

Получаем

$$L = 0$$

Дешифровка L :

$$im := \text{floor}\left(\frac{L}{1000}\right) \quad jm := L - 1000 \cdot im \quad im = 0 \quad jm = 0$$

Оптимальные значения параметров:

$$d_{opt} := 1 + \Delta d \cdot im \quad P_{opt} := 5 + \Delta P \cdot jm \quad d_{opt} = 1 \quad P_{opt} = 5$$

Наименьшее значение реакции R_A при найденных значениях P_{opt} и d_{opt} :

$$F(im, jm) = 4.92$$

Получаем

$$R_A = 4,92 \text{ кН.}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Нарисуйте виды опор и их реакции.
2. Какая система сил приложена к конструкции? Каковы условия равновесия сил, приложенных к ней?
3. Запишите виды систем уравнений равновесия произвольной плоской системы сил и ограничения, накладываемые на эти уравнения.
4. Что называется главным вектором и главным моментом произвольной системы сил?
5. В чем заключается отличие между главным вектором системы сил и равнодействующей этой системы?
6. Как определяется модуль и направление главного вектора системы сил?
7. Как определяется модуль и направление главного момента системы сил?
8. Какие задачи статики называются статически определимыми, а какие — статически неопределимыми? Каково необходимое условие статической определимости задачи?
9. Найдите пределы M_1 и M_2 изменения момента M ($M_1 \leq M \leq M_2$), чтобы модуль реакции R_B не превышал указанного значения R_{Bm} .
10. Найдите пределы q_1 и q_2 изменения интенсивности равномерно распределенной нагрузки q ($q_1 \leq q \leq q_2$), чтобы модуль реакции R_B не превышал указанного значения R_{Bm} .

Задание С-3. **МАТРИЧНЫЙ СПОСОБ РАСЧЕТА ПЛОСКИХ ФЕРМ**

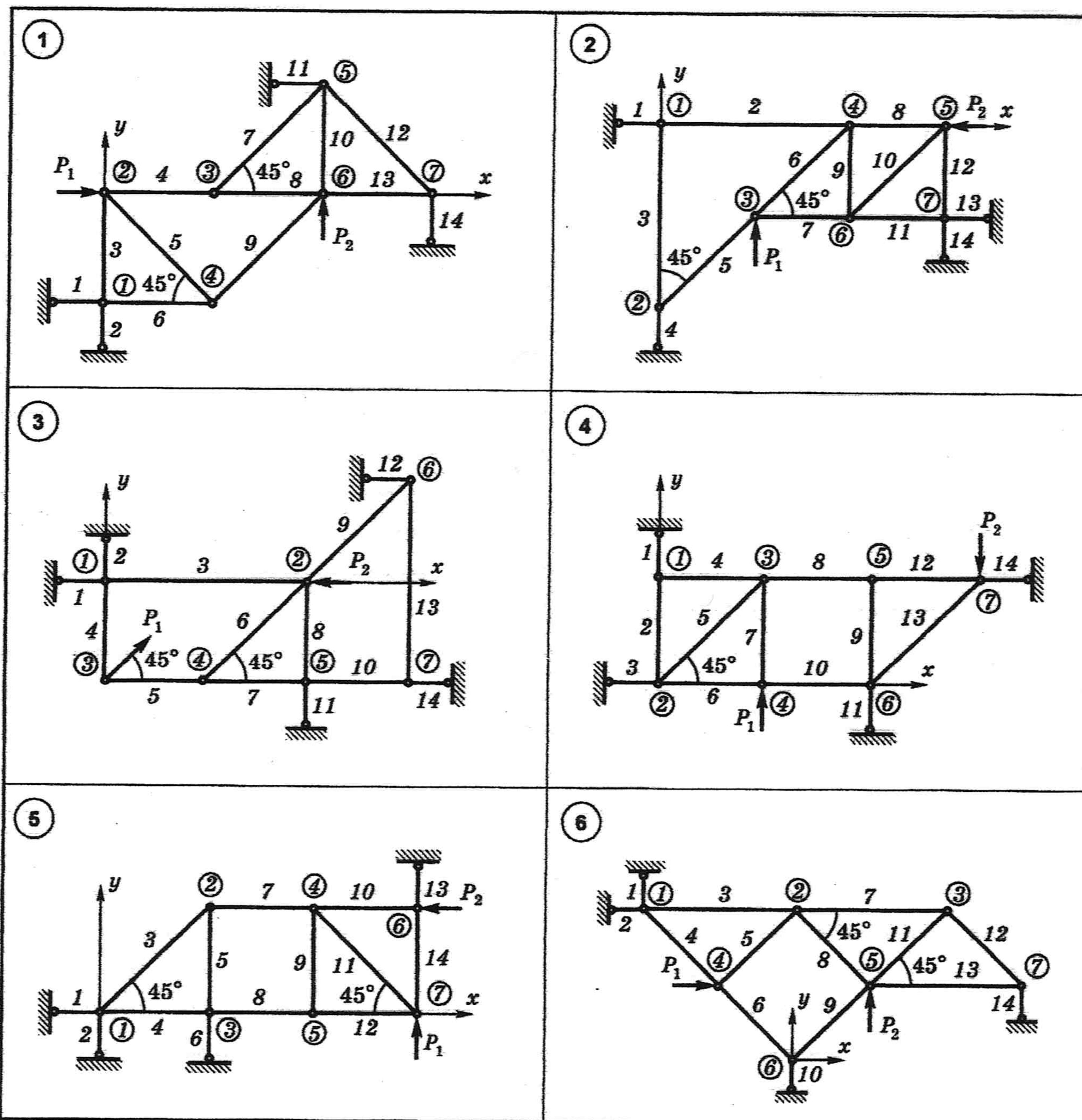
Определить усилия в стержнях плоской фермы от заданной нагрузки. Схемы ферм показаны в «Рисунках к заданию С-3». Необходимые для расчета данные приведены в табл. С3.1.

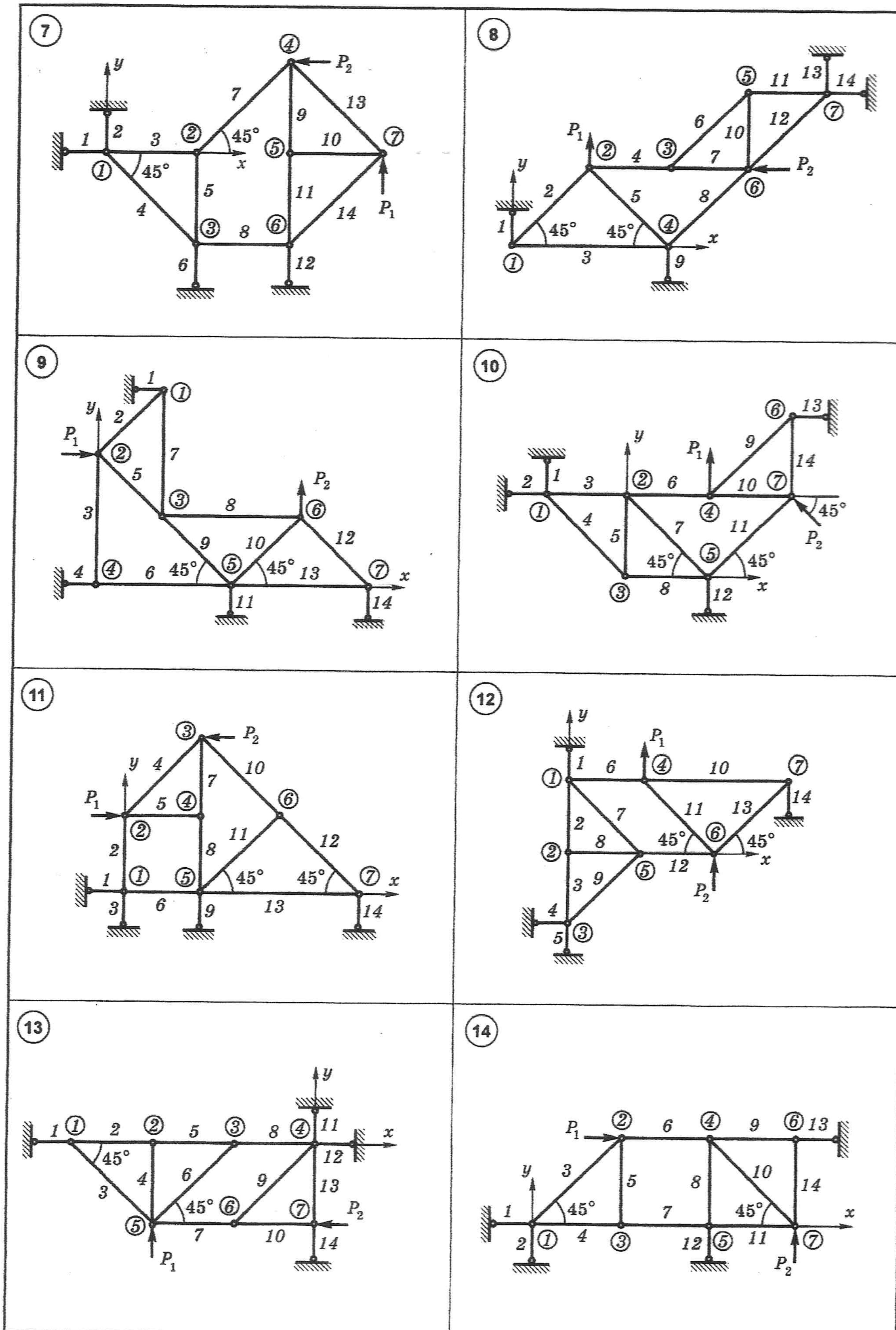
При выполнении задания следует использовать приложение 1 «Матричный способ расчета плоских ферм».

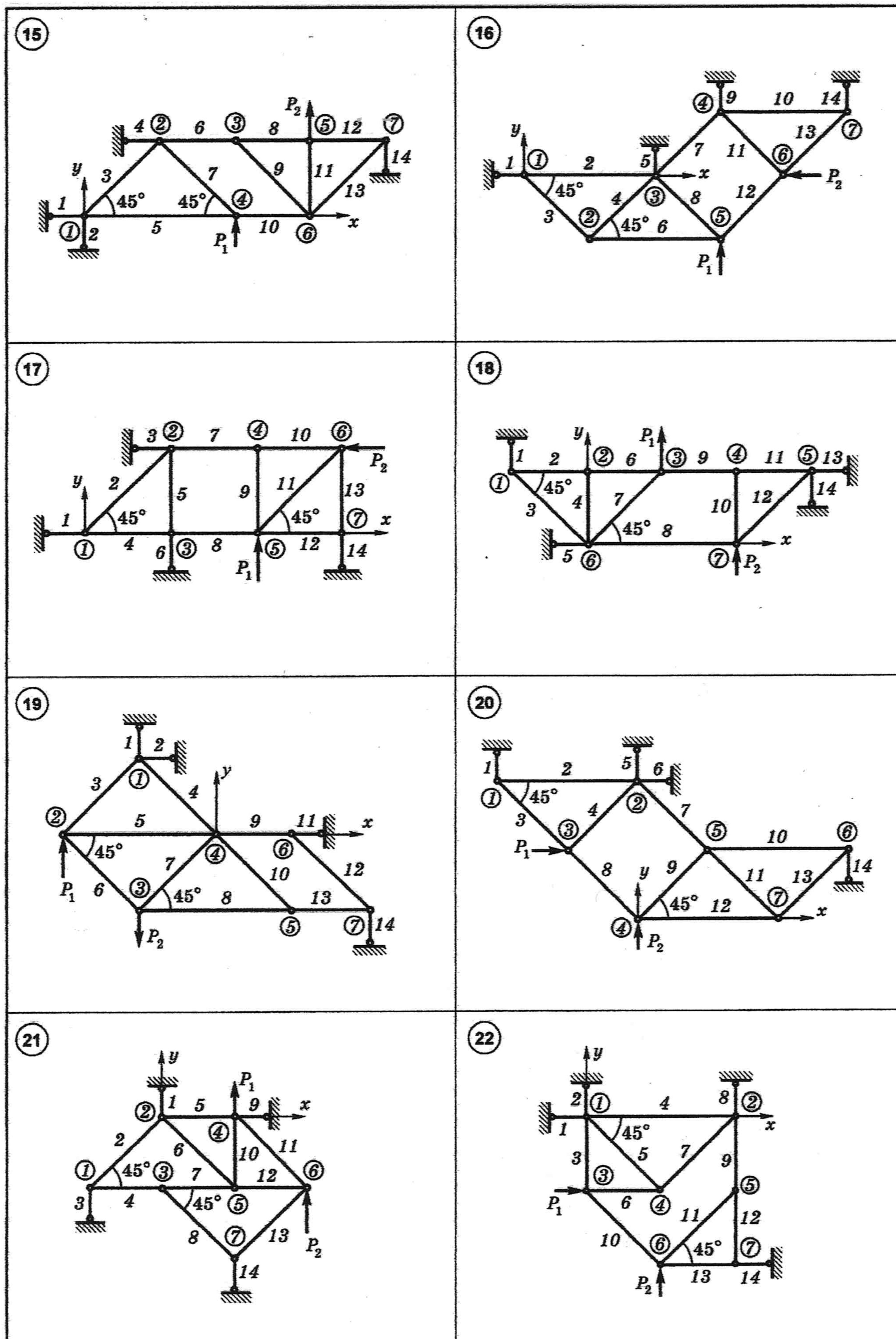
Таблица С3.1

<i>№</i>	<i>P₁</i> , кН	<i>P₂</i> , кН	<i>№</i>	<i>P₁</i> , кН	<i>P₂</i> , кН	<i>№</i>	<i>P₁</i> , кН	<i>P₂</i> , кН
1	15	10	11	13	16	21	23	17
2	10	15	12	22	15	22	18	22
3	20	20	13	25	30	23	24	16
4	25	10	14	13	18	24	15	25
5	15	25	15	23	16	25	20	20
6	20	12	16	20	10	26	21	19
7	10	16	17	21	18	27	13	20
8	12	25	18	10	20	28	14	16
9	16	15	19	15	15	29	30	20
10	17	14	20	26	14	30	26	14

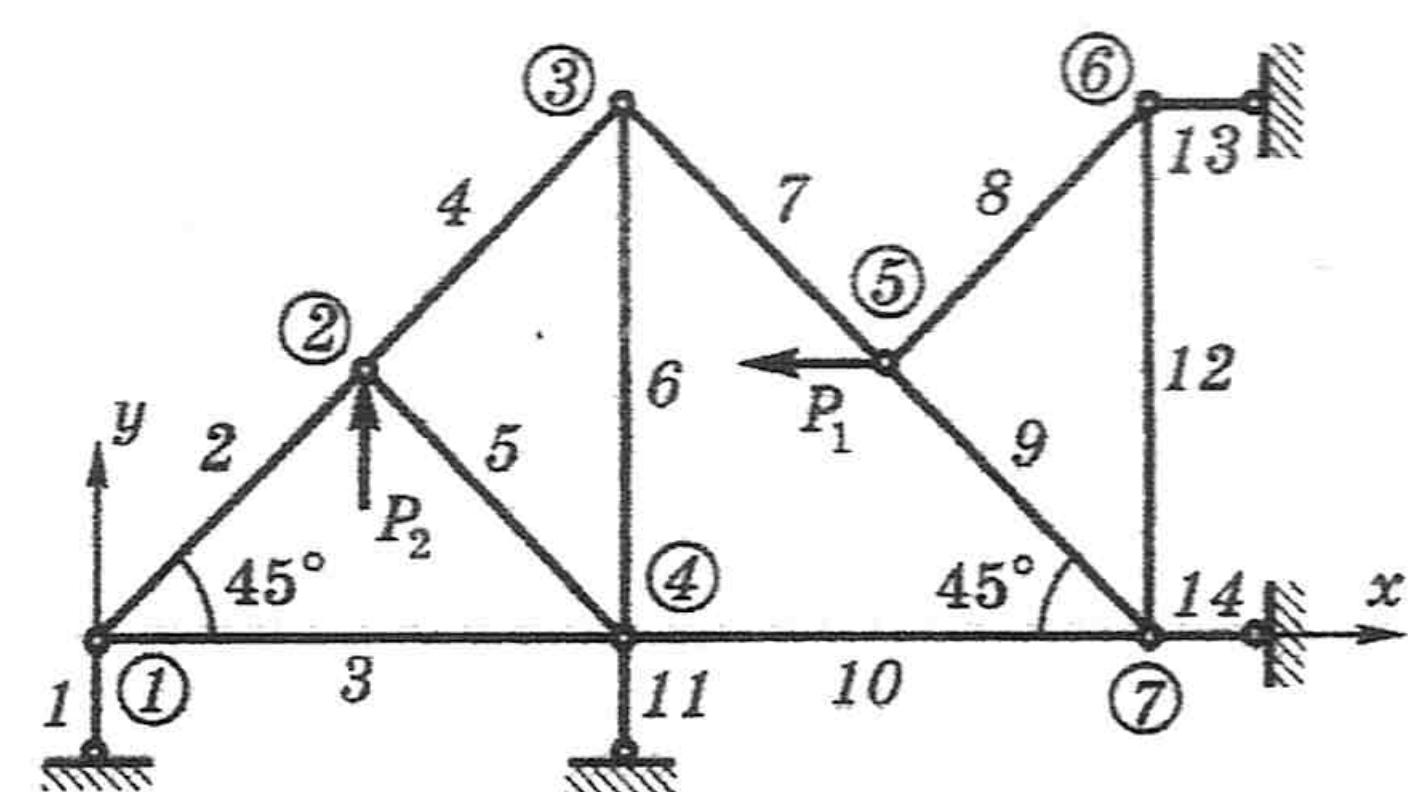
РИСУНКИ К ЗАДАНИЮ С-3



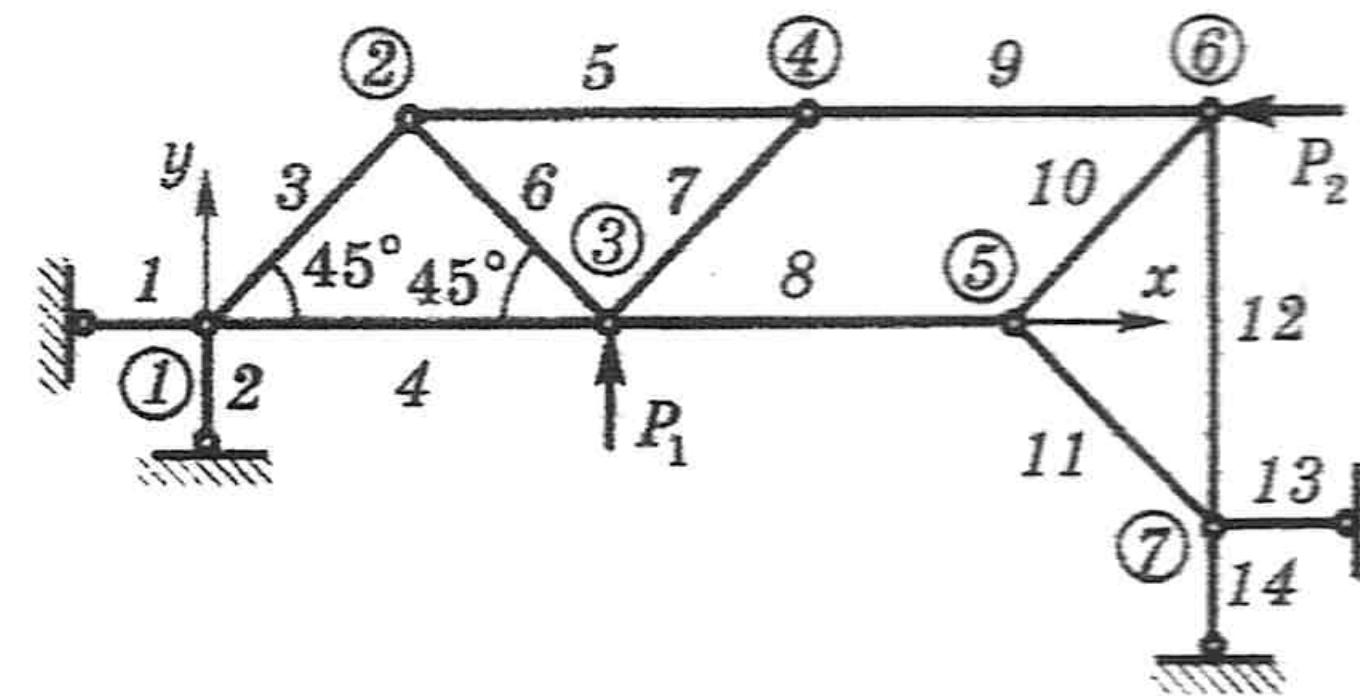




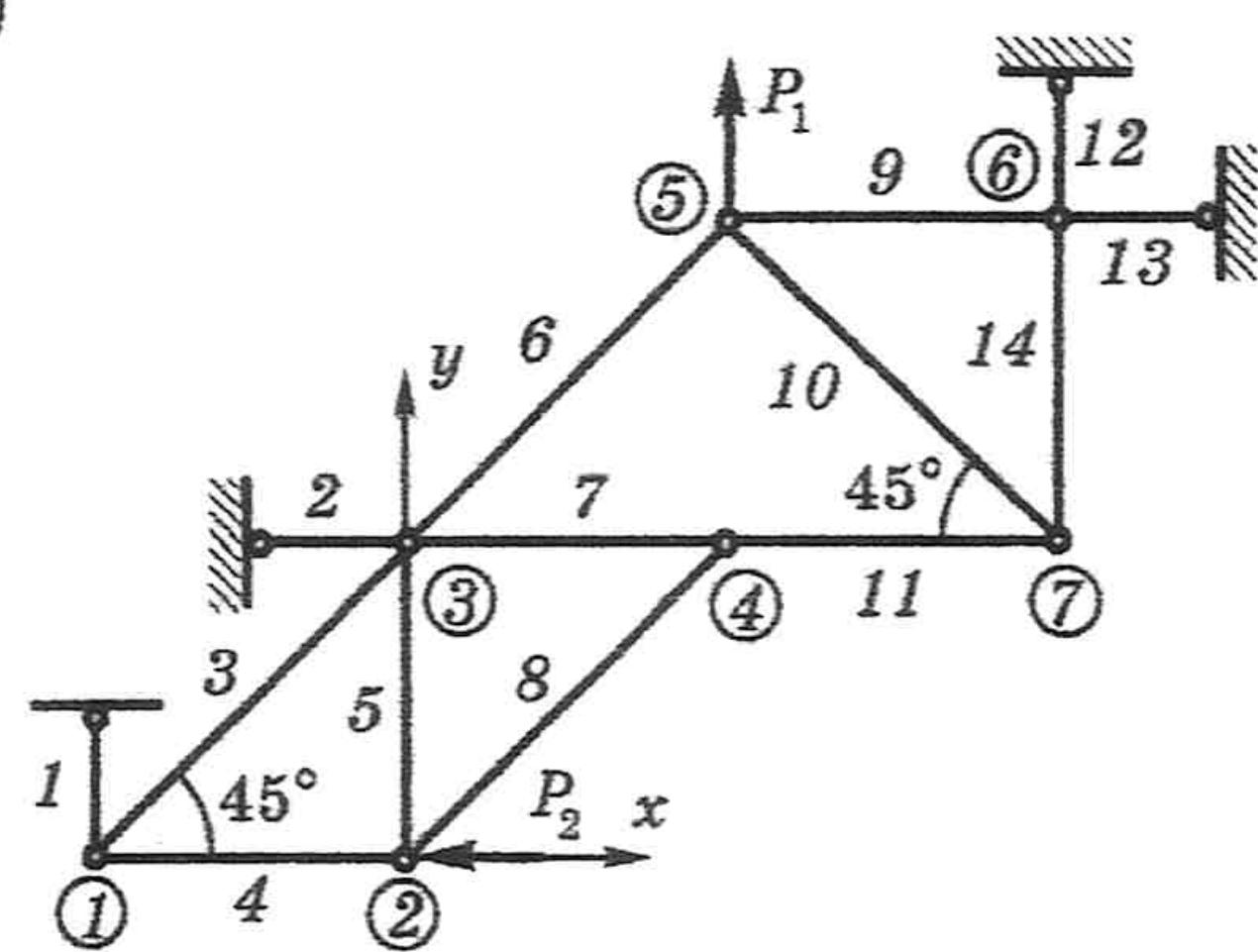
(23)



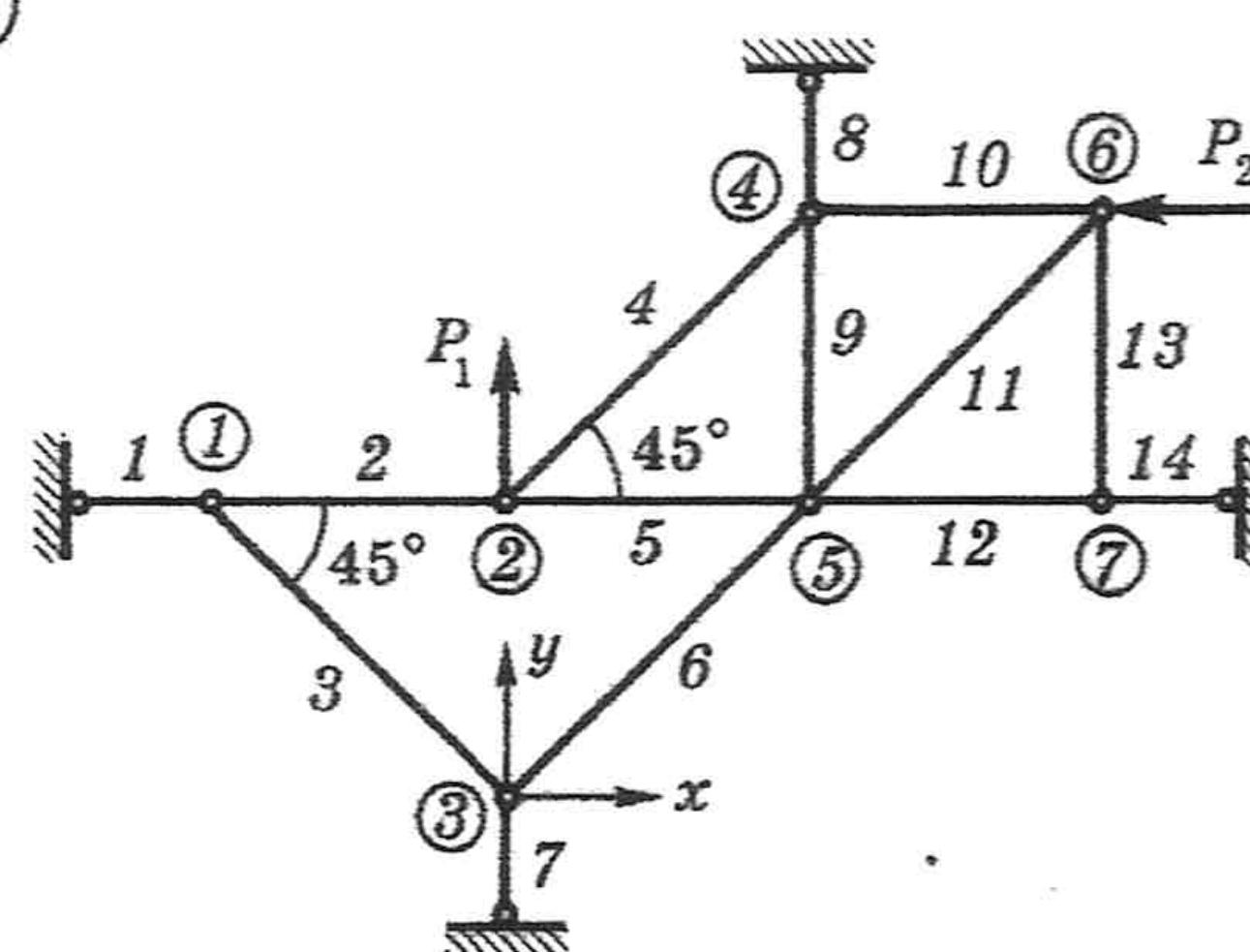
(24)



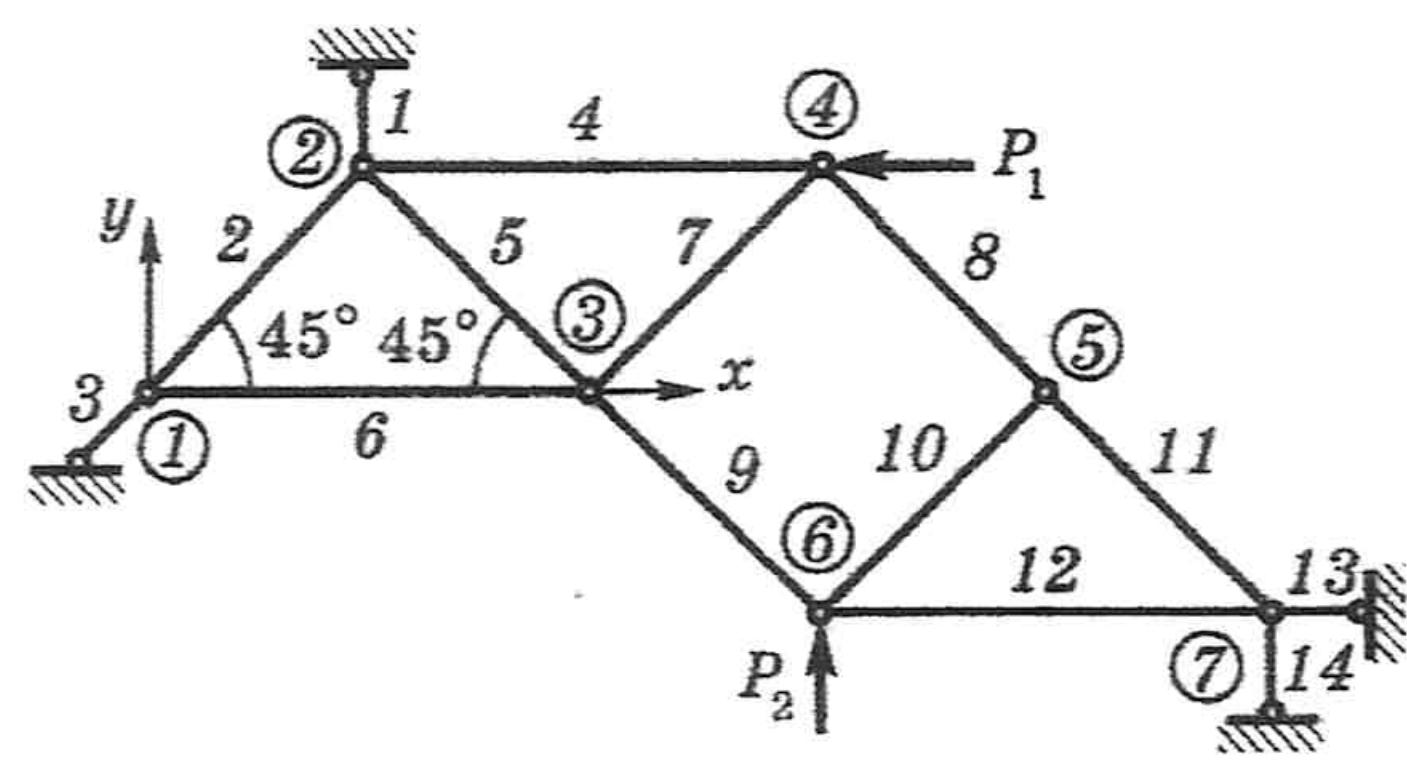
(25)



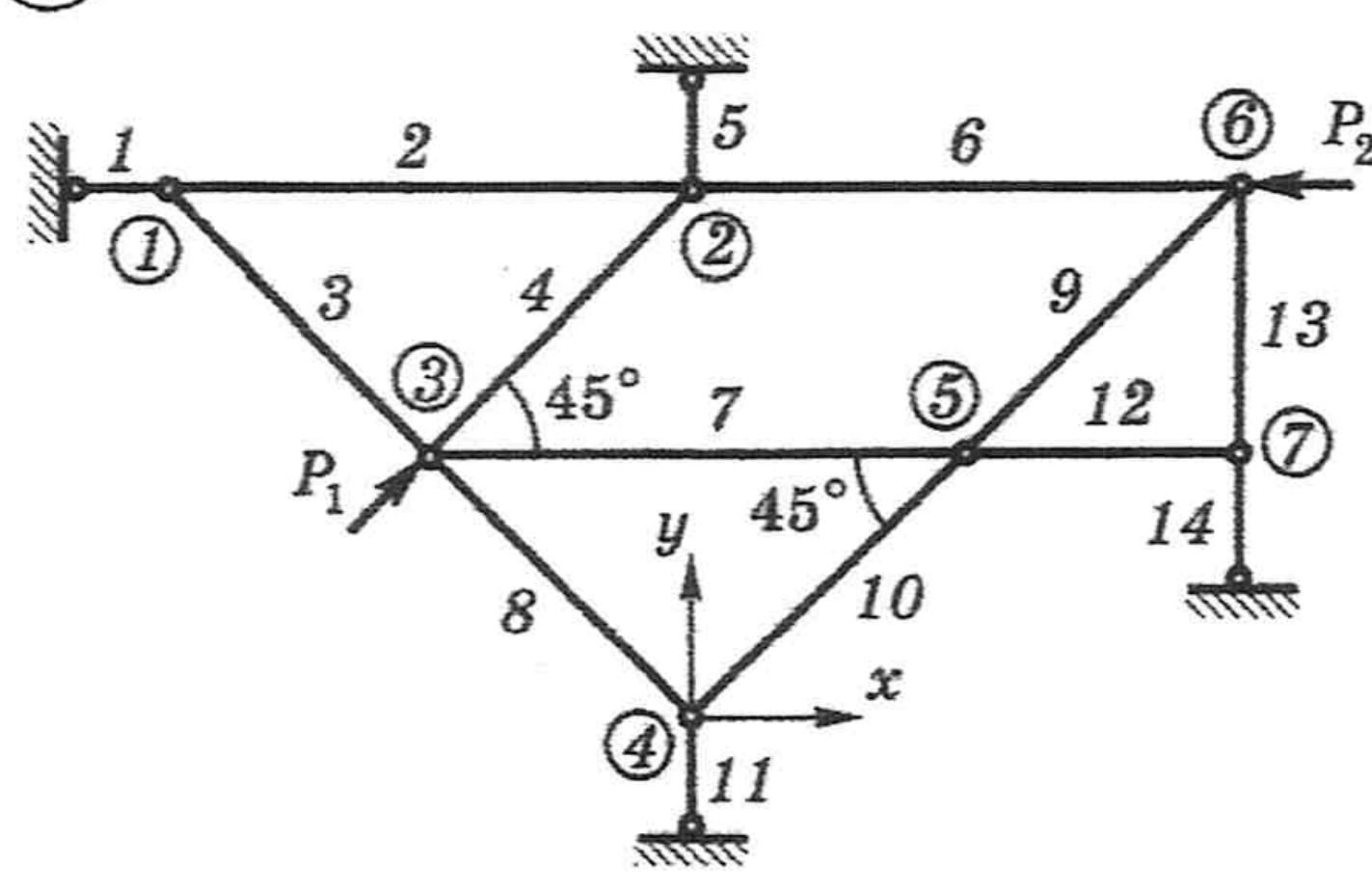
(26)



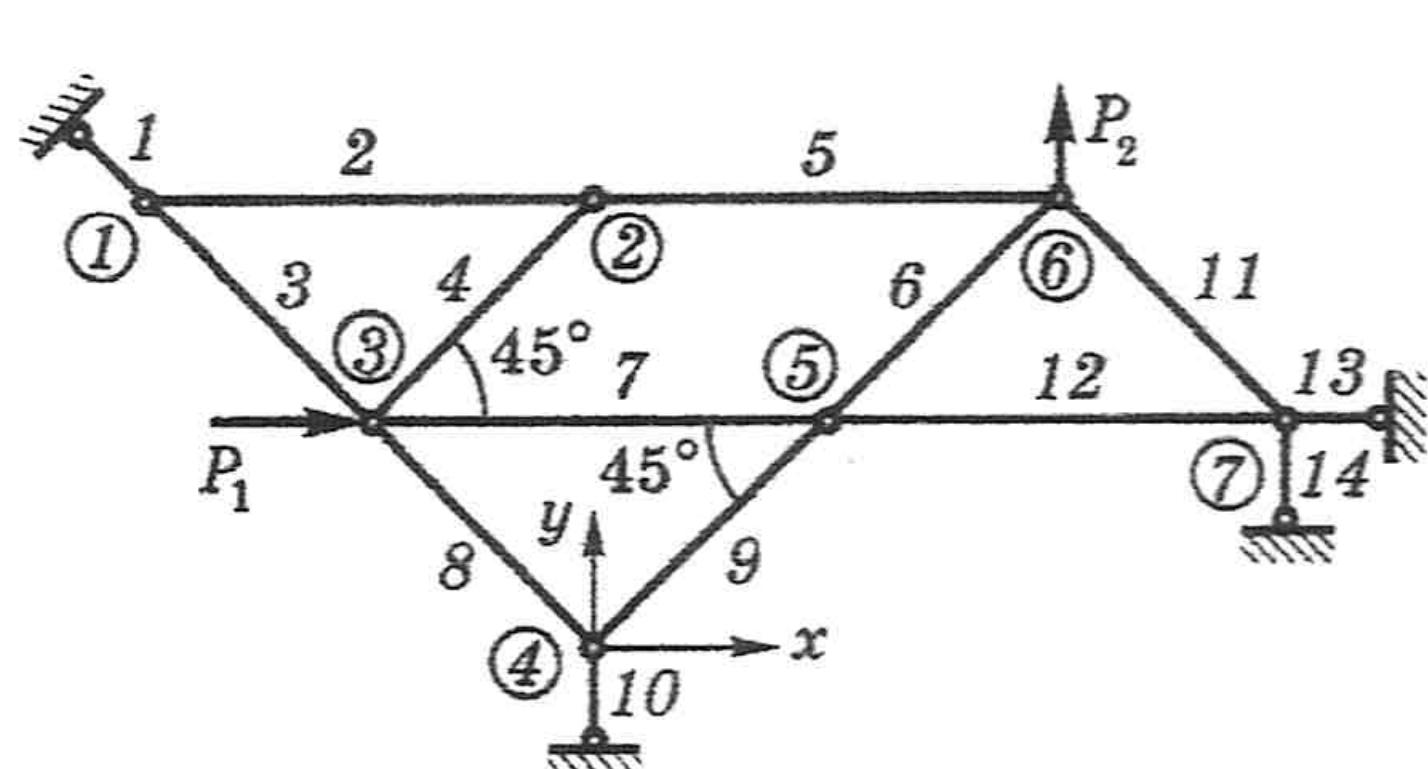
(27)



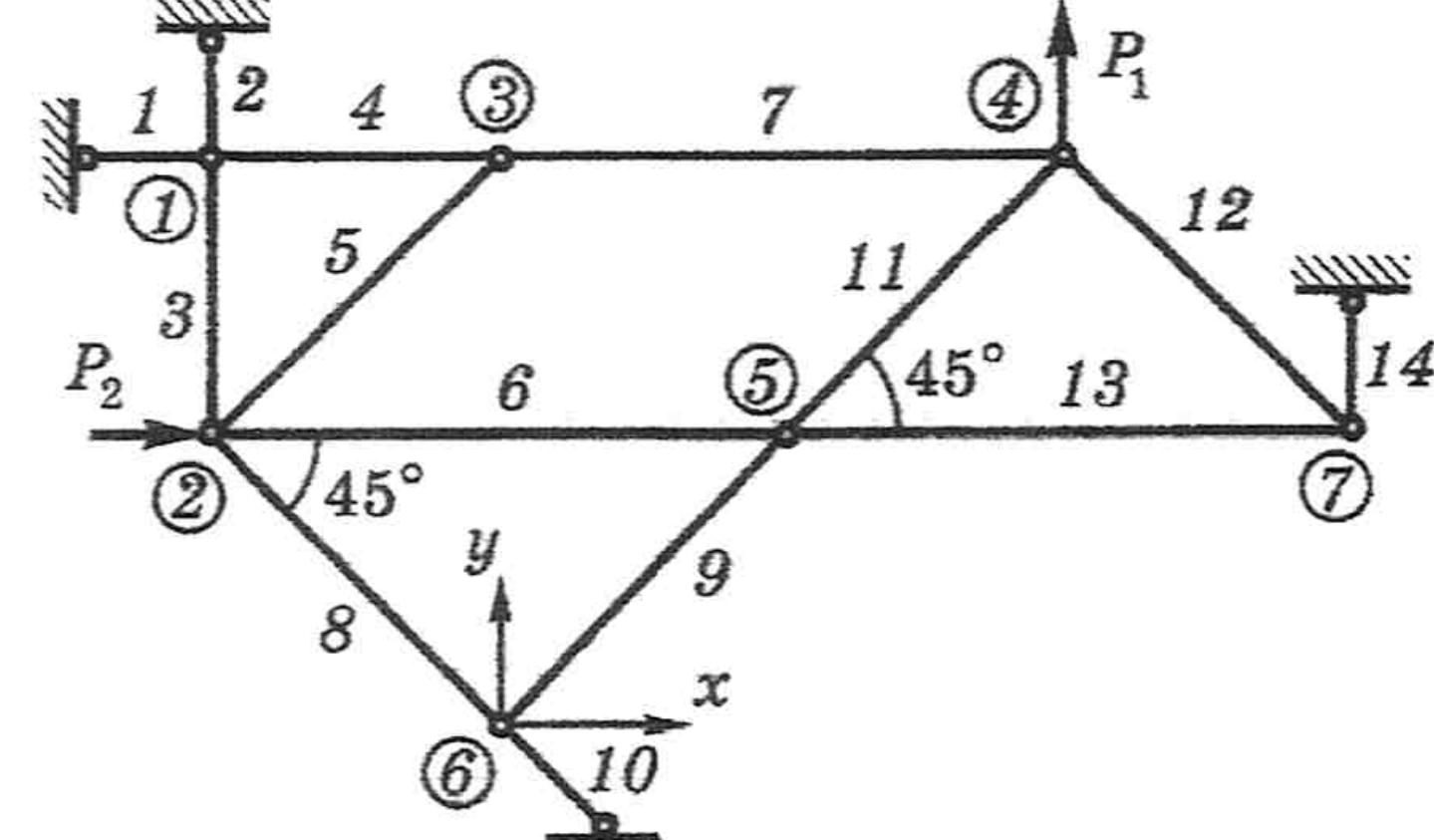
(28)



(29)



(30)



ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Схема конструкции показана на рис. С3.1. Дано: $P_1 = 20 \text{ кН}$, $P_2 = 10 \text{ кН}$.

Решение.

1. Произвольно выбираем направления единичных усилий в стержнях фермы (рис. С3.2).

2. Составляем матрицу инциденций I , описывающую топологию фермы. Матрица I имеет размерность $n \times m$, где n — число узлов, не считая опорных, m — число стержней фермы. Элементами этой матрицы могут быть числа 1, 0, -1. Если стрелка единичного усилия направлена от узла, то ставим +1 или просто 1; если стрелка направлена к узлу, то ставим -1; если усилие не имеет отношения к данному узлу, ставим 0.

В нашем случае ферма имеет 7 узлов ($n = 7$) и 14 стержней ($m = 14$), поэтому матрица I имеет 7 строк и 14 столбцов.

Заполним первую строку матрицы I . Стрелки единичных усилий первого, второго и третьего стержней направлены от первого узла, поэтому элементы $I_{1,1}, I_{1,2}, I_{1,3}$ первой строки матрицы инциденций равны 1, а остальные элементы первой строки равны 0. Аналогично заполняются все остальные строки матрицы I :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Составляем вектор-столбец V_x проекций единичных усилий на ось x или, другими словами, вектор-столбец косинусов углов между единичными усилиями в стержнях фермы и осью x . Размерность этого вектор-столбца $m \times 1$ (в нашем случае 14×1):

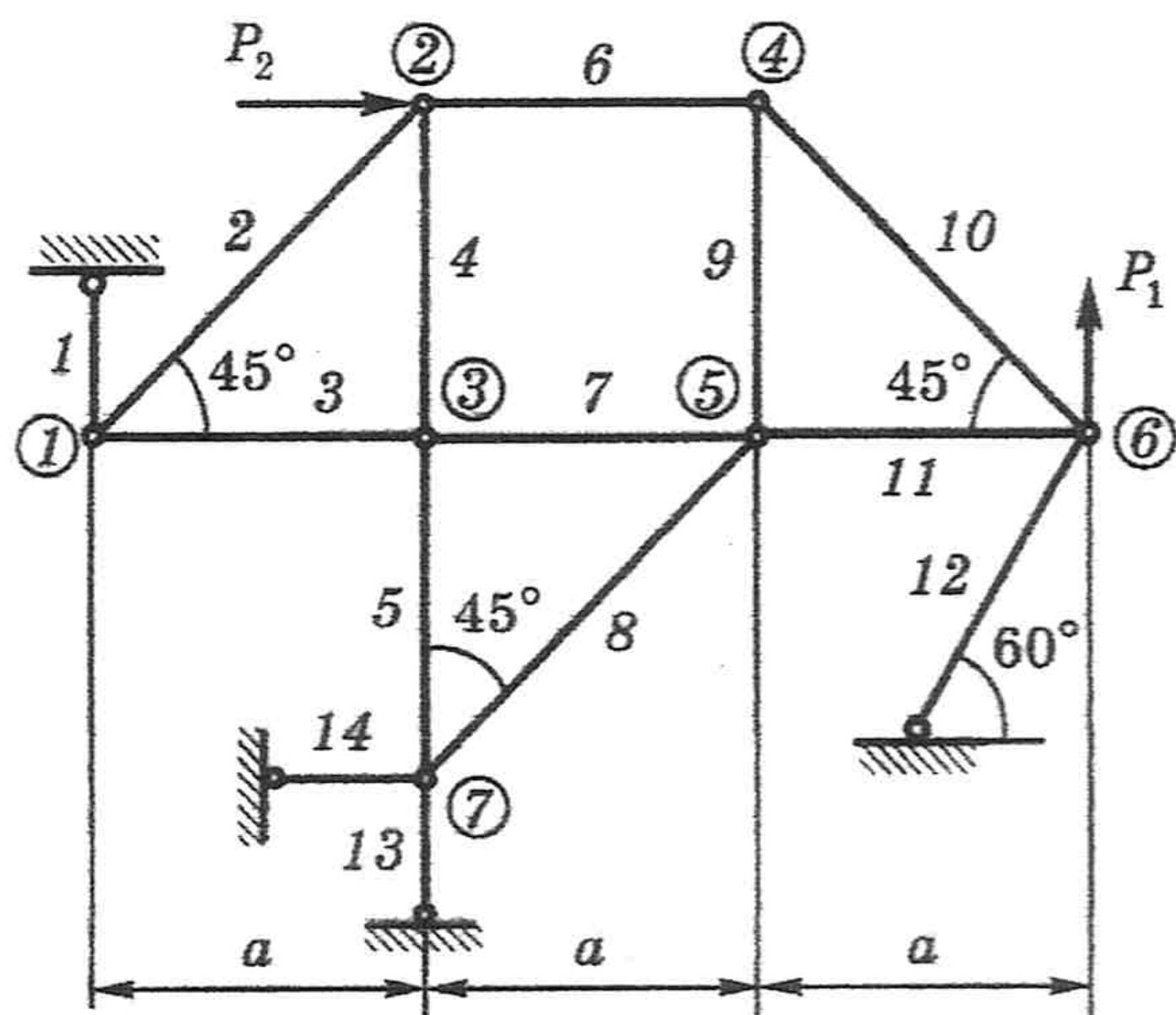


Рис. С3.1

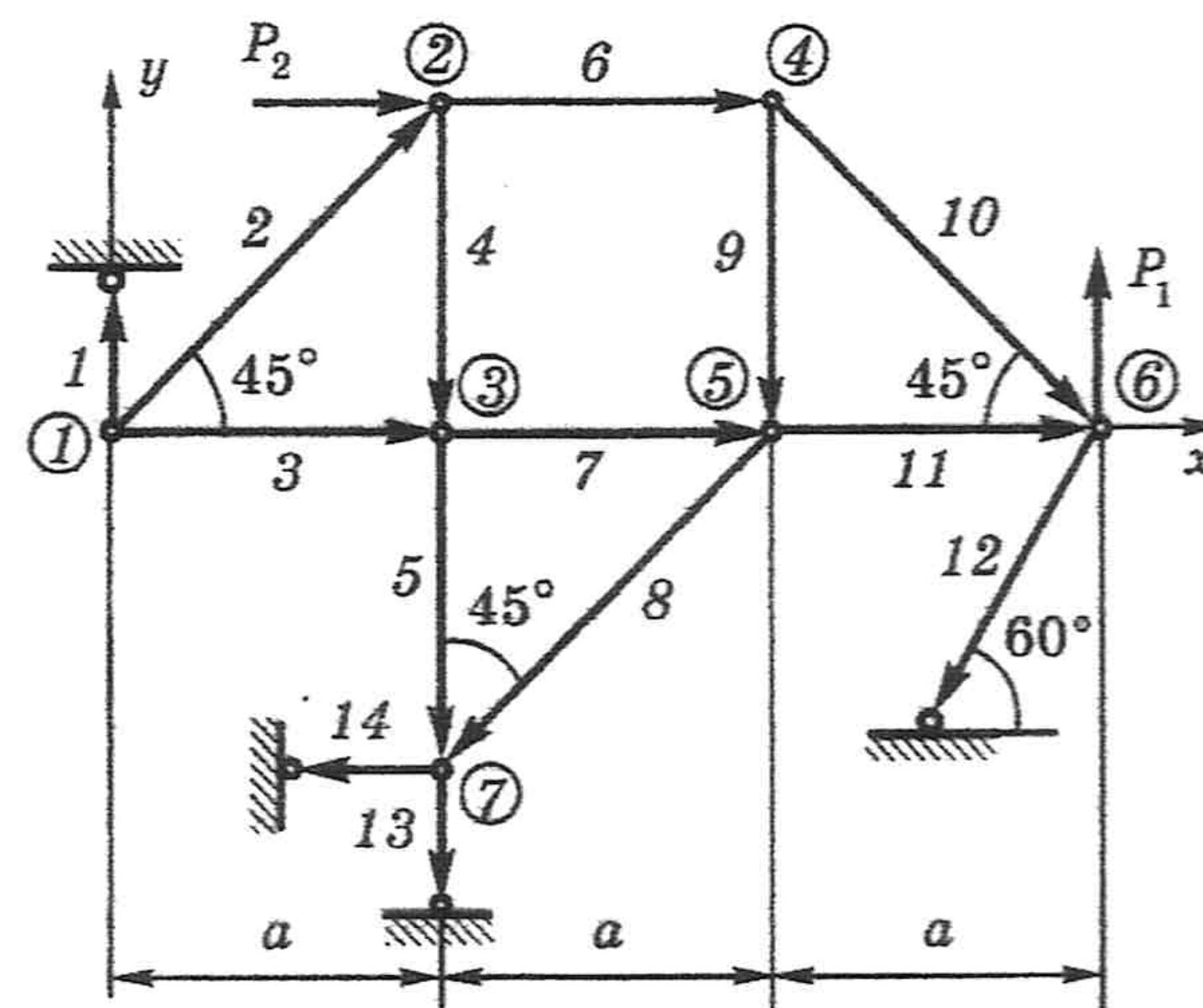


Рис. С3.2

$$\mathbf{V}_X^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & -0,5 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Составляем аналогичный вектор-столбец \mathbf{V}_Y размерности $m \times 1$ (14×1) косинусов углов между усилиями в стержнях фермы и осью y :

$$\mathbf{V}_Y^T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

С помощью этих вектор-столбцов \mathbf{V}_X и \mathbf{V}_Y в дальнейшем будут сформированы диагональные матрицы D_X и D_Y размерности $m \times m$ (в нашем случае 14×14).

5. Составляем вектор-столбец \mathbf{P} внешних сил, приложенных к узлам фермы. Размерность вектора $2n \times 1$ ($2 \cdot 7 \times 1$). При этом первые n строк вектор-столбца \mathbf{P} представляют собой проекции сил, приложенных к узлам фермы, на ось x , а оставшиеся n строк — проекции этих сил на ось y :

$$\mathbf{P}^T = [0 \ 10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 20 \ 0].$$

6. Формируем матрицу \mathbf{A} коэффициентов линейной системы уравнений равновесия:

$$\mathbf{A}_{2n \times m} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times m} \\ \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{X, m \times m} \\ \mathbf{D}_{Y, m \times m} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{O}_{n \times m}$ — матрица с нулевыми элементами размерности $n \times m$ (7×14).

7. Записываем систему уравнений равновесия в матричной форме:

$$\mathbf{AS} + \mathbf{P} = \mathbf{0},$$

где \mathbf{S} — вектор-столбец неизвестных усилий в стержнях фермы размерности $2n \times 1$ ($2 \cdot 7 \times 1$).

8. Решение этой системы имеет вид

$$\mathbf{S} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}.$$

Расчет в Mathcad.

Приводим лист расчета фермы, показанной на рис. С3.1.

Исходные данные:

$$P1 := 20 \quad P2 := 10$$

Вводим переменные, обозначающие количество узлов и стержней фермы:

$$nuzlov := 7 \quad nstergney := 14$$

Составляем матрицу инциденций I :

$$I := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad I2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad I := augment(I, I2)$$

Формируем матрицы \mathbf{V}_X , \mathbf{V}_Y и \mathbf{P} :

$$\begin{aligned}\mathbf{VX} &:= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & -0.5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{VY} &:= \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{P} &:= [0 \ P_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ P_1 \ 0]\end{aligned}$$

Преобразуем матрицы \mathbf{V}_X и \mathbf{V}_Y в диагональные матрицы \mathbf{D}_X и \mathbf{D}_Y :

$$\mathbf{DX} := \text{diag}(\mathbf{VX}^T) \quad \mathbf{DY} := \text{diag}(\mathbf{VY}^T)$$

Замечание. Матрицы \mathbf{D}_X и \mathbf{D}_Y можно получить иным путем. Введем вектор αS углов между единичными усилиями в стержнях фермы и осью x :

$$\alpha S := \left[\frac{\pi}{2} \ \frac{\pi}{4} \ 0 \ \frac{-\pi}{2} \ \frac{-\pi}{2} \ 0 \ 0 \ \frac{5\pi}{4} \ \frac{-\pi}{2} \ \frac{-\pi}{4} \ 0 \ \frac{4 \cdot \pi}{3} \ \frac{-\pi}{2} \ \pi \right]$$

а затем преобразуем вектор-строку αS в диагональные матрицы \mathbf{D}_X и \mathbf{D}_Y :

$$\mathbf{DX} := \text{diag}(\cos(\alpha S^T)) \quad \mathbf{DY} := \text{diag}(\sin(\alpha S^T))$$

Составляем матрицу $\mathbf{O}_{n \times m}$ с нулевыми элементами размерности $n \times m$ (7×14):

$$i := 1..nuzlov \quad j := 1..nstergnej \quad O_{i,j} := 0$$

Формируем матрицу \mathbf{A} коэффициентов системы уравнений равновесия:

$$\mathbf{XY} := \text{stack}(\mathbf{DX}, \mathbf{DY}) \quad \mathbf{A} := \text{stack}(\text{augment}(I, \mathbf{O}), \text{augment}(\mathbf{O}, I)) \cdot \mathbf{XY}$$

Решаем систему уравнений равновесия:

$$\mathbf{S} := -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T$$

Результаты решения системы уравнений показаны в табл. С3.2.

Расчеты показывают, что стержни 2, 6, 10 и 12 растянуты (знаки усилий положительны), а остальные сжаты. Таким образом, правило знаков усилий в стержнях, используемое в матричном способе расчета фермы, совпадает с правилом знаков этих усилий, применяемом в способе вырезания узлов.

Таблица С3.2

Номер стержня	Усилие, кН	Номер стержня	Усилие, кН
1	-13,660	8	-5,176
2	19,319	9	-3,660
3	-13,660	10	5,176
4	-13,660	11	-17,321
5	-13,660	12	27,321
6	3,660	13	-17,321
7	-13,660	14	-3,660