К3

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Федеральное Государственное образовательное бюджетное учреждение высшего профессионального образования
Московский технический университет связи и информатики

Методические указания по решению задач по курсу «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА» в Mathcad

Направление подготовки 220700 «Автоматизация технологических процессов и производств»

Раздел «Кинематика»

Москва - 2013

Задание К-3.
ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ ПРИ ЗАДАНИИ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ В НЕЯВНОЙ ФОРМЕ

Движение точки задано уравнениями $f_1(x) = T_1(t)$ и $f_2(y) = T_2(t)$.

Требуется:

1) построить траекторию точки и определить ее положение на траектории в момент времени t_1;

2) получить зависимости скорости, ускорения точки и радиуса кривизны траектории от времени в интервале от 0 до $2t_1$ (с);

3) для момента времени $t = t_1$ найти скорость, полное, нормальное и касательное ускорения точки, а также радиус кривизны траектории.

Необходимые для решения данные приведены в табл. К3.1.

Во всех вариантах при решении системы нелинейных уравнений принять следующие начальные значения переменных: $x = 0$, $y = 1$.

Таблица К3.1

№	$f_1(x)$	$f_2(y)$	$T_1(t)$	$T_2(t)$	t_1, с
1	$x^5 + x^3\sin x - \cos^2 x$	$y^3 + 0{,}5\cos(y^2) + 1$	$\sin(t^3) - 1$	$\sin(\pi t^2) \cdot t$	0,5
2	$x + x\cos x$	$y + \sqrt{y}\cos(y/3)$	$0{,}1t^2$	$t + 0{,}5t^{0{,}5}$	1,8
3	$(x + 0{,}3)^3 + (x + 0{,}2)^2$	$2y^2 - 3y$	$2t^{0{,}6} + e^{-2t} - 1$	$\sin(2t - 1)$	2
4	$e^{2x} + 2x$	$2y$	$2t^{2{,}5} - 1$	$t\sin(2t)$	2
5	$e^{2x} - 0{,}5x^2$	$2y^2 + 3y$	$2t^2 + 1$	$\sin(3t)$	2,5
6	$e^{2x} - e^{-2x}$	$0{,}5y^3 - 3y$	$3t^2 + 1$	$\sin(2{,}5t)$	2,2
7	$e^{-x^2} - 0{,}5x$	$0{,}5y^2 + 3y$	$\cos(\pi t) - t$	t^2	2,3
8	$e^{-0{,}2x^2} + x$	$1{,}5y^2 + 0{,}5y$	$\cos(\pi t) - t$	$(t + 1)^{1{,}5}$	1,9
9	$e^{-0{,}8x} - xe^{-0{,}05x} + 0{,}4x$	$y^5 + 4y + 1$	$t/3 - \sin(\pi t^2/3)$	$(t^{3{,}5} - t^{1{,}2} + 2{,}5)^{1{,}6}$	1,5
10	$e^{1{,}8x-2{,}5} - 1{,}4x^{-2}$	$y^2 + 3y^{1{,}3}$	$t\sin(0{,}5\pi t^{1{,}2}) - 0{,}8t^{0{,}01}$	$2t + 0{,}5t^2$	1,7
11	$0{,}4(x + 1)^{1{,}5} + x$	$y^2 - 2{,}5y$	$1{,}5\sin(\pi t^2/5) + 2\sqrt{t}$	$4{,}5\ln(0{,}5t + 1) - 1{,}5$	1,8
12	$\sqrt{x^3 + 2x^2} + x^2 - 5$	$1{,}3^{y+2} + 1{,}5(y - 2)^3$	$6t^5 - 5t^2$	$2{,}5\sqrt[3]{t + 0{,}3} + 1$	1
13	$\sqrt[3]{x^2 + 3 - x} - 4$	$3\ln^2(y + 2)$	$5t^2 + 6\cos t$	$\sqrt{2t} + 1$	1,5
14	$5x + \operatorname{tg} x$	$2(y + 3)\cos y$	$5t^2 - 6t$	$2\sin t + 1$	2
15	$4x^2 - 2\cos(x + 1) + x$	$2(y^3 + 4)\cos\sqrt{y}$	$5t^3 - 2{,}5t^{1{,}5}$	$2{,}5\sin t^2 + t$	0,8
16	$2\operatorname{tg}(\sqrt{x} - 0{,}4) + \sqrt{x}$	$2\sqrt{y^4 + 4}\cos y^{1{,}2}$	$4\sqrt{t} + 2t^{1{,}2} - 1$	$2{,}2\sin(t^2 + 0{,}5) + 0{,}6t$	1
17	$2x^2 + x - 0{,}4$	$2\sqrt{y^2 + 8}\cos(2y^{1{,}3})$	$4t^2 + 1$	$2\sin(t^2 + 0{,}8) + t$	1,2
18	$x\sin(2x) + \sqrt{x}$	$e^y + \cos(2y)$	$t^{0{,}65}$	$\sin(t + 0{,}3) - 1$	1,1
19	$(\sin(x + 0{,}2))/(x^2 - 1)$	$\cos(y - 0{,}1) + y$	$e^{-2t} + 2t - 2$	$\cos t - 1$	3
20	$3x^2 - 4\cos(x + 1{,}4) + x$	$\cos\sqrt{y}$	$5t^3 - 2{,}5t^{1{,}5}$	$2\sin t^2 + t$	0,9
21	$(\sin x)/(x^2 + 2x) + x$	$\cos(y + 0{,}2) - 2y$	$(\ln(t + 1))^2 + 2$	$2\sin t - 1$	5
22	$x^3 + 2$	$0{,}5\cos(y - 0{,}3) + y$	$t^2 + 3$	$2{,}6\sin t + 0{,}5$	2
23	$x^3 + 2\sin x$	$0{,}1\cos(y - 0{,}3) + 0{,}3y$	$t^2 + 1$	$2\sin t$	3
24	$3\ln(x + 1{,}9) + x^3\sin(x^4)$	$3\cos(y^{0{,}2} + 5{,}3y) + 2{,}5y^{0{,}3}$	$0{,}5\sin^2 t - 1{,}3$	$1{,}7\sqrt{t^3} - 1$	1,2
25	$x^5 + x$	$3\sin y + 2{,}5y^2$	$4t^2 + 1$	$3t + 1$	1,5
26	$2x^3 + x - 2$	$3\sin(y + 0{,}5) + 2y^2$	$t^3 + 1$	$3t^2 + 1$	2
27	$3x^2 + 2x - 3$	$2\sin y + y^{1{,}5}$	$2t^{2{,}5} + t$	$4t^{1{,}3}$	2
28	$3x^2 + x$	$2\cos(y - 1) + y$	$10t + 2$	$t - 0{,}5t^3$	1
29	$2x^{2{,}5} + x$	$2\cos^2(y - 1) + y^3$	$8t + 4$	$2t - 0{,}5t^2$	3
30	$\sqrt{x} + 2x\sin x + 1$	$0{,}1\sin(2y - 0{,}5) + y$	$\sqrt{t} + 1$	$2\cos t$	4

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Исходные данные:

$$f_1(x)=\sqrt{x}+x\cdot\sin x,\ \ T_1(t)=t^{0,8},$$
$$f_2(y)=y+e^y,\ \ T_2(t)=t+\sin\pi t,\ \ t_1=1{,}1\ \text{с}.$$

Решение.

1. *Построение траектории точки и определение ее положения на траектории в момент времени t_1.*

Для построения траектории точки необходимо получить зависимости $x=x(t)$ и $y=y(t)$ ее координат от времени. В условии задачи уравнения движения заданы в неявной форме

$$f_1(x)=T_1(t)\ \text{ и }\ f_2(y)=T_2(t), \tag{К3.1}$$

или

$$\begin{cases}\sqrt{x}+x\cdot\sin x-t^{0,8}=0,\\ y+e^y-t-\sin\pi t=0.\end{cases} \tag{К3.2}$$

Задаваясь временем t, можно численно решить систему уравнений (К3.2) и найти значения x и y, соответствующие каждому моменту времени. Тем самым будут получены таблицы значений x и y, представляющие собой зависимости $x(t)$ и $y(t)$ координат точки от времени. По этим данным (по точкам) легко строится линия, являющаяся траекторией точки. Для определения положения точки на траектории при $t=t_1$ нужно выбрать из таблиц значений x и y значения, соответствующие моменту времени t_1, и, отложив координаты на чертеже, показать искомое положение точки.

2. *Определение зависимостей скорости, ускорения и радиуса кривизны точки от времени.*

Вектор скорости точки:

$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}.$$

Вектор ускорения точки:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}.$$

В этих формулах $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — орты осей x и y; v_x, v_y, a_x, a_y — проекции скорости и ускорения точки на оси координат x и y.

Проекции скорости и ускорения v_x, v_y, a_x, a_y определим по формулам

$$v_x(t,x)=\frac{[T_1(t)]'_t}{[f_1(x)]'_x},\ \ v_y(t,y)=\frac{[T_2(t)]'_t}{[f_2(y)]'_y}, \tag{К3.3}$$

$$a_x(t,x)=\frac{[T_1(t)]''_t([f_1(x)]'_x)^2-[f_1(x)]''_x([T_1(t)]'_t)^2}{([f_1(x)]'_x)^3}, \tag{К3.4}$$

$$a_y(t,y)=\frac{[T_2(t)]''_t([f_2(y)]'_y)^2-[f_2(y)]''_y([T_2(t)]'_t)^2}{([f_2(y)]'_y)^3}. \tag{К3.5}$$

Вычисляя производные, получаем

$$v_x(t,x)=\frac{0{,}8}{t^{0{,}2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sin x+x\cdot\cos x\right)},\quad v_y(t,y)=\frac{\pi\cos(\pi t)+1}{1+e^y},$$

$$a_x(t,x)=\frac{\frac{-0{,}16}{t^{1{,}2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sin x+x\cdot\cos x\right)^2-\left(\frac{-1}{4\sqrt{x^3}}+2\cos x-x\cdot\sin x\right)\left(\frac{0.8}{t^{0{,}2}}\right)^2}{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sin x+x\cdot\cos x\right)^3},$$

$$a_y(t,y)=\frac{-\pi^2\sin(\pi t)(1+e^y)^2-e^y(\pi\cos(\pi t)+1)^2}{(1+e^y)^3}.$$

Модули скорости и полного ускорения:

$$v(t,x,y)=\sqrt{v_x(t,x)^2+v_y(t,y)^2},\qquad (К3.6)$$

$$a(t,x,y)=\sqrt{a_x(t,x)^2+a_y(t,y)^2}.\qquad (К3.7)$$

Касательное ускорение:

$$a_\tau(t,x,y)=\frac{v_x(t,x)a_x(t,x)+v_y(t,y)a_y(t,y)}{v(t,x,y)}.\qquad (К3.8)$$

Нормальное ускорение:

$$a_n(t,x,y)=\sqrt{a(t,x,y)^2-a_\tau(t,x,y)^2}.\qquad (К3.9)$$

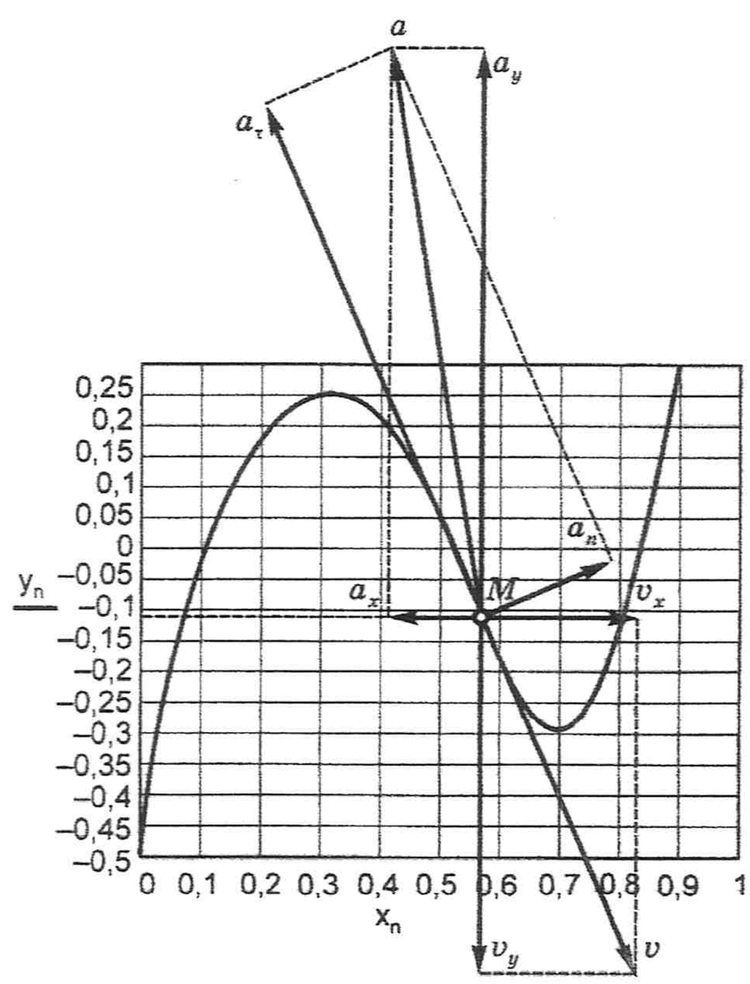

Рис. К3.1

Радиус кривизны траектории:

$$\rho(t,x,y)=\frac{v(t,x,y)^2}{a_n(t,x,y)}.\qquad (К3.10)$$

Пользуясь формулами (К3.3)–(К3.10), нетрудно построить графики зависимостей скорости, касательного, нормального, полного ускорений и радиуса кривизны траектории точки от времени. Подставляя в эти формулы $t=t_1$, получим значения этих величин в заданный момент времени.

На рис. К3.1 показан участок траектории точки, положение точки на этой траектории, построены векторы ее скорости и ускорения в заданный момент времени. Масштабы для расстояний, для скоростей и для ускорений выбраны различными (из соображений компактности чертежа).

Результаты расчета:

$$x = 0{,}580 \text{ м},\ \ y = -0{,}107 \text{ м},\ \ v_x = 0{,}465 \text{ м/с},\ \ v_y = -1{,}047 \text{ м/с},$$
$$v = 1{,}146 \text{ м/с},\ \ a_x = -0{,}185 \text{ м/с}^2,\ \ a_y = 1{,}088 \text{ м/с}^2,$$
$$a_\tau = -1{,}069 \text{ м/с}^2,\ \ a_n = 0{,}272 \text{ м/с}^2,\ \ a = 1{,}103 \text{ м/с}^2,\ \ \rho = 4{,}830 \text{ м}.$$

Вектор скорости точки M строим по его составляющим $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$. При этом вектор скорости должен быть направлен вдоль касательной к траектории.

Вектор ускорения $\vec{a}$ строим по его составляющим $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$. После этого по касательной к траектории откладываем касательное ускорение $\vec{a}_\tau$.

Его направление в данном случае противоположно направлению скорости точки, так как при вычислении a_τ по формуле (К3.8) получен знак «–». Перпендикулярно касательной в сторону вогнутости траектории откладываем вектор нормального ускорения $\vec{a}_n$. Проверкой правильности расчета является выполнение равенства

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau.$$

Расчет в Mathcad.

Приводим рабочий лист расчета рассмотренного примера.

Вводим исходные данные задачи:

$$f1(x) := \sqrt{x} + x \cdot \sin(x) \quad f2(y) := y + e^y$$
$$T1(t) := t^{0.8} \quad T2(t) := (\sin(\pi \cdot t)) + t \quad t1 := 1.1 \quad n0 = 1000$$

Получение уравнений траектории в координатной форме ($x = x(t)$; $y = y(t)$):

$$y := 0 \quad dt := \frac{2 \cdot t1}{n0} \quad n := 1..n0 \quad t_n := dt \cdot n \quad dt = 0.002$$

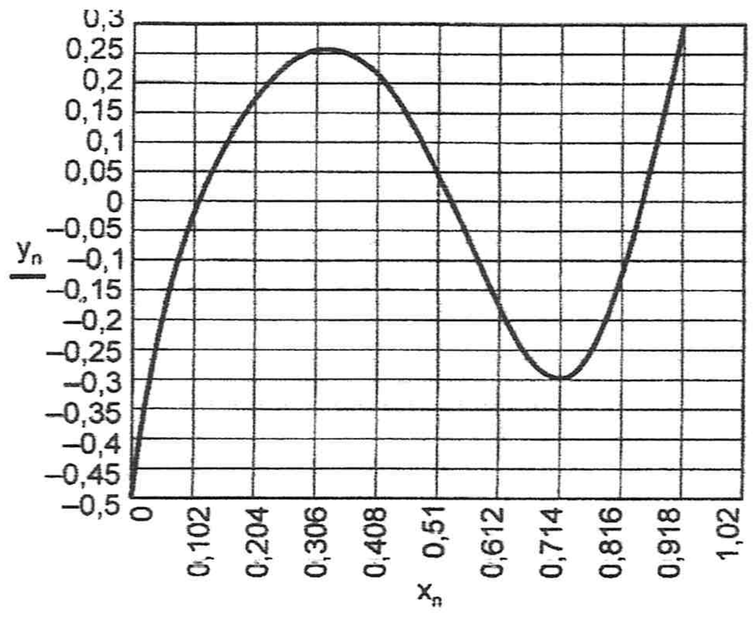

Рис. К3.2

Для каждого момента времени t_n ($n = 1, 2, \ldots, n_0$) численно решаем две системы нелинейных уравнений $f_1(x) - T_1(t) = 0$ и $f_2(y) - T_2(t) = 0$ и находим значения x и y, соответствующие каждому моменту времени. Блоки решения нелинейных уравнений:

$$y := 1 \quad \text{Given} \quad f2(y) - T2(t) = 0$$
$$fy(t) := \text{Find}(y) \quad y_n := fy(t_n)$$
$$x := 0 \quad \text{Given} \quad f1(x) - T1(t) = 0$$
$$fx(t) := \text{Find}(x) \quad x_n := fx(t_n)$$

По найденным значениям координат строим траекторию точки ($x = x(t)$, $y = y(t)$) (рис. К3.2).

Подготовим производные:

$$df1(x) := \frac{d}{dx} f1(x) \quad df2(y) := \frac{d}{dy} f2(y) \quad ddf1(x) := \frac{d}{dx} df1(x) \quad ddf2(y) := \frac{d}{dy} df2(y)$$
$$dT1(t) := \frac{d}{dx} T1(x) \quad dT2(y) := \frac{d}{dt} T2(t) \quad ddT1(t) := \frac{d}{dt} dT1(t) \quad ddT2(t) := \frac{d}{dt} dT2(t)$$

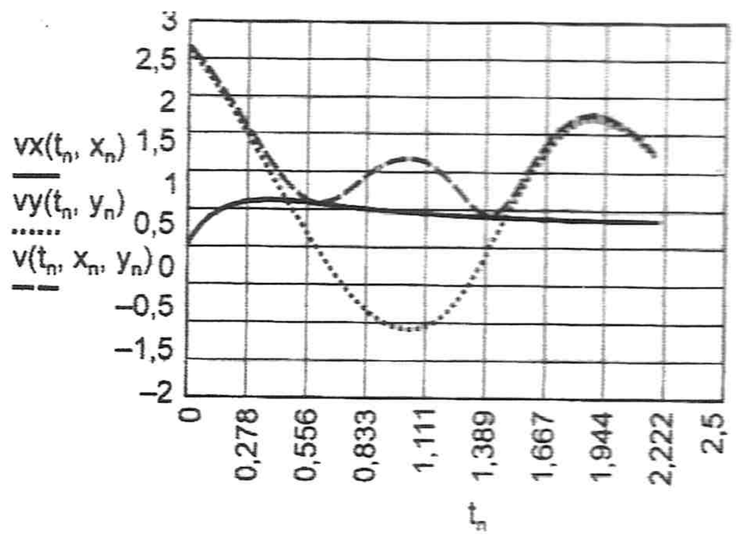

Рис. К3.3

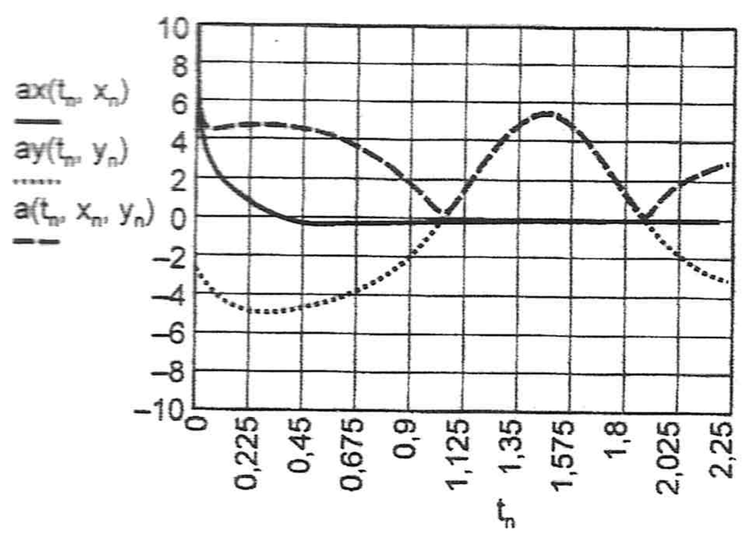

Рис. К3.4

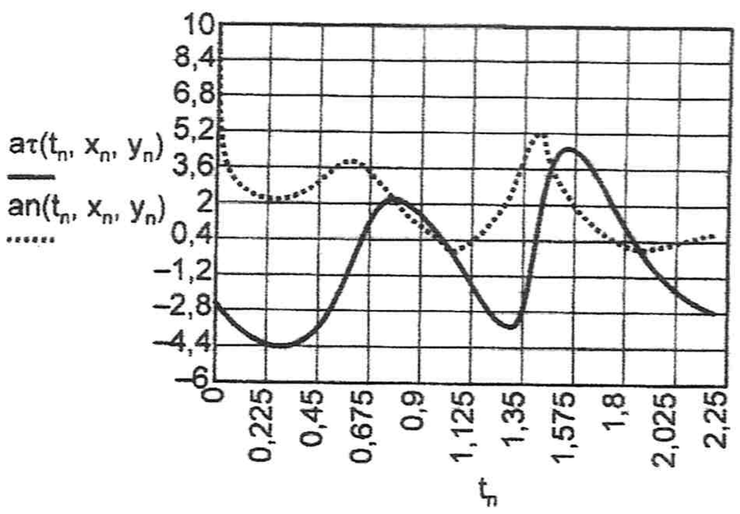

Рис. К3.5

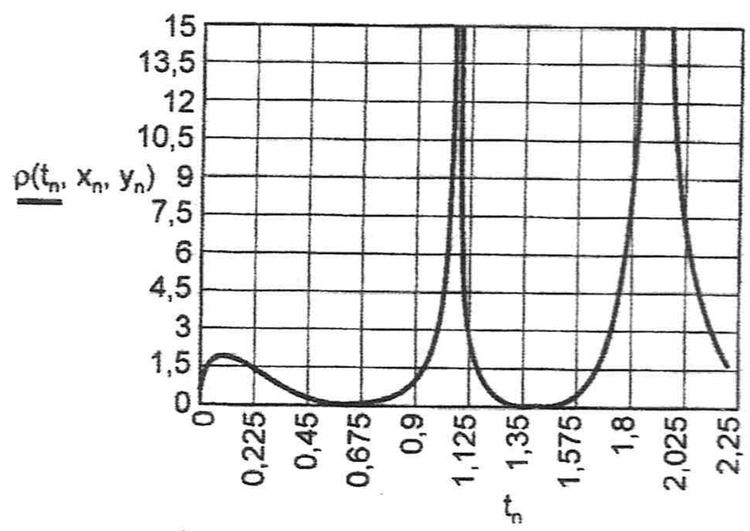

Рис. К3.6

Скорость точки находим по формулам (К3.3) (К3.6) (рис. К3.3):

$$vx(t,x) := \frac{dT1(t)}{df1(x)} \quad vy(t,y) := \frac{dT2(t)}{df2(y)} \quad v(t,x,y) := \sqrt{vx(t,x)^2 + vy(t,y)^2}$$

Ускорение точки определяем по формулам (К3.4) (К3.7) (рис. К3.4):

$$ax(t,x) := \frac{ddT1(t)\cdot(df1(x))^2 - ddf1(x)\cdot(dT1(t))^2}{(df1(x))^3} \quad ay(t,y) := \frac{ddT2(t)\cdot(df2(y))^2 - ddf2(y)\cdot(dT2(t))^2}{(df2(y))^3}$$

$$a(t,x,y) := \sqrt{ax(t,x)^2 + ay(t,y)^2}$$

Касательное и нормальное ускорения (К3.8), (К3.9) (рис. К3.5):

$$a\tau(t,x,y) := \frac{vx(t,x)\cdot ax(t,x) + vy(t,y)\cdot ay(t,y)}{v(t,x,y)} \quad an(t,x,y) := \sqrt{a(t,x,y)^2 - a\tau(t,x,y)^2}$$

Радиус кривизны траектории (К3.10) (рис. К3.6):

$$\rho(t,x,y) := \frac{(v(t,x,y))^2}{an(t,x,y)}$$

Кинематические параметры в заданный момент времени:

$$n := 500 \quad t1 := t_n \quad t1 = 1.1$$

Координаты точки (м):

$$x_n = 0.58 \quad y_n = -0.107$$

Скорость точки (м/с):

$$vx(t_n,x_n) = 0.465 \quad vy(t_n,y_n) = -1.047 \quad v(t_n,x_n,y_n) = 1.146$$

Ускорение точки (м/с^2):

$$ax(t_n,x_n) = -0.185 \quad ay(t_n,y_n) = 1.088 \quad a(t_n,x_n,y_n) = 1.103$$
$$a\tau(t_n,x_n,y_n) = -1.069 \quad an(t_n,x_n,y_n) = 0.272$$

Радиус кривизны траектории (м):

$$\rho(t_n,x_n,y_n) = 4.83$$

Контрольные вопросы и задания

1. Как по данным задачи построить траекторию точки?
2. По каким формулам вычисляются проекции скорости точки на оси x и y?
3. По каким формулам вычисляются проекции ускорения точки на оси x и y?
4. Как по графику зависимости модуля скорости от времени определить знак касательного ускорения?
5. Постройте зависимости координат точки от времени.
6. Как по графику касательного ускорения определить промежутки времени, в течение которых точка двигалась ускоренно? Замедленно?
7. Как по графику нормального ускорения найти точки перегиба траектории?
8. Можно ли по графику радиуса кривизны найти точки перегиба траектории?
9. Можно ли по графику радиуса кривизны траектории найти точки, в которых нормальное ускорение равно нулю?
10. Постройте зависимость скорости точки от ее координаты x.