Исходная схема:

*75 В*

*E*1

*B*

*A*

*0.66*

*мГн*

*E*2

*C*

*L*

*R*2

*100 В*

*66 Ом*

*1.65 мкФ*

*R*1

*R*3

*C*

*E*

*66 Ом*

*D*

*66 Ом*

**Установившийся режим в момент до размыкания ключа**

Рассчитаем установившийся режим до размыкания ключа. В установившемся режиме индуктивность заменяется коротко­замкнутым соединением, ёмкость — разрывом.

*R*3

*R*2

*R*1

*L*

*C*

*E*1

*E*2

*C*

*D*

*A*

*75 В*

*–75 В*

*E*

*–100 В*

*100 В*

*–58.333 В*

*0 В*

Потенциалы считаем относительно узла А, т.е.

$$U\_{A}=0.$$

Потенциалы в узлах С и Е определяются источниками ЭДС E1 и E2 соответственно

$$U\_{B}=U\_{C}=-75 В;$$

$$U\_{E}=-100 В.$$

Остался один неизвестный потенциал в точке D, для которого мы составляем уравнение методом узловых потенциалов:

$$U\_{D}=\frac{\frac{U\_{C}}{R\_{1}}+\frac{U\_{A}}{R\_{2}}+\frac{U\_{E}}{R\_{3}}}{\frac{1}{R\_{1}}+\frac{1}{R\_{2}}+\frac{1}{R\_{3}}}=\frac{U\_{C}R\_{3}+U\_{E}R\_{1}}{R\_{1}R\_{2}+R\_{1}R\_{3}+R\_{2}R\_{3}}=-58.333 В.$$

Проверка:

$$I\_{1}=\frac{U\_{D}-U\_{C}}{R\_{1}}=0.252525 A$$

$$I\_{2}=\frac{U\_{D}-U\_{A}}{R\_{2}}=-0.883838 A$$

$$I\_{3}=\frac{U\_{D}-U\_{E}}{R\_{3}}=0.631313A$$

$$I\_{1}+I\_{2}+I\_{3}=0.252525-0.883838+0.631313=0$$

Таким образом, мы знаем напряжения во всех узлах схемы и можем найти первоначальный ток в индуктивности и первоначальное напряжение на ёмкости. В первый момент после размыкания ключа эти параметры не изменятся.

$$I\_{L}\left(-0\right)=I\_{L}\left(+0\right)=I\_{L}\left(0\right)=\frac{U\_{D}-U\_{C}}{R\_{1}}=0.252525 A;$$

$$U\_{C}\left(-0\right)=U\_{C}\left(+0\right)=U\_{C}\left(0\right)=U\_{A}-U\_{C}=-U\_{D}=58.3333 В.$$

**Установившийся режим после размыкания ключа**

В установившемся режиме после размыкания ключа схема примет следующий эквивалентный вид.

*R*2

*R*1

*L*

*C*

*E*1

*75 В*

*UL = 0 В*

Из схемы видно, что

$$I\_{L}\left(\infty \right)=\frac{E\_{1}}{R\_{1}+R\_{2}}=0.568182 A;$$

$$U\_{L}\left(\infty \right)=0.$$

**Классический метод**

Схема после размыкания ключа выглядит следующим образом:

*R*2

*R*1

*L*

*C*

*E*1

*0.66*

*мГн*

*66 Ом*

*75 В*

*A*

*B*

*C*

*D*

*2*

*1*

Составляем уравнение контурных токов:

$$\left\{\begin{array}{c}L\frac{ di\_{1}}{dt}+i\_{1}R\_{1}+\left(i\_{1}+i\_{2}\right)R\_{2}=E\_{1}\\\frac{1}{C}∫i\_{2}dt+\left(i\_{1}+i\_{2}\right)R\_{2}=U\_{C}\left(0\right)\end{array}\right.$$

Заменяем дифференцирование оператором *p*, а интегрирование — оператором 1/*p*, преобразуем в систему линейных уравнений.

$$\left\{\begin{array}{c}pLi\_{1}+i\_{1}R\_{1}+\left(i\_{1}+i\_{2}\right)R\_{2}=E\_{1}\\\frac{1}{pC}i\_{2}+\left(i\_{1}+i\_{2}\right)R\_{2}=U\_{C}\left(0\right)\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}i\_{1}\left(pL+R\_{1}+R\_{2}\right)+i\_{2}R\_{2}=E\_{1}\\i\_{1}R\_{2}+i\_{2}\left(\frac{1}{pC}+R\_{2}\right)=U\_{C}\left(0\right)\end{array}\right.$$

Записываем характеристическое уравнение системы.

$$△\left(p\right)=\left|\begin{matrix}pL+R\_{1}+R\_{2}&R\_{2}\\R\_{2}&R\_{2}+\frac{1}{pC}\end{matrix}\right|$$

$$△\left(p\right)=\left(pL+R\_{1}+R\_{2}\right)\left(R\_{2}+\frac{1}{pC}\right)-R\_{2}^{2}$$

$$△\left(p\right)=pLR\_{2}+\frac{L}{C}+R\_{1}R\_{2}+\frac{R\_{1}+R\_{2}}{pC}$$

Приравниваем характеристическое уравнение к нулю

$$pLR\_{2}+\frac{L}{C}+R\_{1}R\_{2}+\frac{R\_{1}+R\_{2}}{pC}=0$$

$$p^{2}LR\_{2}+p\left(\frac{L}{C}+R\_{1}R\_{2}\right)+\frac{R\_{1}+R\_{2}}{C}=0$$

$$p^{2}LCR\_{2}+p\left(L+R\_{1}R\_{2}C\right)+R\_{1}+R\_{2}=0$$

Решаем характеристическое уравнение:

$$D=\left(L+R\_{1}R\_{2}C\right)^{2}-4LRC\_{2}\left(R\_{1}+R\_{2}\right)=2.36322⋅10^{-5}$$

$$p\_{1,2}=\frac{-\left(L+R\_{1}R\_{2}C\right)\pm \sqrt{D}}{2LCR\_{2}}$$

$\left[\begin{array}{c}p\_{1}=-88409.56\\p\_{2}=-20773.17\end{array}\right.$

Оба корня действительные и различные, следовательно, процесс апериодический.

Записываем решение для *UL* в общем виде:

$$U\_{L}\left(t\right)=U\_{Lпр}\left(t\right)+U\_{Lсв}\left(t\right)=U\_{Lпр}\left(t\right)+А\_{1}e^{p\_{1}t}+А\_{2}e^{p\_{2}t},$$

где

$U\_{Lпр}\left(t\right)$ — принуждённая составляющая;

$U\_{Lсв}\left(t\right)$ — свободная составляющая;

$А\_{1}, А\_{2}$ — постоянные интегрирования.

Находим принуждённую составляющую, которая равна напряжению на индуктивности в установившемся режиме после коммутации.

$$U\_{Lпр}\left(\infty \right)=0$$

$$I\_{Lпр}\left(\infty \right)=\frac{E\_{1}}{R\_{1}+R\_{2}}=0,568181 A$$

$$U\_{L}\left(t\right)=A\_{1}e^{p\_{1}t}+A\_{2}e^{p\_{2}t}.$$

Коэффициенты *A*1 и *A*2 находим из граничных условий:

$$U\_{L}\left(0\right)=A\_{1}e^{p\_{1}⋅0}+A\_{2}e^{p\_{2}⋅0}=A\_{1}+A\_{2}=0$$

$$A\_{1}=-A\_{2}$$

$$U\_{L}\left(t\right)=A\_{1}\left(e^{p\_{1}t}-e^{p\_{2}t}\right).$$

Чтобы найти коэффициент *A*1, воспользуемся граничными условиями по току. Запишем общее выражение для тока

$$I\_{L}\left(t\right)=B\_{0}+B\_{1}e^{p\_{1}t}+B\_{2}e^{p\_{2}t},$$

где $B\_{0},B\_{1}, B\_{2}$ — постоянные.

$$I\_{L}\left(0\right)=B\_{0}+B\_{1}e^{p\_{1}⋅0}+B\_{2}e^{p\_{2}⋅0}=B\_{0}+B\_{1}+B\_{2}$$

Для тока в установившемся режиме после переключения (учитывая, $p\_{1}$ и $p\_{2}$ что отрицательные):

$$I\_{L}\left(\infty \right)=B\_{0}+B\_{1}e^{p\_{1}⋅\infty }+B\_{2}e^{p\_{2}⋅\infty }=B\_{0},$$

откуда

$$B\_{1}+B\_{2}=I\_{L}\left(0\right)-I\_{L}\left(\infty \right).$$

Найдём выражение для напряжения на индуктивности.

$$U\_{L}\left(t\right)=L\frac{dI\_{L}\left(t\right)}{dt}=LB\_{1}p\_{1}e^{p\_{1}t}+LB\_{2}p\_{2}e^{p\_{2}t}$$

Из граничных условий

$$U\_{L}\left(0\right)=LB\_{1}p\_{1}+LB\_{2}p\_{2}=0$$

$$B\_{1}p\_{1}+B\_{2}p\_{2}=0$$

$$B\_{2}=-\frac{B\_{1}p\_{1}}{p\_{2}}$$

Подставляя в ранее полученное выражение, получим

$$B\_{1}+B\_{2}=I\_{L}\left(0\right)-I\_{L}\left(\infty \right).$$

$$B\_{1}\left(1-\frac{p\_{1}}{p\_{2}}\right)=I\_{L}\left(0\right)-I\_{L}\left(\infty \right).$$

$$B\_{1}\left(\frac{p\_{2}-p\_{1}}{p\_{2}}\right)=I\_{L}\left(0\right)-I\_{L}\left(\infty \right).$$

$$B\_{1}=\frac{\left[I\_{L}\left(0\right)-I\_{L}\left(\infty \right)\right] p\_{2}}{p\_{2}-p\_{1}}=0,0969477 А.$$

$$B\_{2}=\frac{\left[I\_{L}\left(0\right)-I\_{L}\left(\infty \right)\right] p\_{1}}{p\_{1}-p\_{2}}=-0,412604 А.$$

$$A\_{1}=LB\_{1}p\_{1}=-5.65693 В$$

Окончательно получаем

$$U\_{L}\left(t\right)=5.657⋅\left(e^{-20773.17t}-e^{-88409.56t}\right).$$

**Решение операторным методом**

Независимые начальные условия:

$$i\_{L}\left(-0\right)=i\_{L}\left(+0\right)=i\_{L}\left(0\right)=\frac{u\_{D}-u\_{C}}{R\_{1}}=0.2525 A;$$

$$u\_{C}\left(-0\right)=u\_{C}\left(+0\right)=u\_{C}\left(0\right)=u\_{A}-u\_{C}=-u\_{D}=58.333 В.$$

Построение эквивалентной операторной схемы

$$\frac{E\_{1}}{p}$$

*R*2

*L*

*2*

*C*

$$\frac{u\_{C}\left(0\right)}{C}$$

*1*

$$i\_{L}\left(0\right)⋅L$$

*R*1

Запишем систему уравнений для контурных токов

$$\left\{\begin{array}{c}I\_{1}\left(p\right)⋅\left(pL+R\_{1}+R\_{2}\right)+I\_{2}\left(p\right)⋅R\_{2}=\frac{E\_{1}}{p}+i\_{L}\left(0\right)⋅L\\I\_{1}\left(p\right)⋅R\_{2}+I\_{2}\left(p\right)⋅\left(\frac{1}{pC}+R\_{2}\right)=-\frac{u\_{C}\left(0\right)}{p }\end{array}\right.$$

Найдём *I*1 методом Крамера.

$$△\left(p\right)=\left|\begin{matrix}pL+R\_{1}+R\_{2}&R\_{2}\\R\_{2}&R\_{2}+\frac{1}{pC}\end{matrix}\right|$$

$$△\left(p\right)=\left(pL+R\_{1}+R\_{2}\right)\left(R\_{2}+\frac{1}{pC}\right)-R\_{2}^{2}=$$

$$=pLR\_{2}+R\_{1}R\_{2}+\frac{L}{C}+\frac{\left(R\_{1}+R\_{2}\right)}{pC}=$$

$$=\frac{1}{pC}\left(p^{2}LCR\_{2}+p\left(CR\_{1}R\_{2}+L\right)+R\_{1}+R\_{2}\right) $$

$$△\_{1}\left(p\right)=\left|\begin{matrix}\frac{E\_{1}}{p}+i\_{L}\left(0\right)⋅L&R\_{2}\\-\frac{u\_{C}\left(0\right)}{p }&R\_{2}+\frac{1}{pC}\end{matrix}\right|$$

$$△\_{1}\left(p\right)=\left(\frac{E\_{1}}{p}+i\_{L}\left(0\right)⋅L\right)\left(R\_{2}+\frac{1}{pC}\right)+R\_{2}\frac{u\_{C}\left(0\right)}{p }=$$

$$=\frac{E\_{1}R\_{2}}{p}+\frac{E\_{1}}{p^{2}C}+i\_{L}\left(0\right)⋅LR\_{2}+\frac{i\_{L}\left(0\right)⋅L}{pC}+R\_{2}\frac{u\_{C}\left(0\right)}{p }=$$

$$=\frac{1}{p^{2}C}\left(E\_{1}pR\_{2}C+E\_{1}+⋅Lp^{2}R\_{2}C+i\_{L}\left(0\right)⋅pL+u\_{C}\left(0\right)⋅pR\_{2}C\right)=$$

$$=\frac{1}{p^{2}C}\left(p^{2}LR\_{2}CI\_{L}\left(0\right)+p\left(E\_{1}R\_{2}C+L⋅i\_{L}\left(0\right)+R\_{2}C⋅u\_{C}\left(0\right)\right)+E\_{1}\right) $$

$$I\_{1}\left(p\right)=\frac{p^{2}LR\_{2}C⋅i\_{L}\left(0\right)+p\left(E\_{1}R\_{2}C+L⋅i\_{L}\left(0\right)+R\_{2}C⋅u\_{C}\left(0\right)\right)+E\_{1}}{p\left(p^{2}LCR\_{2}+p\left(CR\_{1}R\_{2}+L\right)+R\_{1}+R\_{2}\right)}=$$

Мы нашли изображение для тока в индуктивности$ I\_{1}\left(p\right)$. Найдём оригинал.

Согласно теореме о разложении, если изображение представлено в виде $X(p)=\frac{G\left(p\right)}{H\left(p\right)}$, причём многочлен $H\left(p\right)$ имеет *n* корней $p\_{1}…p\_{n}$, то оригинал можно представить в виде

$$x\left(t\right)=\sum\_{i=1}^{n}\frac{G\left(p\_{i}\right)}{H'\left(p\_{i}\right)}e^{p\_{i}t}.$$

Найдём корни$ H\left(p\right)$.

$$H\left(p\right)=0$$

$$p\left(p^{2}LCR\_{2}+p\left(CR\_{1}R\_{2}+L\right)+R\_{1}+R\_{2}\right)=0$$

Один из корней этого уравнения равен нулю. Выражение в скобках совпадает с левой частью характеристического уравнения, которое мы получили в решении классическим методом. Поэтому можно сразу записать все три корня уравнения $H\left(p\right)=0$:

$\left[\begin{array}{c}p\_{0}=0\\p\_{1}=-88409.56\\p\_{2}=-20773.17\end{array}\right.$

Найдём $H'\left(p\_{i}\right)$.

$$H\left(p\right)=p^{3}LCR\_{2}+p^{2}\left(CR\_{1}R\_{2}+L\right)+p(R\_{1}+R\_{2})$$

$$H^{'}\left(p\right)=3p^{2}LR\_{2}C+2p\left(L+R\_{1}R\_{2}C\right)+(R\_{1}+R\_{2})$$

$$H^{'}\left(p\_{0}\right)=3p\_{1}^{2}LR\_{2}C+2p\_{1}\left(L+R\_{1}R\_{2}C\right)+ R\_{1}+R\_{2}=R\_{1}+R\_{2}=132$$

$$H^{'}\left(p\_{1}\right)=3p\_{1}^{2}LR\_{2}C+2p\_{1}\left(L+R\_{1}R\_{2}C\right)+ R\_{1}+R\_{2}=429.785$$

$$H^{'}\left(p\_{2}\right)=3p\_{2}^{2}LR\_{2}C+2p\_{2}\left(L+R\_{1}R\_{2}C\right)+ R\_{1}+R\_{2}=-100.985$$

Найдём $G\left(p\_{i}\right)$.

$$G\left(p\right)=p^{2}LCR\_{2}⋅i\_{L}\left(0\right)+p\left(E\_{1}R\_{2}C+L⋅i\_{L}\left(0\right)+R\_{2}C⋅u\_{C}\left(0\right)\right)+E\_{1}$$

$$G\left(p\_{0}\right)=E\_{1}=75$$

$$G\left(p\_{1}\right)=41.6666$$

$$G\left(p\_{2}\right)=41.6666$$

$$\frac{G\left(p\_{0}\right)}{H^{'}\left(p\_{0}\right)}=B\_{0}=0.568181$$

$$\frac{G\left(p\_{1}\right)}{H^{'}\left(p\_{1}\right)}=B\_{1}=0.096948$$

$$\frac{G\left(p\_{2}\right)}{H^{'}\left(p\_{2}\right)}=B\_{2}=-0.412604$$

Таким образом, мы получили выражение для тока в индуктивности

$$i\_{L}\left(t\right)=B\_{0}+B\_{1}e^{p\_{1}t}+B\_{2}e^{p\_{2}t}$$

Найдём напряжение на индуктивности.

$$u\_{L}\left(t\right)=L\frac{di\_{L}\left(t\right)}{dt}=LB\_{1}p\_{1}e^{p\_{1}t}+LB\_{2}p\_{2}e^{p\_{2}t}=A\_{1}e^{p\_{1}t}+A\_{2}e^{p\_{2}t}$$

$$A\_{1}=LB\_{1}p\_{1}=-5.657$$

$$A\_{2}=LB\_{2}p\_{2}=5.657$$

$$u\_{L}\left(t\right)=5.657⋅\left(e^{-20773.17t}-e^{-88409.56t}\right).$$