	2,5	2,8
P	0,1	0,25	0,35	0,25	0,05

7.

X	112	114	128	144	157
P	0,2	0,35	0,2	0,15	0,1

8.

X	40	53	67	80	93
P	0,25	0,3	0,25	0,19	0,01

9.

X	30	45	60	75	90
P	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

10.

X	35	75	80	105	120
P	0,05	0,25	0,45	0,15	0,1

11.

X	100	130	170	200	230
P	0,5	0,25	0,15	0,08	0,02

12.

X	30	34	38	54	57
P	0,5	0,2	0,15	0,09	0,06

13.

X	10,5	13,4	17,6	20,7	23,8
P	0,35	0,25	0,2	0,15	0,05

14.

X	122	142	182	242	276
P	0,2	0,6	0,1	0,07	0,03

15.

X	60	63	68	70	83
P	0,13	0,17	0,29	0,22	0,19

16.

X	21	24	27	33	39
P	0,5	0,25	0,15	0,06	0,04

17.

X	11	13	19	20	27
P	0,05	0,15	0,25	0,45	0,1

18.

X	42	54	58	64	77
P	0,3	0,15	0,12	0,33	0,1

19.

X	10	15	30	40	45
P	0,18	0,1	0,22	0,38	0,12

20.

X	24	42	68	74	87
P	0,4	0,35	0,07	0,15	0,03

21.

X	12	13	19	28	33
P	0,1	0,12	0,28	0,32	0,18

22.

X	120	145	160	205	220
P	0,3	0,5	0,05	0,05	0,1

23.

X	1,05	1,35	1,7	2,05	2,53
P	0,2	0,15	0,25	0,3	0,1

24.

X	32	35	39	42	47
P	0,05	0,55	0,25	0,1	0,05

25.

X	45	55	80	90	100
P	0,3	0,4	0,15	0,1	0,05

26.

X	10	15	30	40	45
P	0,03	0,07	0,7	0,15	0,05

27.

X	24	42	68	74	87
P	0,25	0,35	0,15	0,15	0,1

28.

X	12	13	19	26	30
P	0,02	0,18	0,4	0,24	0,16

29.

X	120	150	160	200	280
P	0,2	0,4	0,15	0,14	0,11

30.

X	1, 5	2,5	2,7	3, 2	3,5
P	0,1	0,25	0,35	0,2	0,1

Контрольные вопросы

1. Какая случайная величина называется дискретной?
2. Что называют законом распределения дискретной случайной величины?
3. Основное свойство закона распределения.
4. Как определяется сумма случайных величин?
5. Как определяется произведение случайной величины на число?
6. Как определяется произведение случайных величин?
7. Что называется многоугольником распределения?
8. Приведите пример дискретной случайной величины.
9. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X – числа выпадений чётного числа очков на двух игральных костях.

10. В партии из 12 деталей имеются 9 стандартных. Наугад отобраны две детали. Составьте закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

11. Напишите закон распределения числа появления "решки" при двух бросаниях монеты.

12. Устройство состоит из 1 000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа любого элемента в течение 10 минут равна 0,003. Найти вероятность того, что за 10 минут откажут ровно три элемента.

13. Вероятность того, что стрелок попадёт в мишень при одном выстреле, равна 0,9. Стрелку выдают патроны до тех пор, пока он не промахнётся. Составьте закон распределения случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку.

14. Фабрика отправила на торговую базу 500 изделий. Вероятность повреждения в пути одного изделия равна 0,002. Найти закон распределения случайной величины X – числа повреждённых изделий в пути следования.

15. Машина состоит из 3 000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа любого элемента в течение 30 минут равна 0,001. Найти вероятность того, что за 30 минут откажут ровно три элемента.

1.7. Функция распределения

Функцией распределения $F(x)$ называется вероятность $P(X < x)$ события, состоящего в том, что случайная величина X принимает значение меньшее, чем x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства функции распределения

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0;1]$, то есть $0 \le F(x) \le 1$.

Это следует из определения функции распределения как вероятности.

2. Функция распределения неубывающая, то есть, если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

3. Если возможные значения случайной величины X принадлежат промежутку $[a;b]$, то при $x \le a$ $F(x) = 0$, при $x > b$ $F(x) = 1$.

Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключённое в промежутке $(a;b)$, равна приращению функции распределения на этом промежутке:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Непрерывной будем называть такую случайную величину, для которой функция распределения в любой точке, соответствующей возможному значению, является непрерывной.

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определённое значение x_0, равна нулю.

Для дискретной случайной величины $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция распределения определяется формулой

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P_i,$$

где $P_i = P(X = x_i)$, а неравенство $x_i < x$ под знаком суммы означает, что суммирование распространяется на все те значения x_i, которые меньше x.

Пример. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	3	5	7	9
P	0, 2	0, 5	0, 2	0, 1

Найти функцию распределения $F(X)$.

Решение. Если $x \le 3$, то значение интегральной функции распределения $F(X) = 0$. Действительно, значений, меньших числа 3, дискретная случайная величина X не принимает. Следовательно, при $x \le 3$ функция $F(X) = P(X < x) = 0$.

Если $3 < x \le 5$, то значение функции распределения $F(X) = 0{,}2$. Действительно, случайная величина X может принимать в рассматриваемом промежутке только значение 3, причем с вероятностью 0, 2.

Если $5 < x \le 7$, то значение функции распределения $F(X) = 0{,}7$. Действительно, случайная величина X может принимать значение 3 с вероятностью 0, 2 и значение 5 с вероятностью 0, 5. Следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, случайная величина X может принять (по теореме сложения несовместных событий) с вероятностью $0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}7$.

Если $7 < x \le 9$, то значение функции распределения $F(X) = 0{,}9$. Действительно, случайная величина X может принимать значение 3 с вероятностью 0, 2, значение 5 с вероятностью 0, 5, значение 7 с вероятностью 0,

2. Следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, случайная величина X может принять (по теореме сложения несовместных событий) с вероятностью $0{,}2+0{,}5+0{,}2=0{,}9$.

Если $x>9$, то значение функции распределения $F(X)=1$. Действительно, событие $X\le 9$ достоверно для рассматриваемой случайной величины, и вероятность его равна единице.

Итак, искомая функция распределения имеет вид

$$F(X)=\begin{cases}0, & x\le 3;\\ 0{,}2, & 3<x\le 5;\\ 0{,}7, & 5<x\le 7;\\ 0{,}9, & 7<x\le 9;\\ 1, & x>9.\end{cases}$$

График функции распределения дискретной случайной величины является ступенчатым. Высота ступеньки определяется вероятностью наступления значения случайной величины. Общее число точек разрыва равно числу значений дискретной случайной величины.

График функции распределения непрерывной случайной величины является непрерывной линией.

Задачи

Изобразить многоугольник распределения и интегральную функцию распределения для случайной величины $2X-A$. Число A равно последней цифре в номере текущего года.

1.

X	10	13	17	20	25
P	0,4	0,3	0,1	0,15	0,05

2.

X	8	14	17	20	23
P	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

3.

X	20	24	29	34	37
P	0,2	0,3	0,25	0,15	0,1

4.

X	14	15	17	25	26
P	0,1	0,35	0,3	0,2	0,05

5.

X	16	20	25	30	35
P	0,2	0,15	0,15	0,3	0,2

6.

X	0	1,5	1,9	2,5	2,9
P	0,1	0,25	0,35	0,25	0,05

7.

X	100	114	128	144	160
P	0,2	0,35	0,2	0,15	0,1

8.

X	45	53	67	80	95
P	0,25	0,3	0,25	0,19	0,01

9.

X	25	45	60	75	98
P	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

10.

X	60	75	80	105	110
P	0,05	0,25	0,45	0,15	0,1

11.

X	1	2	3	7	9	10	12
P	0,04	0,026	0,31	0,09	0,18	0,11	0,01

12.

X	6	8	14	17	19	20	23
P	0,1	0,11	0,14	0,17	0,18	0,22	0,08

13.

X	20	24	28	30	34	37	40
P	0,2	0,23	0,25	0,1	0,13	0,08	0,01

14.

X	10	13	15	17	25	27	29
P	0,1	0,12	0,23	0,3	0,17	0,05	0,03

15.

X	8	16	18	20	25	30	35
P	0,01	0,17	0,19	0,26	0,15	0,12	0,1

16.

X	0,5	1,5	1,9	2,3	2,5	2,9	3,2
P	0,1	0,25	0,27	0,13	0,15	0,07	0,03

17.

X	100	114	125	128	144	157	160
P	0,2	0,25	0,23	0,17	0,15	0,08	0,02

18.

X	45	53	61	67	78	80	95
P	0,12	0,17	0,22	0,25	0,16	0,07	0,01

19.

X	25	37	45	60	68	75	98
P	0,015	0,085	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

20.

X	60	75	77	80	105	108	110
P	0,005	0,13	0,225	0,375	0,125	0,09	0,05

21.

X	10	13	16	17	20	25	26
P	0,1	0,3	0,3	0,1	0,13	0,05	0,02

22.

X	8	11	14	16	17	20	23
P	0,02	0,06	0,1	0,22	0,2	0,3	0,1

23.

X	20	24	29	33	34	36	37
P	0,1	0,17	0,25	0,16	0,12	0,1	0,1

24.

X	14	15	17	21	25	26	31
P	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1	0,04	0,01

25.

X	16	19	20	23	25	30	35
P	0,08	0,12	0,15	0,3	0,15	0,11	0,09

26.

X	0	1,5	1,9	2,3	2,5	2,9	3,2
P	0,1	0,15	0,25	0,3	0,15	0,03	0,02

27.

X	100	107	114	128	144	160
P	0,1	0,12	0,37	0,22	0,05	0,14

28.

X	45	53	67	78	80	95
P	0,15	0,3	0,25	0,2	0,09	0,01

29.

X	25	45	60	75	87	98
P	0,12	0,27	0,29	0,21	0,1	0,01

30.

X	160	170	175	180	105	110
P	0,05	0,15	0,22	0,33	0,2	0,05

31.

X	86	88	90	98	99	100
P	0,02	0,18	0,2	0,33	0,17	0,1

32.

X	16	17	18	19	20	21
P	0,01	0,19	0,29	0,35	0,15	0,01

Построить графики следующих функций распределения. Определить вероятность того, что случайная величина попадёт в интервал $(0{,}5;\,0{,}6)$ для каждой из них.

31. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}, & -1<x\le \frac{1}{3};\\ 1, & x>\frac{1}{3}.\end{cases}$

32. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ x-1, & 1<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$

33. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^2, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$

34. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin x, & 0<x\le \pi/2;\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}$

35. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ 0{,}5+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{2}, & -2<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$

36. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{16}{25}x^2, & 0<x\le \frac{5}{4};\\ 1, & x>\frac{5}{4}.\end{cases}$

37. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin 2x, & 0<x\le \pi/4;\\ 1, & x>\pi/4.\end{cases}$

38. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ 0{,}5x-1, & 2<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$

39. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-\cos x, & 0<x\le \pi/2;\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}$

40. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \frac{1}{6}(x^2-x), & 1<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$

41. $F(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$

42. $F(x)=\begin{cases}e^{2x}, & x\le 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$

43. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \ln x, & 1<x\le e;\\ 1, & x>e.\end{cases}$

44. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^2/e^2, & 0<x\le e;\\ 1, & x>e.\end{cases}$

45. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{x^3-x}{60}, & 1<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$

46. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3;\\ \dfrac{x^4-81}{175}, & 3<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$

47. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{64}{49}x^2, & 0<x\le \dfrac{7}{8};\\ 1, & x>\dfrac{7}{8}.\end{cases}$

48. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{x^3+8}{16}, & -2<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$

49. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-e^{-2x}, & x>0.\end{cases}$

50. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-e^{-x}, & x>0.\end{cases}$

Контрольные вопросы

1. Что называется функцией распределения случайной величины?
2. Какая случайная величина называется непрерывной?
3. Какими свойствами обладает функция распределения случайной величины?
4. Какой функцией является функция распределения дискретной случайной величины?
5. Чем характеризуется функция распределения непрерывной случайной величины?
6. Докажите монотонность изменения функции распределения.
7. Как найти функцию распределения дискретной случайной величины по заданному закону её распределения?
8. Как составить закон распределения дискретной случайной величины по её функции распределения?
9. Чему равна вероятность принятия конкретного значения для непрерывной случайной величины?
10. В каком промежутке лежат значения функции распределения?
11. Какие предельные соотношения справедливы для функции распределения?
12. Как найти вероятность того, что случайная величина примет значения из некоторого интервала?
13. Чем отличаются термины "функция распределения" и "интегральная функция распределения"?

14. Чем характеризуется линия, изображающая график функции распределения дискретной случайной величины?

15. Чем характеризуется линия, изображающая график непрерывной случайной величины?

16. Чему равно минимальное значение функции распределения?

17. В каких пределах изменяется функция распределения?

18. Чему равно максимальное значение функции распределения?

19. Определить вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $(-1; 0{,}5)$, если ее интегральная функция распределения равна

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ 0{,}4, & -1 < x \le 0{,}6; \\ 1, & x > 0{,}6. \end{cases}$$

20. Определить вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $(-0{,}2; 0{,}6)$, если ее интегральная функция распределения равна

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0{,}5, & 0 < x \le 0{,}6; \\ 1, & x > 0{,}6. \end{cases}$$

1.8. Плотность распределения

Производная от функции распределения $F(x)$

$$f(x) = F'(x),$$

называется ***плотностью распределения*** $f(x)$ случайной величины X.

Плотность распределения существует только для непрерывных случайных величин. Для описания распределения дискретной случайной величины плотность распределения вероятности неприменима.

График плотности распределения называют ***кривой распределения***.

Свойства плотности распределения

1. Плотность распределения неотрицательна:

$$f(x) \ge 0.$$

Это следует из того, что $F(x)$ – неубывающая функция.

2. Вероятность попадания значения случайной величины X в интервал $[a,b]$ равна

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx .$$

3. Функция распределения $F(x)$ выражается через плотность $f(x)$ по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx .$$

4. Несобственный интеграл от плотности распределения в бесконечных пределах равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 .$$

Если все возможные значения случайной величины находятся на отрезке $[a,b]$, то, очевидно,

$$\int_a^b f(x)dx = 1 .$$

Задачи

Найти плотность распределения случайной величины по заданной функции распределения

1. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{64}{49}x^2, & 0 < x \le \dfrac{7}{8}; \\ 1, & x > \dfrac{7}{8}. \end{cases}$

2. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \dfrac{x^3+8}{16}, & -2 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

3. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -1; \\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}, & -1 < x \le \dfrac{1}{3}; \\ 1, & x > \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

4. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1; \\ x-1, & 1 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

5. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^2, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$ 6. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin x, & 0<x\le \pi/2;\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}$

7. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ 0{,}5+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{2}, & -2<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$ 8. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-\cos x, & 0<x\le \pi/2,\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}$

9. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin 2x, & 0<x\le \pi/4;\\ 1, & x>\pi/4.\end{cases}$ 10. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ 0{,}5x-1, & 2<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$

11. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{16}{25}x^2, & 0<x\le \dfrac{5}{4};\\ 1, & x>\dfrac{5}{4}.\end{cases}$ 12. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{1}{6}(x^2-x), & 1<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$

13. $F(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$ 14. $F(x)=\begin{cases}e^{2x}, & x\le 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$

15. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \ln x, & 1<x\le e;\\ 1, & x>e.\end{cases}$ 16. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^2/e^2, & 0<x\le e;\\ 1, & x>e.\end{cases}$

17. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-e^{-2x}, & x>0.\end{cases}$ 18. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-e^{-x}, & x>0.\end{cases}$

19. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{x^3-x}{60}, & 1<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$ 20. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3;\\ \dfrac{x^4-81}{175}, & 3<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$

21. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на всей оси OX равенством $f(x)=\dfrac{2C}{1+x^2}$. Найти постоянный параметр C.

В следующих заданиях задана плотность распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины X. Найти функцию распределения $F(x)$.

22. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \cos x, & 0<x\le \pi/2;\\ 0, & x>\pi/2.\end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin x, & 0<x\le \pi/2;\\ 0, & x>\pi/2.\end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ x-0{,}5, & 1<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le \pi/6;\\ 3\sin 3x, & \pi/6<x\le \pi/3;\\ 0, & x>\pi/3.\end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{3x^2-2x}{48}, & 1<x\le 4;\\ 0, & x>4.\end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{32}{25}x, & 0<x\le 1{,}25;\\ 0, & x>1{,}25.\end{cases}$

28. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0{,}25x^3, & 0<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{1}{x}, & 1<x\le e;\\ 0, & x>e.\end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{2x-2}{25}, & 1<x\le 6;\\ 0, & x>6.\end{cases}$

31. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{3x^2}{16}, & -2<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$

32. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на всей оси OX равенством $f(x)=\dfrac{4C}{e^x+e^{-x}}$. Найти постоянный параметр C.

33. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на интервале $(0;\pi/2)$ равенством $f(x) = C\sin 2x$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

34. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на интервале $(0;1)$ равенством $f(x) = C\operatorname{arctg} x$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

35. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на интервале $(1;2)$ равенством $f(x) = \dfrac{1}{C-1}$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

36. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на промежутке $\left[\dfrac{3-C}{2};\dfrac{3+C}{2}\right]$ равенством $f(x) = 2$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

37. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на промежутке $(5;8]$ равенством $f(x) = C$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

38. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на промежутке $(C;4]$ равенством $f(x) = 5$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

39. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на промежутке $(C;15]$ равенством $f(x) = 3$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

40. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на промежутке $(1;10]$ равенством $f(x) = 2C$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

Контрольные вопросы

1. Что называют плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины?
2. Как найти вероятность того, что непрерывная случайная величина принимает значение, принадлежащее интервалу (a,b)?
3. Какими свойствами обладает плотность распределения?
4. Как найти плотность распределения по функции распределения?
5. Как найти функцию распределения по плотности распределения?
6. Какова область изменения плотности распределения?
7. Какой может быть область изменения функции плотности распределения?
8. Что такое плотность вероятностей?

9. Как определить дифференциальную функцию распределения?

10. Чему равен несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до ∞?

11. На основе какого свойства плотности распределения можно находить значения её параметра?

12. Как вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал (a,b), используя функцию распределения?

13. Как вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал (a,b), используя функцию плотности распределения?

14. Для каких случайных величин вводится понятие плотности распределения?

15. Можно ли по виду функции плотности распределения судить о значениях, принимаемых случайной величиной?

16. Возможно ли построить функцию плотности распределения для дискретной случайной величины?

17. Объясните вероятностный смысл плотности распределения.

18. Запишите плотность вероятности для равномерного закона распределения случайной величины.

1.9. Числовые характеристики случайной величины

Любая форма закона распределения случайной величины, например, самая универсальная – функция распределения, полностью определяет случайную величину с вероятностной точки зрения. Существуют более простые, хотя и менее исчерпывающие, характеристики случайной величины, в определенной мере характеризующие её существенные черты, например, среднее значение или степень разбросанности значений относительно среднего. Такие характеристики, назначение которых – выразить числом наиболее существенные особенности распределения, называются числовыми характеристиками случайной величины.

В теории вероятностей основными числовыми характеристиками случайной величины являются её математическое ожидание и дисперсия.

Математическим ожиданием случайной величины называется число, которое обозначается m_x или $M(X)$ и вычисляется по формулам:

– для дискретной случайной величины $X=(x_1;x_2;\ldots;x_n)$

$$m_x=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i ,$$

где $p_i=P(X=x_i)$;

– для непрерывной случайной величины X с плотностью распределения $f(x)$

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx .$$

Математическое ожидание определяет значение случайной величины, около которого группируются все её возможные значения, и имеет определенную связь со средним арифметическим наблюдаемых значений при большом числе опытов. Эта связь того же рода, что и связь между относительной частотой и вероятностью, а именно: при большом числе опытов среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины приближается (сходится по вероятности) к её математическому ожиданию.

Рассмотрим пример нахождения математического ожидания для ряда дискретных значений.

На рисунке 1 представлен ряд дискретных значений, причём в левом столбце представлены значения, а в правом – их вероятности.

Для нахождения математического ожидания представленного ряда значений дискретной случайной величины X вводим формулу:

=СУММПРОИЗВ(A2:A11;B2:B11).

Результат вычислений математического ожидания помещён в ячейку B13.

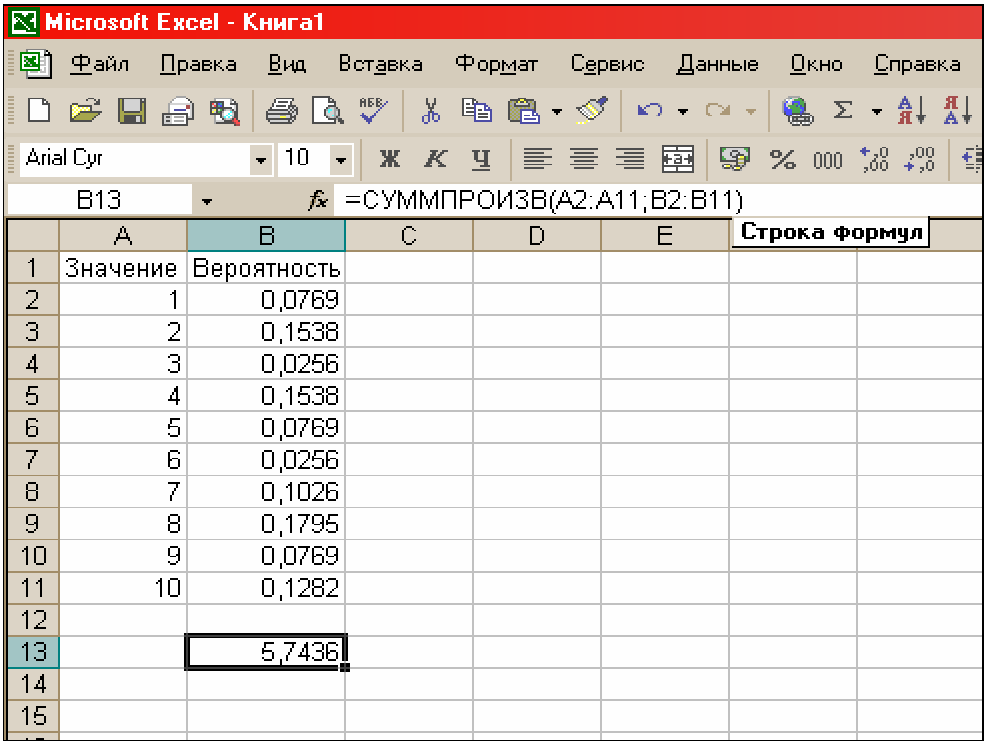


Рис. 1

Математическое ожидание числа появления события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании:

$$M(X) = np.$$

Дисперсией случайной величины называется число, которое обозначается σ_x^2 или $D(X)$ и вычисляется по формулам:

– для дискретной случайной величины

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 \cdot p_i ;$$

– для непрерывной случайной величины

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x)dx .$$

Вычисление дисперсии можно производить по формуле

$$D(X) = M(X^2) - m_x^2,$$

где $M(X^2)$ – математическое ожидание квадрата случайной величины.

Для дискретной случайной величины

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i ;$$

для непрерывной случайной величины

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx .$$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины.

Дисперсия позволяет оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг её среднего значения. Дисперсия случайной величины есть неслучайная (постоянная) величина.

Дисперсия числа появления события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании:

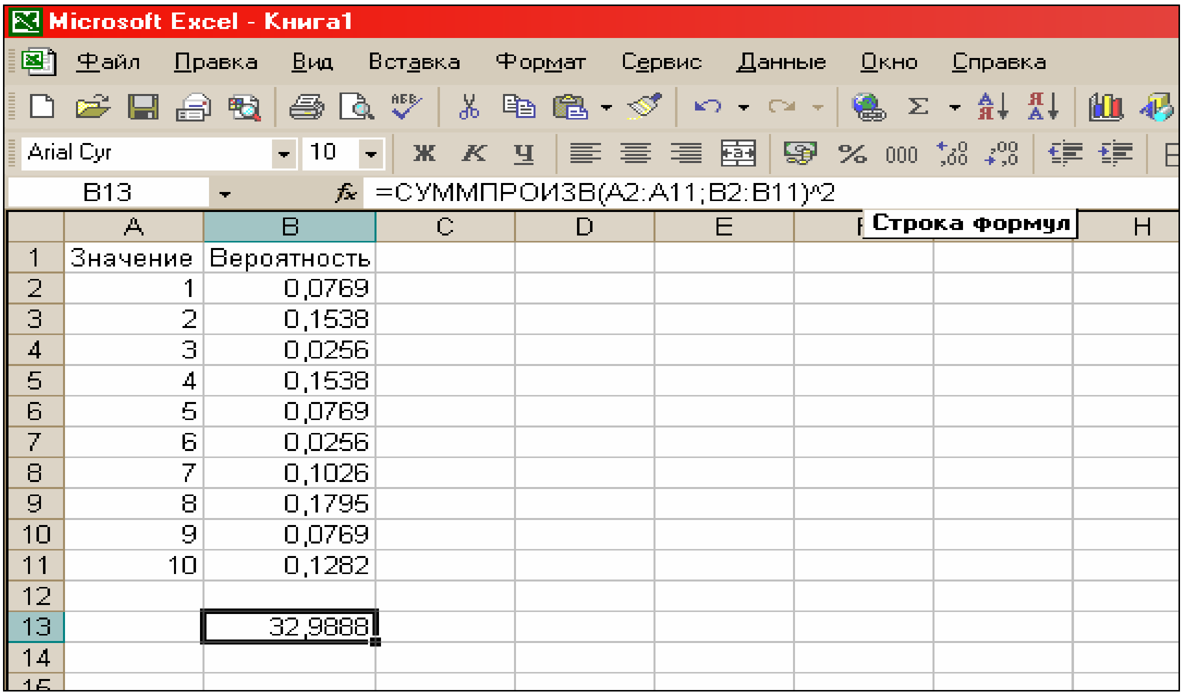
$$D(X) = npq.$$

Рассмотрим пример нахождения дисперсии случайной величины.

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулой

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

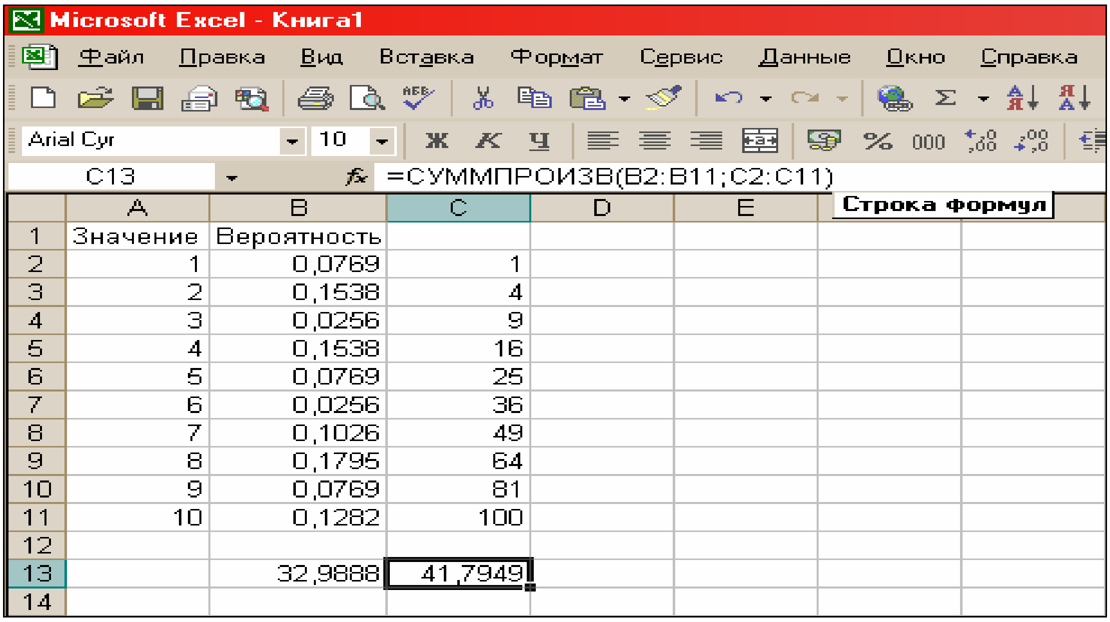
Найдём математическое ожидание и возведём его в квадрат (рис. 2). Результат вычислений представлен в ячейке B13:



	A	B
1	Значение	Вероятность
2	1	0,0769
3	2	0,1538
4	3	0,0256
5	4	0,1538
6	5	0,0769
7	6	0,0256
8	7	0,1026
9	8	0,1795
10	9	0,0769
11	10	0,1282
12		
13		32,9888

Рис. 2

Теперь найдём $M(X^2)$. Для этого значения случайной величины возведём в квадрат и запишем эти значения в столбец C. Затем найдём математическое ожидание для случайной величины X^2. Результат вычислений представлен в ячейке C13 (рис. 3):



	A	B	C
1	Значение	Вероятность	
2	1	0,0769	1
3	2	0,1538	4
4	3	0,0256	9
5	4	0,1538	16
6	5	0,0769	25
7	6	0,0256	36
8	7	0,1026	49
9	8	0,1795	64
10	9	0,0769	81
11	10	0,1282	100
12			
13		32,9888	41,7949

Рис. 3

После этого, согласно формуле $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$, достаточно вычислить разность между значениями ячеек C13 и B13. В нашем случае дисперсия равна 8,8061.

Свойства математического ожидания и дисперсии

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой этой постоянной:

$$M(C) = C.$$

2. Постоянную величину можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = CM(X).$$

3. Математическое ожидание от суммы или разности случайных величин равно сумме или разности их математических ожиданий:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y);$$

$$M(X-Y) = M(X) - M(Y).$$

4.Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$M(XY) = M(X)M(Y);$$

5. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

6. Постоянную величину можно выносить за знак дисперсии, возведя её в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

7. Дисперсия от суммы или разности случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

В теории вероятностей используют характеристику разброса значений случайной величины относительно её среднего значения

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\sigma_x^2},$$

которая называется **средним квадратическим отклонением** и имеет размерность случайной величины.

Дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины, а математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение – ту же размерность, что и случайная величина.

Модой $M_0(X)$ дискретной случайной величины X называют её наиболее вероятное значение.

Модой $M_0(X)$ непрерывной случайной величины X называют то её возможное значение, которому соответствует локальный максимум плотности распределения.

Медианой $M_e(X)$ случайной величины X называют то её возможное значение, которое определяется равенством

$$P[X < M_e(X)] = P[X > M_e(X)].$$

Медиана обычно не определяется для дискретной случайной величины. Геометрически медиану для непрерывно распределенной случайной величины можно истолковать как точку, в которой ордината $f(x)$ делит площадь, ограниченную кривой распределения, пополам.

Задачи

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины *X*, заданной одним из следующих законов распределения:

1.

X	10	13	17	20	25
P	0,4	0,3	0,1	0,15	0,05

2.

X	8	14	17	20	23
P	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

3.

X	20	24	29	34	37
P	0,2	0,3	0,25	0,15	0,1

4.

X	14	15	17	25	26
P	0,1	0,35	0,3	0,2	0,05

5.

X	16	20	25	30	35
P	0,2	0,15	0,15	0,3	0,2

6.

X	0	1,5	1,9	2,5	2,9
P	0,1	0,25	0,35	0,25	0,05

7.

X	100	114	128	144	160
P	0,2	0,35	0,2	0,15	0,1

8.

X	45	53	67	80	95
P	0,25	0,3	0,25	0,19	0,01

9.

X	25	45	60	75	98
P	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

10.

X	60	75	80	105	110
P	0,05	0,25	0,45	0,15	0,1

11.

X	1	2	3	7	9	10	12
P	0,04	0,26	0,31	0,09	0,18	0,11	0,01

12.

X	6	8	14	17	19	20	23
P	0,1	0,11	0,14	0,17	0,18	0,22	0,08

13.

X	20	24	28	30	34	37	40
P	0,1	0,23	0,25	0,18	0,13	0,08	0,03

14.

X	10	13	15	17	25	27	29
P	0,1	0,12	0,23	0,3	0,17	0,05	0,03

15.

X	8	16	18	20	25	30	35
P	0,01	0,17	0,19	0,26	0,15	0,12	0,1

16.

X	0,5	1,5	1,9	2,3	2,5	2,9	3,2
P	0,1	0,25	0,27	0,13	0,15	0,07	0,03

17.

X	100	114	125	128	144	157	160
P	0,1	0,25	0,23	0,17	0,15	0,08	0,02

18.

X	45	53	61	67	78	80	95
P	0,12	0,17	0,22	0,25	0,16	0,07	0,01

19.

X	25	37	45	60	68	75	98
P	0,015	0,085	0,125	0,17	0,3	0,2	0,1

20.

X	60	75	77	80	105	108	110
P	0,005	0,13	0,225	0,375	0,125	0,09	0,05

21.

X	10	13	16	17	20	25	26
P	0,1	0,3	0,3	0,1	0,13	0,05	0,02

22.

X	8	11	14	16	17	20	23
P	0,02	0,06	0,1	0,22	0,2	0,3	0,1

23.

X	20	24	29	33	34	36	37
P	0,1	0,17	0,25	0,16	0,12	0,1	0,1

24.

X	14	15	17	21	25	26	31
P	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1	0,04	0,01

25.

X	16	19	20	23	25	30	35
P	0,08	0,12	0,15	0,3	0,15	0,11	0,09

26.

X	0	1,5	1,9	2,3	2,5	2,9	3,2
P	0,1	0,15	0,25	0,3	0,15	0,03	0,02

27.

X	100	107	114	128	144	160
P	0,1	0,12	0,37	0,22	0,05	0,14

28.

X	45	53	67	78	80	95
P	0,15	0,3	0,25	0,2	0,09	0,01

29.

X	25	45	60	75	87	98
P	0,12	0,27	0,29	0,21	0,1	0,01

30.

X	160	170	175	180	105	110
P	0,05	0,15	0,2	0,35	0,15	0,1

31. Дискретная случайная величина принимает три возможных значения: $x_1 = 5$ с вероятностью $p_1 = 0,5$; $x_2 = 8$ с вероятностью $p_2 = 0,3$; x_3 с вероятностью p_3. Найти значения величин x_3 и p_3, зная, что математическое ожидание случайной величины $M(X) = 7$.

32. Возможные значения дискретной случайной величины $x_1 = -1; x_2 = 0; x_3 = 1$, а математические ожидания этой величины и её квадрата равны соответственно: $M(X) = 0,1;\ M(X^2) = 0,9$. Найти закон распределения этой случайной величины и её функцию распределения.

33. Для каждого из вариантов задания найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = 4X + 5Y$, если известны математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$ и дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$ случайных величин X и Y:

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$M(X)$	15	3,4	103	19	25	11	46	39	93	74	45	14	12	20	54
$M(Y)$	61	4,6	321	31	54	90	68	32	22	27	41	17	8	31	50
$D(X)$	0,02	7,1	32	2,4	6,8	0,2	8	3	4,1	0,8	5	4	2	0,3	5,8
$D(Y)$	0,04	1,2	46	1,1	7,7	0,4	2	4	3,3	0,1	3	8	6	0,1	8,7

34. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = 3X - 2Y$, если известны математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y:

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$M(X)$	32	25	112	34	55	46	73	54	123	236	46	24	53	167	41
$M(Y)$	16	127	57	13	67	37	112	33	101	213	78	93	45	321	57
$D(X)$	4	12	42	23	3	2	11	14	13	17	5	11	3	34	3
$D(Y)$	6	19	12	40	4	6	21	15	17	6	8	9	6	67	5

35. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = 7X + 4Y$, если известны математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y:

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$M(X)$	3,5	2,3	4,8	9,4	5,5	5	3,9	8,5	4,3	6,5	2,1	5,4	7,1	8,7	3
$M(Y)$	2,7	2,1	8,6	2,3	7,7	7	1,1	2,8	9,5	2,7	2,9	4,7	2,7	3,3	2
$D(X)$	0,1	0,4	0,2	1,1	0,3	1	2,1	1,4	1,3	0,4	0,1	0,6	0,3	0,6	1
$D(Y)$	0,5	0,3	0,9	1,9	0,2	5	3,5	0,5	1,8	0,6	0,5	0,5	1,5	1,3	5

36. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = 6X - 3Y$, если известны математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y:

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$M(X)$	23	51	12	37	54	416	43	59	196	316	61	14	73	163	98
$M(Y)$	56	207	57	18	69	317	135	38	185	231	75	9	45	311	37
$D(X)$	3	21	42	29	7	4	27	31	28	25	6	11	3	34	8
$D(Y)$	7	17	12	42	2	3	33	56	57	63	3	5	7	55	4

37. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = 8X - 5Y + 4$, если известны математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y:

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$M(X)$	54	31	12	82	54	168	43	59	106	116	81	14	33	113	68
$M(Y)$	87	17	57	18	69	217	135	38	185	231	55	79	45	311	47
$D(X)$	2	5	22	15	7	4	27	31	28	25	6	10	4	84	11
$D(Y)$	8	7	11	5	2	3	33	56	57	63	3	5	6	95	19

38. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = 4X - 9Y + 5$, если известны математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y:

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$M(X)$	6,5	9,3	8,8	9,8	8,5	9	7,9	8,7	4,3	7,5	5,1	5,4	7,8	8,7	11
$M(Y)$	8,7	8,1	8,4	2,6	9,7	5	9,1	2,4	5,5	9,6	2,4	4,6	2,3	3,7	12
$D(X)$	0,5	0,9	0,3	1,4	1,3	3	1,1	1,2	0,3	0,6	0,8	0,2	0,9	0,6	3
$D(Y)$	0,4	0,5	0,3	1,2	2,2	4	4,5	0,3	0,8	0,2	0,5	0,7	1,3	1,8	8

39. Возможные значения дискретной случайной величины $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$, а математические ожидания этой величины и её квадрата равны соответственно: $M(X) = 2{,}3$; $M(X^2) = 5{,}9$. Найти закон распределения этой случайной величины и её функцию распределения.

40. Дискретная случайная величина имеет два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что случайная величина примет значение x_1, равна 0,3. Найти закон распределения случайной величины, зная математическое ожидание $M(X) = 4{,}8$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = 0{,}9$.

41. Найти моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*, заданной в интервале $(3;5)$ плотностью распределения $f(x) = -\,0{,}75x^2 + 6x - 11{,}25$, а вне этого интервала плотностью распределения $f(x) = 0$.

42. Случайная величина *X* задана плотностью распределения $f(x) = 2\cos\, x$ в интервале $(0;\pi/4)$, а вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

43. Найти моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*, заданной в интервале $(2;4)$ плотностью распределения $f(x) = -0{,}75x^2 + 4{,}5x - 6$, а вне этого интервала $f(x) = 0$.

44. Случайная величина *X* задана плотностью распределения $f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}}$ в интервале $(-1;\,1)$, а вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

45. Найти моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*, заданной при $x \ge 0$ плотностью распределения $f(x) = \dfrac{n}{x_0} x^{n-1} e^{-x^n/x_0}$, а при $x < 0$ плотностью распределения $f(x) = 0$.

46. Случайная величина *X* в интервале $(-3;\,3)$ задана плотностью распределения $f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{9 - x^2}}$, а вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*. Какое значение вероятнее: $X < 1$ или $X > 1$?

47. Найти моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*, заданной при $0 < x \le 5$ плотностью распределения $f(x) = 0{,}08x$, а вне промежутка $f(x) = 0$.

48. Найти моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ 0{,}25x+0{,}5, & -2<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

49. Найти моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0{,}5-0{,}5\cos x, & 0<x\le \pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

50. Найти моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}1-x_0^3/x^3, & x\ge x_0\ (x_0>0);\\ 0, & x<x_0.\end{cases}$$

Контрольные вопросы

1. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины?
2. Свойства математического ожидания.
3. Что называется дисперсией дискретной случайной величины?
4. Запишите свойства дисперсии.
5. Запишите формулу вычисления дисперсии.
6. Что называется средним квадратическим отклонением?
7. Доказать, что математическое ожидание числа появлений события A в одном испытании равно вероятности появления p события A.
8. Доказать, что математическое ожидание дискретной случайной величины X – числа появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p – равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании, т. е. доказать, что $M(X)=np$.
9. Доказать, что $M(Y)=aM(X)+b$, если $Y=aX+b$.

10. Доказать, что $M(X - M(X)) = 0$.

11. Доказать, что $M(M(X)) = M(X)$.

12. Доказать, что математическое ожидание дискретной случайной величины заключено между наименьшим и наибольшим её возможными значениями.

13. Доказать, что если случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ независимы, положительны и одинаково распределены, то

$$M\left(\frac{X_1}{X_1 + X_2 + ... + X_n}\right) = \frac{1}{n}.$$

14. Дискретная случайная величина имеет два возможных равновероятных значения x_1 и x_2. Доказать, что дисперсия дискретной случайной величины равна квадрату полуразности её возможных значений:

$$D(X) = \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2.$$

15. Доказать, что если X и Y – независимые случайные величины, то для их дисперсий справедливо равенство

$$D(XY) = D(X) \cdot D(Y) + n^2 D(X) + m^2 D(Y),$$

где $m = M(X), n = M(Y)$.

16. Доказать, что математическое ожидание непрерывной случайной величины заключено между её наименьшим и наибольшим значениями.

17. Случайная величина задана плотностью распределения $f(x) = 0{,}5e^{-|x|}$. Найти математическое ожидание случайной величины.

18. Случайная величина задана плотностью распределения $f(x) = 0{,}5e^{-|x|}$. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

19. Случайная величина задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x \le b; \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины.

20. Случайная величина задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

21. Докажите, что для одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин математическое ожидание их среднего арифметического равно математическому ожиданию каждой из них.

22. Докажите, что для одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин дисперсия их среднего арифметического в n раз меньше дисперсии каждой из этих величин.

23. Докажите, что для одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин среднее квадратическое отклонение их среднего арифметического в $\sqrt{n}$ раз меньше среднего квадратического отклонения каждой из этих величин.

24. Что называется центральным теоретическим моментом случайной величины? Дайте примеры.

25. Что называется начальным теоретическим моментом случайной величины? Назовите примеры.

1. 10. Специальные законы распределения

Биномиальное распределение

По биномиальному закону распределяется дискретная случайная величина $X(0;1;2;3;\ldots;m;\ldots;n)$, значения которой представляют число появлений события A при n независимых испытаниях, когда $P(A)=p$, $P(\overline{A})=1-p=q$. При этом вероятности $p_m=P(X=m)=P_n(m)$ вычисляются по формуле Бернулли. Такое распределение называется **биномиальным**, в связи с тем, что вероятности $P(X=m)$ по форме представляют собой члены разложения бинома

$$(p+q)^n=C_n^0p^0q^n+C_n^1p^1q^{n-1}+C_n^2p^2q^{n-2}+\ldots+$$

$$+C_n^mp^mq^{n-m}+\ldots+C_n^np^nq^0=\sum_{m=0}^{n}C_n^mp^mq^{n-m}.$$

Из последнего равенства следует, что сумма вероятностей значений случайной величины, распределенной по биномиальному закону, равна единице, так как

$$p + q = 1.$$

Математическое ожидание биномиального закона равно

$$M(X) = np.$$

Дисперсия для биномиального закона распределения равна

$$D(X) = npq,$$

а среднее квадратическое отклонение равно

$$\sigma_x = \sqrt{npq}.$$

Распределение Пуассона

По закону Пуассона распределена дискретная случайная величина $X(0;1;2;3;\ldots;m;\ldots)$, вероятность значений которой $P(X = m) = P_a(m)$ определяется формулой

$$P_a(m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

где a – положительное число, которое называется параметром Пуассона. Формулой определяется семейство законов Пуассона, определяемое параметром a.

Значение плотности распределения Пуассона $\dfrac{e^{-a} a^m}{m!}$ вычисляется при помощи функции

ПУАССОН(m;a;ЛОЖЬ).

При любом значении параметра a сумма вероятностей всех возможных значений равна единице:

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_a(m) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} = e^{-a} \cdot e^{a} = 1.$$

Математическое ожидание пуассоновского распределения равно

$$M(X) = a.$$

Дисперсия для распределения по закону Пуассона равна

$$D(X) = a.$$

К распределению Пуассона приводятся задачи простейшего потока событий.

Значение функции распределения Пуассона $\sum_{k=0}^{m} \frac{e^{-a} a^m}{k!}$ вычисляется при помощи функции

ПУАССОН(m;a;ИСТИНА).

Потоком событий называется последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени. **Простейшим** – пуассоновским – называется поток событий, который обладает свойствами стационарности, отсутствия последействия и ординарности.

Свойство стационарности характеризуется тем, что вероятность появления m событий потока на любом промежутке времени зависит только от числа m и от длительности t промежутка времени.

Свойство отсутствия последействия характеризуется тем, что вероятность появления m событий потока на любом промежутке времени длительностью t не зависит от того, появились или не появились события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка.

Свойство ординарности характеризуется тем, что вероятность появления более одного события за малый промежуток времени пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления только одного события.

Интенсивностью потока называется среднее число событий, появляющихся в единицу времени.

Вероятность $P_t(m)$ появления m событий простейшего потока интенсивностью λ за время, длительностью t, определяется по формуле Пуассона

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}.$$

Пример. Среднее число заказов билетов, поступающих кассиру в одну минуту, равно трём. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит: а) четыре заказа; б) менее четырёх заказов; в) не менее четырёх заказов.

Решение. По условию, $\lambda = 3$, $t = 2$, $k = 4$.

а) Искомая вероятность того, что за 2 минуты поступит четыре вызова по формуле Пуассона

$$P_2(4) = \frac{6^4 \cdot e^{-6}}{4!} = \frac{1296 \cdot 0{,}0025}{24} = 0{,}135.$$

б) Событие "поступило менее четырёх заказов" произойдет, если наступит одно из следующих несовместных событий: 1) поступило три заказа; 2) поступило два заказа; 3) поступил один заказ; 4) не поступило ни одного заказа. Эти события несовместны, поэтому применима теорема сложения вероятностей несовместных событий:

$$P_2(k<4)=P_2(3)+P_2(2)+P_2(1)+P_2(0)=\frac{6^3\cdot e^{-6}}{3!}+\frac{6^2\cdot e^{-6}}{2!}+\frac{6\cdot e^{-6}}{1!}+e^{-6}=$$

$$=e^{-6}(36+18+6+1)=0{,}0025\cdot 61=0{,}1525.$$

в) События "поступило менее четырёх заказов" и "поступило не менее четырёх заказов" противоположны, поэтому искомая вероятность того, что за 2 минуты поступит не менее четырёх заказов,

$$P_2(k\geq 4)=1-P_2(k<4)=1-0{,}1525=0{,}8475.$$

Равномерное распределение

Равномерным называют распределение непрерывной случайной величины, если все значения её лежат внутри некоторого интервала и все они равновероятны.

Плотность вероятности равномерного распределения на интервале (a,b) определяется формулой

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leq a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\leq b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Функция распределения задается формулой

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\leq b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

Математическое ожидание равномерного закона равно

$$M(X)=\frac{a+b}{2}.$$

Дисперсия равномерного закона равна

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},$$

а среднее квадратическое отклонение равно

$$\sigma_x=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Показательное распределение

Показательным – экспоненциальным – называется распределение непрерывной случайной величины, плотность распределения которой

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x\geq 0,\end{cases}$$

где λ – положительное число.

Значение плотности показательного распределения $\lambda e^{-\lambda x}$ вычисляется с помощью функции

ЭКСПРАСП(x; λ; ЛОЖЬ).

При любом λ выполняется необходимое условие закона распределения: интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{0}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty}=-(0-1)=1.$$

Функция распределения показательного закона имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x\geq 0.\end{cases}$$

Значение функции показательного распределения $G(x)=1-e^{-\lambda x}$ вычисляется с помощью функции

ЭКСПРАСП(x; λ; ИСТИНА).

Математическое ожидание показательного закона равно

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Дисперсия показательного закона равна

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2},$$

а среднее квадратическое отклонение равно

$$\sigma_x=\frac{1}{\lambda}.$$

К показательному закону приводит задача о распределении вероятности случайной величины T – промежутка времени t между последовательными событиями в простейшем потоке событий. Функция распределения этой случайной величины при $t < 0$ принимает значение, равное нулю, а при $t \geq 0$

$$F(t) = P(T < t) = P(0 < T < t) = P_t(m \geq 1) = 1 - P_t(0),$$

где $P_t(0) = e^{-\lambda t}$.

Следовательно,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \quad t \geq 0, \end{cases}$$

то есть промежуток времени t между последовательными событиями простейшего потока имеет показательное распределение.

Показательное распределение используется для вычисления надёжности работы элемента (простого или сложного), если последовательность отказов образует простейший поток событий с интенсивностью λ. В этом случае при $t \geq 0$ $F(t) = P(T < t)$ определяет вероятность отказа за время длительностью t. Следовательно, вероятность безотказной работы за это же время равна

$$R(t) = P(T \geq t) = 1 - F(t).$$

Функция $R(t) = 1 - F(t)$ называется **функцией надёжности**.

При показательном распределении $R(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$, то есть

$$R(t) = e^{-\lambda t}.$$

Функция $R(t)$, определяемая равенством, называется **показательным законом надёжности**.

Пример. Время безотказной работы элемента распределено по показательному закону $f(t) = 0{,}02e^{-0{,}02t}$ (t – время в часах). Найти вероятность безотказной работы элемента в течение 100 часов.

Решение. Интенсивность отказов $\lambda = 0{,}02$. Вычислим вероятность безотказной работы элемента в течение 100 часов:

$$R(100) = e^{-0{,}02 \cdot 100} = e^{-2} = 0{,}13534 \approx 0{,}14.$$

Значение показательного значения надёжности $R(100) = e^{-0{,}02 \cdot 100}$ может быть вычислено следующим способом:

$$R(100) = 1 - \text{ЭКСПРАСП(100; –0,02; ИСТИНА)}$$

Нормальное распределение

Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, плотность распределения которой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

где m, σ – параметры нормального распределения, при этом $\sigma > 0$.

Параметры нормального распределения постоянные величины.

Кривая нормального распределения имеет холмообразный вид, симметричный относительно $x = m$. Максимальная ордината кривой, равная $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, соответствует точке $x = m$. По мере удаления от точки m плотность распределения убывает, и при $x \to \pm\infty$ кривая распределения асимптотически приближается к оси абсцисс.

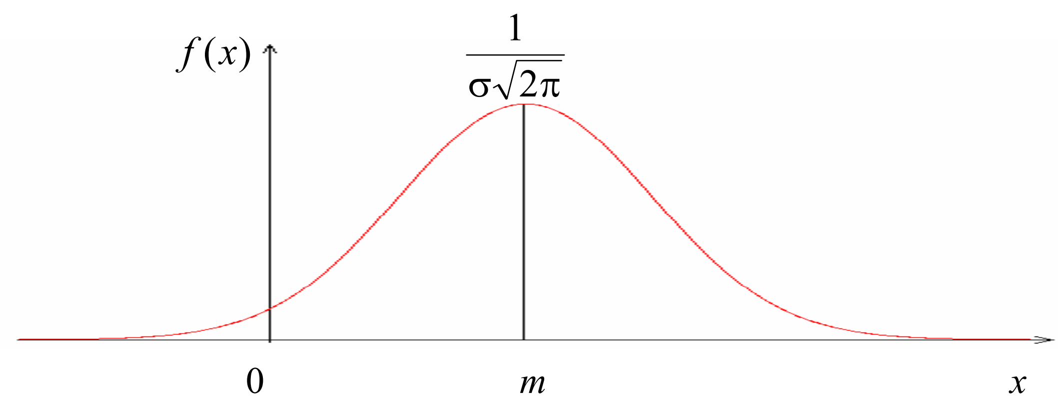


Рис. 4

Площадь под кривой распределения равна единице.

Параметр m представляет собой математическое ожидание нормального распределения.

Параметр σ – среднее квадратическое отклонение нормального распределения.

Дисперсия нормального закона равна

$$D(X) = \sigma^2.$$

Функция нормального распределения

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx .$$

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины на интервал $(a;b)$ равна

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a).$$

Вероятность $P(|X-m|<l)$ попадания нормально распределенной случайной величины на участок длиной $2l$, симметричный относительно центра рассеивания m, можно вычислить по формуле

$$P(|X-m|<l)=P(m-l<X<m+l)=F(m+l)-F(m-l).$$

Правило трёх сигм. Вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины от математического ожидания превысит утроенное среднее квадратическое отклонение, равна

$$P(|X-m|>3\sigma)=1-0{,}9973=0{,}0027 .$$

Это означает, что лишь в 0,27 % случаев может произойти отклонение, большее чем 3σ. Такие события можно считать практически невозможными.

Всё это означает, что для нормально распределённой случайной величины всё рассеивание, с точностью до долей процента, укладывается на участке $m\pm 3\sigma$.

Таким образом, по известным математическому ожиданию и среднему квадратическому отклонению случайной величины ориентировочно можно указать интервал её практически возможных значений. Такой способ оценки интервала возможных значений называется "правилом трёх сигм". Из этого правила следует также ориентировочный способ определения среднего квадратического отклонения случайной величины: берут максимальное практически возможное отклонение от среднего и делят его на три. Этот грубый способ рекомендуется, если нет других, более точных, способов определения σ.

Для нахождения значения функции нормального распределения для значения *x* при известных среднем и стандартном отклонении используется функция НОРМРАСП(*x*; среднее; стандартное отклонение; ИСТИНА).

$$\text{НОРМРАСП}(x;\ m;\ \sigma;\ \text{ИСТИНА})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\left(\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)} .$$

В случае нахождения значения функции плотности распределения последний аргумент равен значению "ЛОЖЬ".

Задачи

1. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 минут.

2. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,3. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчёте будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.

3. Показания электронных часов изменяются на единицу в конце каждой минуты. Найти вероятность события, состоящего в том, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20 секунд.

4. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, равномерно распределённой в интервале $(3; 9)$.

5. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, равномерно распределённой в интервале $(35; 98)$.

6. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, равномерно распределённой в интервале $(123; 245)$.

7. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределённой случайной величины X равны числам a и b, соответственно. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключённое в интервале $(a + c;\ a + 2c)$.

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	32	20	12	42	25	52	13	28	65	78	22	26	35	62	15
b	64	5	4	16	3	7	2	4	5	11	64	5	4	16	3
c	2	5	3	1	2	3	2	4	5	3	2	7	4	3	5

8. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределённой случайной величины X равны a и b, соответственно. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключённое в интервале ($a - 2c$; $a + c$).

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	56	30	12	42	25	52	33	48	65	78	22	26	25	62	15
b	4	3	10	16	3	9	2	8	5	11	64	5	4	16	3
c	3	2	3	1	2	5	2	3	5	7	2	6	4	3	5

9. Производится взвешивание целлюлозной массы без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 30$ г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

10. Нормально распределённая случайная величина X задана плотностью

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-(x-1)^2/50}.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию X.

11. Производится измерение диаметра бревна без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

12. Случайные ошибки измерения площади помещений подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 10\,\text{см}^2$ и математическим ожиданием $a = 0$. Найти вероятность того, что из трёх независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдёт по абсолютной величине $4\ \text{см}^2$.

13. Автомат изготовляет шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от заданного по абсолютной величине меньше 0,5 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со

средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}3$ мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных.

14. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 25$. Вероятность попадания X в интервал (10; 20) равна 0,3. Чему равна вероятность попадания X в интервал (0; 10)?

15. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 36$. Вероятность попадания X в интервал (55; 60) равна 0,3. Чему равна вероятность попадания X в интервал (40; 45)?

16. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 10$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадёт величина X в результате испытания.

17. Случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 4$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадёт величина X в результате испытания.

18. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 0{,}04 \cdot e^{-0{,}04x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (1; 2).

19. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 3e^{-3x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (0,13; 0,7).

20. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-0{,}6x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (3; 5).

21. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного закона, заданного плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 10e^{-10x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

22. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного закона, заданного функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-0,08x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

23. На шоссе установлен контрольный пункт для проверки технического состояния автомобилей. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины T – времени ожидания очередной машины контролёром, – если поток машин простейший и время (в часах) между прохождениями машин через контрольный пункт распределено по показательному закону $f(t)=5e^{-5t}$.

24. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно трём. Найти вероятность того, что за 3 минуты поступит: а) пять вызовов; б) менее пяти вызовов; в) не менее пяти вызовов.

25. Среднее число клиентов банка в одну минуту равно двум. Найти вероятность того, что за 4 минуты придут: а) три клиента; б) менее трёх клиентов; в) не менее трех клиентов. Поток клиентов предполагается простейшим.

26. Магазин получил 1 000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что в результате перевозки одна бутылка окажется разбитой, равна 0,004. Найти вероятности того, что магазин получит разбитых бутылок: а) ровно две; б) меньше двух; в) более двух; г) хотя бы одну.

27. Устройство состоит из большого числа независимо работающих элементов с одинаковой, очень малой, вероятностью отказа каждого элемента за время T. Найти среднее число отказавших за время T элементов, если вероятность того, что за это время откажет хотя бы один элемент, равна 0,98.

28. Мебельная фабрика отправила на базу 1 000 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,001. Найти вероятности того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно три; б) менее трёх; в) более трёх; г) хотя бы одно.

29. В партии из семи деталей имеется пять стандартных. Наугад отобраны четыре детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных. Найти

математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

30. В партии из 12 телевизоров имеется 10 корейского производства. Наугад отобраны три телевизора. Составить закон распределения числа телевизоров корейского производства среди отобранных. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение полученного закона распределения случайной величины.

Контрольные вопросы

1. Какое распределение называется биномиальным?
2. Чему равно математическое ожидание случайной величины, распределённой по биномиальному закону?
3. Чему равна дисперсия случайной величины, распределённой по биномиальному закону?
4. Как определяется распределение Пуассона?
5. Как найти математическое ожидание случайной величины, распределённой по закону Пуассона?
6. Как вычислить дисперсию случайной величины, распределённой по закону Пуассона?
7. Как записывается плотность равномерного распределения?
8. Определить показательное распределение.
9. Какое распределение называется нормальным?
11. Чему равно математическое ожидание случайной величины, распределенной по нормальному закону?
12. Чему равна дисперсия случайной величины, распределённой по нормальному закону?
13. Какое распределение называется нормированным нормальным распределением?
14. Какие свойства имеет функция распределения нормального закона?
15. Что называется потоком событий?
16. Какие свойства имеет простой поток событий?
17. Какое распределение используют для описания простого потока событий?
18. Какое распределение используют для описания промежутков времени между наступлением событий в простом потоке событий?
19. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно: X – в интервале $(a;b)$, Y – в интервале $(c;d)$. Найти дисперсию произведения XY.
20. Чему равны мода и медиана случайной величины, распределённой по нормальному закону?

2. ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

Лабораторная работа 1

Случайные события и их вероятности

1. ***Цель работы*** – научиться вычислять вероятности различных случайных событий.

2. ***Задачи работы***:

– уметь вычислить вероятность случайного события по определению вероятности;

– уметь отличить перестановки, размещения и сочетания;

– уметь находить число перестановок, размещений, сочетаний средствами Excel;

– уметь применять основной закон комбинаторики;

– различать события совместные и несовместные;

– уметь найти для события противоположное ему событие;

– уметь построить полную группу событий решаемой задачи;

– различать выборки с возвращением и выборки без возвращения;

– различать зависимые и независимые события;

– приобрести навыки решения различных задач по определению вероятности случайных событий;

– уметь вычислить геометрическую вероятность случайного события;

– уметь решать задачи на применение правила произведения.

3. ***Общее описание задания***

Работа посвящена изучению основных формул комбинаторики. В задачах рассматриваются выборки с возвращением и без возвращения. Вычисления вероятности событий проводятся по определению понятия вероятности. Нарабатываются навыки по определению совместности событий, их зависимости друг от друга, составлению полной группы событий, нахождению среди событий противоположных друг другу. Рассматривается понятие геометрической вероятности и методы вычисления её для различных геометрических объектов.

При выполнении лабораторной работы студент должен решить задачи своего варианта. Выполнение одного варианта может делать бригада из двух человек. Расчёты должны быть проведены средствами Excel с использованием необходимых для этого математических функций и действий.

4. ***Варианты задания***

Один вариант содержит 10 задач на определение вероятности случайных событий. Для каждого варианта в таблице указаны номера задач из раздела 1.1 данного учебного пособия.

Номер варианта	Номер задачи									
1	1	4	9	8	12	17	23	27	29	30
2	2	6	7	11	15	19	21	24	26	28
3	3	10	12	13	14	18	20	22	25	29
4	4	5	16	20	21	23	24	27	28	30
5	5	6	9	10	11	13	16	19	23	25
6	6	8	12	14	15	17	18	22	24	28
7	1	3	7	14	15	16	18	20	23	25
8	2	4	8	10	12	14	22	24	28	30
9	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
10	6	8	10	14	16	18	25	26	27	28
11	2	5	11	13	17	20	23	25	26	27
12	3	10	12	17	18	19	22	24	27	29
13	4	9	13	16	19	20	21	23	25	26
14	6	11	14	15	17	18	19	22	24	28
15	7	12	15	16	18	20	21	27	29	30

5. ***Требования к оформлению результатов***

В ходе выполнения лабораторной работы на ПК студент формирует свой файл, в котором в табличном процессоре Excel последовательно записывает номер лабораторной работы и номер своего варианта. Затем записывается номер решаемой задачи, исходные данные задачи, ход решения и полученные результаты. Отдельно выделить полученный ответ. Формулы, по которым находится тот или иной результат программируются с указанием использованных для вычислений ячеек, в которых хранятся численные исходные данные задачи. Результаты выполнения лабораторной работы сохраняются до конца занятия. Студент должен уметь ответить на вопросы преподавателя по теме лабораторной работы, которые записаны в соответствующей главе в разделе "Контрольные вопросы".

Лабораторная работа 2

Теоремы умножения и сложения вероятностей

1. ***Цель работы*** – научиться применять теоремы сложения и умножения вероятностей для совместных и несовместных, зависимых и независимых событий.

2. ***Задачи работы***:

– уметь отличать совместные и несовместные события;

– уметь определять зависимость и независимость случайных событий;

– находить противоположные события для заданных;

– находить полную группу событий;

– отличать безусловную и условную вероятности событий;

– выработать навыки по вычислению условной вероятности;

– выработать навыки вычисления вероятности суммы и произведения случайных событий.

3. ***Общее описание задания***

Лабораторная работа предполагает знание необходимых по теме определений понятий и теорем из раздела 1.2. При выполнении лабораторной работы студент должен решить задачи своего варианта, применяя теоремы сложения и умножения вероятности. Расчёты должны быть проведены средствами Excel с использованием необходимых для этого математических функций и действий.

4. ***Варианты задания***

Один вариант содержит 10 задач на определение вероятности случайных событий. Для каждого варианта в таблице указаны номера задач из раздела 1.2 данного учебного пособия.

Номер варианта	Номер задачи									
1	3	6	10	11	13	15	17	19	23	25
2	5	8	9	10	12	14	18	20	25	30
3	6	11	14	16	19	22	23	24	26	28
4	1	8	10	13	14	15	17	19	21	27

Номер варианта	Номер задачи									
5	2	5	9	10	15	16	18	20	22	24
6	3	7	11	14	19	20	21	23	25	26
7	4	9	13	14	15	16	18	19	20	21
8	2	3	8	10	12	14	21	23	28	29
9	6	8	9	11	13	15	22	24	26	30
10	7	9	10	14	16	18	20	22	23	26
11	8	10	11	13	17	20	21	24	25	27
12	9	11	12	17	18	19	20	24	26	30
13	1	3	13	15	16	17	22	23	25	26
14	2	9	14	17	19	20	21	22	24	28
15	3	12	13	15	18	22	24	26	27	29

5. ***Требования к оформлению результатов***

В ходе выполнения лабораторной работы на ПК студент формирует свой файл, в котором в табличном процессоре Excel последовательно записывает исходные данные задачи, ход решения и полученные результаты. При этом следует указать номер лабораторной работы, номер решаемой задачи. Отдельно выделить полученный ответ.

Лабораторная работа 3

Формула полной вероятности. Формула Байеса.

1. ***Цель работы*** **–** научиться вычислять вероятность события при наличии множества гипотез его наступления и получать оценки вероятностей гипотез.

2. ***Задачи работы***:

– уметь построить различные гипотезы наступления случайного события;

– уметь найти все возможные гипотезы, приводящие к наступлению события;

– выработать навыки применения формулы полной вероятности;

– выработать навыки применения формулы переоценки вероятности гипотез;

– уметь организовать вычислительный процесс средствами Excel.

3. ***Общее описание задания***

Лабораторная работа предполагает знание необходимых по теме определений понятий и теорем из разделов 1.3 и 1.4. При выполнении лабораторной работы студент должен решить задачи своего варианта, используя формулу полной вероятности или формулу Бейеса. При этом важным моментом является построение алгоритма решения задачи, в котором следует учесть все возможные гипотезы развития событий, при которых может наступить рассматриваемое событие. При переоценке гипотезы следует понимать, что реальная вероятность гипотезы как правило отличается от предполагаемой на основе теории. Расчёты должны быть проведены средствами Excel с использованием необходимых для этого математических функций и действий.

4. ***Варианты задания***

Один вариант содержит 10 задач на вычисление либо по формуле полной вероятности, либо по формуле Байеса. Для каждого варианта в таблице указаны номера задач из раздела 1.3 и 1.4 данного учебного пособия. При этом, например, номер 3.9 обозначает задачу номер 9 из раздела 1.3, а номер 4.2 обозначает задачу номер 2 из раздела 1.4.

1	3.1	3.6	3.10	3.21	3.30	4.5	4.7	4.19	4.23	4.25
2	3.5	3.8	3.9	3.20	2.22	4.1	4.8	4.20	4.25	4.30
3	3.6	3.11	3.14	3.16	3.19	4.22	4.23	4.24	4.26	4.28
4	3.7	3.12	3.13	3.15	3.24	4.15	4.17	4.19	4.21	4.27
5	3.2	3.25	3.26	3.27	3.30	4.6	4.9	4.12	4.27	4.30
6	3.3	3.7	3.11	3.14	3.29	4.2	4.11	4.13	4.15	4.16
7	3.4	3.19	3.23	3.24	3.25	4.16	4.18	4.19	4.20	4.21
8	3.2	3.3	3.8	3.10	3.12	4.3	4.4	4.23	4.28	4.29
9	3.6	3.8	3.9	3.11	3.13	4.5	4.12	4.24	4.26	4.30
10	3.7	3.9	3.10	3.14	3.16	4.18	4.20	4.22	4.23	4.26
11	3.8	3.10	3.11	3.13	3.17	4.20	4.21	4.24	4.25	4.27
12	3.9	3.11	3.12	3.17	3.18	4.9	4.10	4.14	4.16	4.20

Номер варианта	Номер задачи									
13	3.1	3.10	3.13	3.15	3.16	4.17	4.22	4.23	4.25	4.26
14	3.2	3.9	3.14	3.18	3.19	4.10	4.1	4.2	4.4	4.18
15	3.3	3.12	3.13	3.15	3.18	4.22	4.24	4.26	4.27	4.29

5. ***Требования к оформлению результатов***

В ходе выполнения лабораторной работы на ПК студент формирует свой файл, в котором в табличном процессоре Excel последовательно записывает исходные данные задачи, ход решения и полученные результаты. При этом следует указать номер лабораторной работы, номер решаемой задачи. Отдельно выделить полученный ответ.

Лабораторная работа 4

Повторные независимые испытания. Формула Бернулли

1. ***Цель работы*** – научиться находить наивероятнейшие события и вероятность появления события в повторных независимых испытаниях.

2. ***Задачи работы***:

– вычислять по формуле Бернулли средствами Excel вероятности появления события заданное число раз;

– уметь пользоваться локальной теоремой Лапласа;

– уметь пользоваться интегральной теоремой Лапласа;

– уметь использовать аппарат функций Excel для вычислений вероятностей по локальной и интегральной теоремам Лапласа;

– уметь вычислить наивероятнейшее число событий;

– находить вероятность появления наивероятнейшего числа событий.

3. ***Общее описание задания***

Лабораторная работа посвящена повторным независимым испытаниииям и предполагает знание необходимых по теме определений понятий и теорем из раздела 1.5. В ходе выполнения работы нарабатываются навыки использования в качестве справочных таблиц для вычисления функциий средств Excel, размещённых в разделе "Статистические функции". Кроме того, рассматривается задача прогнозирования наиболее вероятного числа появления событий в ходе многократного повторения опытов при заданной вероятности его появления в одном опыте. При выполнении лабораторной работы студент должен решить задачи своего варианта.

Расчёты, проведенные по локальной и интегральной теоремам Лапласа, следует провести двумя способами: с использованием таблиц локальной и интегральной функций Лапласа и средствами Excel. Полученные результаты должны быть сопоставлены.

4. *Варианты задания*

Один вариант содержит 10 задач на определение вероятности случайных событий. Для каждого варианта в таблице указаны номера задач из раздела 1.5 данного учебного пособия.

Номер варианта	Номер задачи									
1	1	5	9	8	12	17	23	27	28	30
2	2	6	7	11	15	19	21	24	26	27
3	3	4	12	13	14	18	20	22	25	28
4	4	5	16	20	21	23	24	27	28	29
5	5	7	9	10	11	13	16	19	23	25
6	6	8	12	14	15	17	18	22	24	26
7	1	3	7	14	15	16	18	20	23	24
8	2	4	8	10	12	14	22	24	28	30
9	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
10	6	8	10	14	16	18	25	26	27	28
11	2	5	11	13	17	20	23	25	26	27
12	3	10	12	17	18	19	22	24	27	29
13	4	9	13	16	19	20	21	23	25	26
14	6	11	14	15	17	18	19	22	24	28
15	7	12	15	16	18	20	21	27	29	30

5. ***Требования к оформлению результатов***

В ходе выполнения лабораторной работы на ПК студент формирует свой файл, в котором в табличном процессоре Excel последовательно записывает исходные данные задачи, ход решения и полученные результаты. При этом следует указать номер лабораторной работы, номер решаемой задачи. Отдельно выделить полученный ответ.

Лабораторная работа 5

Дискретные случайные величины

1. ***Цель работы*** – научиться строить законы распределения по заданным для дискретных случайных величин.

2. ***Задачи работы***:

– уметь находить закон распределения для произведения константы на случайную величину;

– уметь находить закон распределения для суммы случайных величин;

– уметь находить закон распределения для разности случайных величин;

– уметь находить закон распределения для квадрата случайной величины;

– уметь находить закон распределения для корня квадратного из случайной величины;

– строить по закону распределения случайной величины ее многоугольник распределения;

– проводить расчеты средствами Excel с использованием необходимых для этого математических функций и действий;

– уметь применять средства "Мастера диаграмм" Excel.

3. ***Общее описание задания***

Лабораторная работа предполагает знание необходимых по теме определений понятий из раздела 1.6. Изучаются различные дискретные случайные величины и действия с ними. Строятся многоугольники и гистограммы распределения. При выполнении лабораторной работы студент должен решить задачи своего варианта. Выполнение одного варианта может делать бригада из двух человек. Расчёты должны быть проведены средствами Excel с использованием необходимых для этого математических функций и действий.

Построение многоугольника распределения проводится средствами "Мастера диаграмм" Excel. При этом ставится цель: овладеть способами нанесения на рисунки необходимых текстовых пояснений,а также обозначений осей и рисуемых объектов. При построении диаграмм используются различные виды диаграмм и их цветовые разновидности. При построении графиков для многоугольника распределения изучаются различные формы линии тренда и способы получения аналитических зависимостей для них. Рассматриваются возможности Excel построения графиков разного типа.

4. ***Варианты задания***

Один вариант содержит 10 задач на определение вероятности случайных событий. Для каждого варианта в таблице указаны номера задач из раздела 1.6 данного учебного пособия.

Номер варианта	Номер задачи									
1	3	4	9	10	12	17	18	20	22	25
2	1	6	7	11	15	19	21	24	26	28
3	2	10	12	13	14	18	20	22	25	29
4	5	8	16	20	21	23	24	27	28	27
5	7	10	12	13	14	17	18	19	29	30
6	6	8	12	14	15	17	18	22	24	28
7	1	3	7	14	15	16	18	20	23	25
8	2	4	8	10	12	14	22	24	28	30
9	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
10	6	8	10	14	16	18	25	26	27	28
11	2	5	11	13	17	20	23	25	26	27
12	3	10	12	17	18	19	22	24	27	29
13	4	9	13	16	19	20	21	23	25	26
14	6	11	14	15	17	18	19	22	24	28
15	7	12	15	16	18	20	21	27	29	30

5. ***Требования к оформлению результатов***

В ходе выполнения лабораторной работы на ПК студент формирует свой файл, в котором в табличном процессоре Excel последовательно записывает исходные данные задачи, ход решения и полученные результаты. При этом следует указать номер лабораторной работы, номер решаемой задачи. Отдельно выделить полученный ответ. Многоугольник распределения построить с помощью графиков из "Мастера диаграмм" Excel.

Полученные в ходе решения задач рисунки могут быть сделаны как отдельно для каждой из вновь полученных случайных величин, так и на общих координатных осях.

На графике воспользоваться средствами для нахождения аналитической функции тренда и определить достоверность найденного тренда.

Провести эксперименты с цветами и формами представления различных видов диаграмм.

Лабораторная работа 6

Функция распределения. Плотность распределения

1. ***Цель работы*** – приобретение навыков работы с функциями распределения различных случайных величин.

2. ***Задачи работы***:

– уметь находить функцию распределения дискретной случайной величины;

– определять по заданной функции распределения непрерывной случайной величины её плотность и наоборот;

– уметь вычислять вероятность события по заданной функции распределения или плотности распределения;

– определять параметры функций распределения и плотности распределения на основании их свойств.

3. ***Общее описание задания***

Лабораторная работа предполагает знание теоретических положений разделов 1.7 и 1.8. В работе изучаются понятия функции и плотности Распределения, их взаимосвязь и свойства. При выполнении лабораторной работы студент должен решить задачи своего варианта. Расчёты должны быть проведены средствами Excel, где это возможно. Задачи для непрерывных случайных величин выполняются методами дифференциального и интегрального исчисления, изученными ранее.

4. ***Варианты задания***

Один вариант содержит 10 задач на определение вероятности случайных событий. Для каждого варианта в таблице указаны номера задач из разделов 1.7 и 1.8 данного учебного пособия. При этом, например, номер 8.14 обозначает задачу номер 14 из раздела 1.8.

Номер варианта	Номер задачи									
1	7.1	7.6	7.10	7.31	7.50	8.5	8.16	8.21	8.28	8.35
2	7.5	7.8	7.30	7.32	7.49	8.1	8.15	8.23	8.30	8.40
3	7.6	7.11	7.24	7.33	7.48	8.2	8.20	8.24	8.36	8.38
4	7.7	7.12	7.13	7.34	7.47	8.15	8.17	8.22	8.31	8.3
5	7.2	7.25	7.26	7.35	7.46	8.6	8.14	8.25	8.37	8.37
6	7.3	7.13	7.20	7.36	7.45	8.4	8.11	8.23	8.35	8.36
7	7.4	7.19	7.23	7.37	7.44	8.16	8.18	8.29	8.32	8.35
8	7.2	7.14	7.28	7.38	7.41	8.3	8.13	8.26	8.33	8.39
9	7.6	7.18	7.29	7.39	7.40	8.7	8.12	8.24	8.36	8.40
10	7.7	7.9	7.21	7.30	7.39	8.8	8.20	8.22	8.34	8.36
11	7.8	7.10	7.22	7.34	7.37	8.10	8.11	8.27	8.35	8.37
12	7.9	7.15	7.27	7.36	7.38	8.9	8.15	8.25	8.36	8.38
13	7.1	7.10	7.23	7.35	7.49	8.17	8.20	8.28	8.35	8.39
14	7.2	7.16	7.24	7.33	7.50	8.10	8.18	8.29	8.37	8.38
15	7.3	7.17	7.25	7.45	7.48	8.22	8.19	8.28	8.38	8.40

5. ***Требования к оформлению результатов***

В ходе выполнения лабораторной работы на ПК студент формирует свой файл, в котором в табличном процессоре Excel последовательно записывает исходные данные задачи, ход решения и полученные результаты. При этом следует указать номер лабораторной работы, номер решаемой задачи. Отдельно выделить полученный ответ.

Задания лабораторной работы для непрерывных случайных величин, требующие знания дифференциального и интегрального исчисления функций, необходимо выполнять на листах формата А4 в рукописном или печатном виде.

Эти задачи могут быть выполнены вне аудитории и представлены в готовом виде для проверки преподавателю после окончания выполнения лабораторной работы, но не позже недели после её проведения.

При этом следует быть готовым к ответам на все вопросы из разделов "Контрольные вопросы" глав 1.7 и 1.8.

Лабораторная работа 7

Числовые характеристики случайной величины

1. ***Цель работы*** – научиться вычислять числовые характеристики случайной величины.

2. ***Задачи работы***:

– уметь находить математическое ожидание дискретной случайной величины с помощью Excel;

– уметь находить дисперсию дискретной случайной величины с помощью Excel;

– уметь находить средне квадратическое отклонение дискретной случайной величины с помощью Excel;

– уметь находить математическое ожидание, дисперсию, моду, медиану, среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины.

3. ***Общее описание задания***

Лабораторная работа предполагает предварительное изучение, и усвоение теоретических положений раздела 1.9. В работе нарабатываются навыки вычисления математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения случайных величин. При решении задач изучаются различные свойства числовых характеристик случайных величин.

Для непрерывных случайных величин изучаются понятия моды и медианы. При выполнении лабораторной работы студент должен решить задачи своего варианта. Расчёты должны быть проведены либо на листах формата А4, либо средствами Excel, где это возможно.

Задачи для непрерывных случайных величин выполняются методами интегрального исчисления, изученными ранее.

4. ***Варианты задания***

Один вариант содержит 10 задач на определение вероятности случайных событий. Для каждого варианта в таблице указаны номера задач из раздела 1.9 данного учебного пособия.

Номер варианта	Номер задачи									
1	3	6	10	11	13	25	27	31	37	41
2	5	8	9	12	14	24	28	32	38	42
3	7	15	16	17	19	22	30	34	39	43
4	1	4	10	15	18	21	27	33	40	44
5	2	5	9	10	15	26	28	35	37	45
6	3	7	11	14	19	20	23	36	38	46
7	4	9	13	15	17	27	28	31	39	47
8	2	3	8	10	12	23	29	33	40	48
9	6	8	9	11	13	25	26	32	37	49
10	7	9	10	14	16	24	27	34	38	50
11	8	10	11	13	17	20	21	35	39	41
12	9	11	12	17	18	22	25	36	40	45
13	1	3	13	15	16	27	30	33	37	47
14	2	9	14	17	19	23	25	32	38	49
15	3	12	15	16	18	25	26	36	39	50

5. ***Требования к оформлению результатов***

В ходе выполнения лабораторной работы на ПК студент формирует свой файл, в котором в табличном процессоре Excel последовательно записывает исходные данные задачи, ход решения и полученные результаты. При этом следует указать номер лабораторной работы, номер решаемой задачи. Отдельно выделить полученный ответ.

Результаты решения задач для непрерывных случайных величин представляются на отдельных листах формата А4 в рукописном или печатном виде с указанием номера лабораторной работы и решаемого варианта. Материал на проверку должен быть сдан преподавателю не позднее, чем через неделю после проведения лабораторной работы.

При защите результатов лабораторной работы студент должен уметь ответить на контрольные вопросы из раздела 1.9.

Лабораторная работа 8

Специальные законы распределения

1. ***Цель работы*** – изучить свойства различных законов распределения случайных величин.

2. ***Задачи работы***:

– уметь находить значения параметров различных распределений с помощью функций Excel;

– уметь распознавать тип закона распределения случайной величины;

– уметь составить закон распределения для дискретной случайной величины;

– решать задачи для простейших потоков событий;

– уметь вычислять числовые характеристики для специальных законов распределения.

3. ***Общее описание задания***

Лабораторная работа предполагает предварительное изучение, и усвоение теоретических положений раздела 1.10. Необходимо обратить особое внимание на формулы, задающие числовые характеристики каждого из рассмотренных в разделе специальных распределений. При выполнении лабораторной работы студент должен решить задачи своего варианта. Выполнение одного варианта может делать бригада из двух человек. Расчёты должны быть проведены средствами Excel.

4. ***Варианты задания***

Один вариант содержит 10 задач на определение вероятности случайных событий. Для каждого варианта в таблице указаны номера задач из раздела 1.10 данного учебного пособия.

Номер варианта	Номер задачи									
1	3	6	10	11	13	15	17	19	23	25
2	5	8	9	10	12	14	18	20	25	30
3	6	11	14	16	19	22	23	24	26	28
4	1	8	10	13	14	15	17	19	21	27

Номер варианта	Номер задачи									
5	2	5	9	10	15	16	18	20	22	24
6	3	7	11	14	19	20	21	23	25	26
7	4	9	13	14	15	16	18	19	20	21
8	2	3	8	10	12	14	21	23	28	29
9	6	8	9	11	13	15	22	24	26	30
10	7	9	10	14	16	18	20	22	23	26
11	8	10	11	13	17	20	21	24	25	27
12	9	11	12	17	18	19	20	24	26	30
13	1	3	13	15	16	17	22	23	25	26
14	2	9	14	17	19	20	21	22	24	28
15	3	12	13	15	18	22	24	26	27	29

5. ***Требования к оформлению результатов***

В ходе выполнения лабораторной работы на ПК студент формирует свой файл, в котором в табличном процессоре Excel последовательно записывает исходные данные задачи, ход решения и полученные результаты. При этом следует указать номер лабораторной работы, номер решаемой задачи. Отдельно выделить полученный ответ. Все используемые числовые данные задачи должны быть записаны в отдельные ячейки. Ход решения программируется с помощью ячеек, используемых для хранения числовых данных.

6. *Требования к защите результатов*

При защите всех лабораторных работ студент предъявляет полученные результаты в электронном виде и отвечает на контрольные вопросы из разделов, задачи которых решались. Для успешной защиты лабораторной работы необходимо дать верные ответы не менее, чем на три заданных вопроса.

Рекомендуемая литература

1. **Красс**, М. С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании/ М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – М.: Дело, 2001.– 688 с.
2. **Общий курс высшей математики для экономистов**: Учебник/ Под ред. В. И. Ермакова. – М.: Инфра-М., 2001. – 656 с.
3. **Теория вероятностей и математическая статистика**/ Н. Ш. Кремер и др.– М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 420 с.
4. **Солодовников**, А. С. Математика в экономике/ А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов: Учебник: В 2 ч. Ч. 1. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 224 с.
5. **Солодовников**, А. С. Математика в экономике/ А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов: Учебник: В 2 ч. Ч. 2. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 374 с.
6. **Гмурман**, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1998.– 368 с.
7. **Гмурман**, В. Е. Руководство по решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1998. – 400 с.
8. **Замков**, Математические методы в экономике / О. О. Замков, Ю. А. Черемных, А. В. Толстопятенко. – М.: МГУ, 1999. – 366 с.
9. **Горелова**, Г. В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel / Г. В. Горелова, И. А. Кацко. – Ростов-на- Дону: Феникс, 2002. – 400 с.: ил.
10. **Малыхин**, В. И. Математика в экономике: Учеб. пос. –М.: Инфра-М, 2002. – 356 с.
11. **Колемаев**, В. А. Математическая экономика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 400 с.
12. **Данко**, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1. – М.: Высшая школа, 1999. – 390 с.
13. **Данко**, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2. – М.: Высшая школа, 1999. – 386 с.
14. **Богатов**, Д. Ф. Конспект лекций и практикум по математике для юристов/ Д.Ф. Богатов, Ф. Г.Богатов. –М.: Приор, 2003. – 448 с.
15. **Шелобаев**, С. И. Математические методы и модели. – М.: ЮНИТИ, 2000.– 368 с.

Оглавление

Учебное издание

Геннадий Александрович Данилин
Вера Михайловна Курзина
Павел Алексеевич Курзин
Ольга Митрофановна Полещук

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ EXCEL

Под редакцией автора

Компьютерный набор и верстка П. А. Курзин

По тематическому плану внутривузовских изданий учебной литературы на 2005 г., поз.51

Лицензия ЛР № 020718 от 02.02.1998 г.
Лицензия ПД № 00326 от 14.02.2000 г.

Подписано к печати Формат 60×88/16
Бумага 80 г/м^2 " Снегурочка" Ризография
Объем 6, 0 п. л. Заказ №
Тираж 100 экз.

Издательство Московского государственного университета леса.
141005. Мытищи-5, Московская обл., 1-я Институтская , 1, МГУЛ.
Телефон: (095) 588-57-62
e-mail:izdat@mgul.ac.ru