D2

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Федеральное Государственное образовательное бюджетное учреждение высшего профессионального образования
Московский технический университет связи и информатики

Методические указания по решению задач по курсу «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА» в Mathcad

Направление подготовки 220700 «Автоматизация технологических процессов и производств»

Раздел «Динамика»

Москва - 2013

Контрольные вопросы и задания

1. Напишите теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной форме.
2. Из каких составляющих складывается действующая на шарик нормальная реакция стенок трубки?
3. График изменения модуля скорости шарика имеет переломы. Почему?
4. Определить величину ударной силы, действующей на шарик в точках траектории с параметрами λ_1 и λ_2. (Использовать график касательного ускорения.)
5. Как при решении задачи используются матрицы ортов касательной и главной нормали?
6. Как определить расстояние, проходимое шариком вдоль трубки?
7. При сухом трении коэффициент трения не зависит от скорости движения тела. Почему в этой задаче сила трения зависит от скорости движения шарика?
8. Как скажется изменение массы шарика при движении его по различным участкам траектории?
9. Постройте график изменения модуля нормального ускорения шарика на участке траектории от λ_0 до λ_3.
10. Постройте график изменения модуля ускорения шарика при отсутствии сопротивления ($f = 0$ и $\mu = 0$). Сравните этот график с аналогичным графиком при наличии сопротивления.

Задание Д-2. ИЗУЧЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ, ОПИСЫВАЮЩИХ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Материальная точка массы m перемещается вдоль линии

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

под действием силы

$$\vec{F}_1 = F_{1x}(t)\vec{i} + F_{1y}(t)\vec{j} + F_{1z}(t)\vec{k},$$

силы $\vec{F}_2$ и силы $\vec{R} = -\alpha\vec{v}$ сопротивления движению (α — коэффициент вязкого сопротивления).

Требуется:

1) найти зависимость от времени силы $\vec{F}_2$, обеспечивающей заданное движение точки; определить модуль и направление силы $\vec{F}_2$ в момент времени $t = t_k$;

2) вычислить работы сил $\vec{F}_1(t), \vec{F}_2(t)$ и $\vec{R}$ в интервале времени от 0 до t_k (с);

3) найти зависимости импульсов сил $\vec{F}_1(t), \vec{F}_2(t)$ и $\vec{R}$ от времени и построить графики этих зависимостей в интервале времени от 0 до t_k (с);

4) определить ближайший момент времени $t = t_1$, при котором модуль скорости точки достигнет значения v_1, а также вычислить в этот момент времени значения проекций импульсов сил на оси координат и модуль вектора количества движения точки.

Во всех вариантах принять $m = 3$ кг, $F_{1x}(t) = ay(t)$, $F_{1y}(t) = bz(t)$, $F_{1z}(t) = cx(t)$, $a = 2$ Н/м, $b = 0{,}5$ Н/м, $c = 0{,}8$ Н/м.

Необходимые для решения данные приведены в табл. Д2.1.

Таблица Д2.1

№	$x = x(t)$, м	$y = y(t)$, м	$z = z(t)$, м	α, Н·с/м	t_k, с	v_1, м/с
1	e^{-t}	$2e^{-t} + 2$	$6te^{t-1}$	0,5	1	1
2	$2\sin(\pi t) + 1$	$2 + 2\cos(2\pi t)$	$\sin(2\pi t) - 2$	0,3	1/3	2
3	$\mathrm{ctg}(\pi t + 0{,}3) + 3$	$3\mathrm{tg}(\pi t) + 2$	$\cos(\pi t) + 3$	0,5	1/3	2,5
4	$3\cos^2 t$	$4\sin^2 t - 2$	$2\cos t + 1$	0,5	$\pi/6$	4
5	$2\sin(2\pi t)$	$\sin(\pi t) + \cos(\pi t)$	$\sin(\pi t) - \cos(\pi t)$	0,3	1/6	1,5
6	$4\mathrm{tg}(2t)$	$3\sin t$	$2\cos(2t)$	0,6	$\pi/6$	3
7	$2e^{2t}$	$e^t + e^{-t}$	$e^t - e^{-t}$	0,4	1/2	2
8	$2\cos^2(2t)$	$2\cos(2t)$	$3\sin^2 t + 1$	0,2	$\pi/6$	2,5
9	$2\sin^2 t$	$(1/\cos t) + \cos t$	$(1/\cos t) - \cos t$	0,5	$\pi/6$	1,5
10	$2\sin(2t) - 1$	$2\cos^2 t$	$2\cos(2t)$	0,3	$\pi/6$	2
11	$4/\cos^2 t$	$2\mathrm{tg}^2 t$	$3\mathrm{ctg}\, t$	0,3	$\pi/3$	3
12	$4\cos^2 t$	$\sin(2t)$	$\cos(2t) + 2$	0,6	$\pi/6$	3
13	$\mathrm{tg}^2(t + 0{,}3)$	$\mathrm{ctg}^2(t + 0{,}35)$	$2/\sin^2(t + 0{,}05)$	0,2	$\pi/6$	2
14	$2\cos^2(2\pi t)$	$2\mathrm{tg}(\pi t)$	$3\cos^2(\pi t)$	0,5	1/6	2,5
15	$3\sin(\pi t/2)$	$2\mathrm{ctg}[(\pi t + 0{,}1)/2]$	$6\sin^2(\pi t/4)$	0,4	1/3	4
16	$3\cos^2(2t)$	$2\sin^2 t$	$\sin t + \cos t$	0,3	$\pi/3$	2
17	$\mathrm{ctg}(t + 0{,}3) + 2t$	$2\mathrm{tg}^2(t + 0{,}3) + 3$	$4\mathrm{tg}^2(t + 0{,}15) - 2$	0,1	$\pi/4$	3
18	$4\cos^2(\pi t/2)$	$3\mathrm{tg}(\pi t)$	$2\sin(\pi t)$	0,2	1/6	3
19	$\sin^2(2t)$	$2\sin^2(t)$	$3\cos(2t)$	0,3	$\pi/6$	3
20	$2e^t/t$	$4te^{-t}$	e^{-t}	0,5	1	3
21	$2t^2$	$2t^4 + t^2$	$t^4 + 2t^2 + 1$	0,6	1	2
22	$\sin(\pi t^2/3) + 1$	$\sin^2(\pi t^2/3) - 1$	$\cos(\pi t^2/3)$	0,4	1	2,5
23	$2/\cos(\pi t^2/3)$	$4\cos(\pi t^2/3)$	$2\sin(\pi t^2/3)$	0,1	1	4
24	$2t^3 + 3t^2$	$t - 1$	$t^2 - 2t - 1$	0,3	2	5
25	$2t^2$	$2e^{-t} - 2$	$(4/e^{2t}) + 1$	0,2	1/2	4
26	$\cos(\pi t^2/6) - 1$	$3\sin(\pi t/6)$	$2\cos^2(\pi t^2/6) + 1$	0,5	1	2
27	$2\sin(\pi t/3)$	$2\mathrm{tg}(\pi t/3)$	$3 - \mathrm{tg}^2(\pi t/3)$	0,4	1	2,5
28	$1/\ln^2 t$	$\ln t + 1$	$2\ln^2(t)$	0,2	e^{-1}	2
29	$3t^3$	$\sqrt{t^2 + 1}$	$2t^2 + 3$	0,3	1	4
30	$1/\ln t$	$\ln(t^2) + 1$	$\ln t - 2$	0,1	e^{-1}	1

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Дано: $x(t) = 2\cos(\pi t)$ (м); $y(t) = 4\sin(\pi t)$ (м); $z(t) = 0{,}5t$ (м); $\alpha = 0{,}4$ Н·с/м; $m = 3$ кг; $t_k = 1{,}5$ с; $v_1 = 10$ м/с.

Решение

1. *Определение зависимости силы $\vec{F}_2$ от времени, ее модуля и направления в момент времени $t = t_k$.*

По заданным уравнениям движения вычисляем скорость и ускорение точки.

Вектор скорости точки:

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}.$$

Вектор ускорения точки:

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}.$$

В этих выражениях $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты осей x, y и z; $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$, $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ — проекции скорости и ускорения точки на оси координат.

Найдем эти проекции, вычислив производные от соответствующих координат по времени:

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = -2\pi\sin(\pi t),\ \ v_y(t) = \dot{y}(t) = 4\pi\cos(\pi t),\ \ v_z(t) = \dot{z}(t) = 0{,}5,$$

$$a_x(t) = \ddot{x}(t) = -2\pi^2\cos(\pi t),\ \ a_y(t) = \ddot{y}(t) = -4\pi^2\sin(\pi t),\ \ a_z(t) = \ddot{z}(t) = 0.$$

Модуль скорости:

$$v(t) = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2}. \qquad (Д2.1)$$

По условию задачи на материальную точку действуют три силы:

$$\vec{F}_1(t), \vec{F}_2(t) \text{ и } \vec{R}.$$

Составим дифференциальные уравнения движения точки в декартовых координатах:

$$m\ddot{x}(t) = F_{1x}(t) + F_{2x}(t) + R_x,$$
$$m\ddot{y}(t) = F_{1y}(t) + F_{2y}(t) + R_y,$$
$$m\ddot{z}(t) = F_{1z}(t) + F_{2z}(t) + R_z.$$

Отсюда легко найти проекции силы $\vec{F}_2(t)$ на оси координат:

$$\begin{aligned} F_{2x}(t) &= m\ddot{x}(t) - F_{1x}(t) - R_x = -2m\pi^2\cos\pi t - 4a\sin\pi t - 2\alpha\pi\sin\pi t, \\ F_{2y}(t) &= m\ddot{y}(t) - F_{1y}(t) - R_y = -4m\pi^2\sin\pi t - b\cdot 0{,}5t + 4\alpha\pi\cos\pi t, \\ F_{2z}(t) &= m\ddot{z}(t) - F_{1z}(t) - R_z = -2c\cos\pi t + 0{,}5\alpha. \end{aligned} \qquad (Д2.2)$$

Модуль силы $\vec{F}_2(t)$:

$$F_2(t) = \sqrt{F_{2x}(t)^2 + F_{2y}(t)^2 + F_{2z}(t)^2}. \qquad (Д2.3)$$

Направление силы $F_2(t)$ определим с помощью направляющих косинусов:

$$\cos(\vec{F}_2, \vec{i}) = \frac{F_{2x}(t)}{F_2(t)},\ \ \cos(\vec{F}_2, \vec{j}) = \frac{F_{2y}(t)}{F_2(t)},\ \ \cos(\vec{F}_2, \vec{k}) = \frac{F_{2z}(t)}{F_2(t)}. \qquad (Д2.4)$$

Результаты вычислений по формулам (Д2.2)–(Д2.4) для заданного момента времени $t = t_k$ следующие: проекции силы $\vec{F}_2(t_k)$: $F_{2x}(t_k) = 10{,}513$ Н, $F_{2y}(t_k) = 118{,}060$ Н, $F_{2z}(t_k) = 0{,}2$ Н; модуль силы $\vec{F}_2(t_k)$: $F_2(t_k) = 118{,}528$ Н; направляющие косинусы: $\cos(\vec{F}_2, \vec{i}) = 0{,}089$, $\cos(\vec{F}_2, \vec{j}) = 0{,}996$, $\cos(\vec{F}_2, \vec{k}) = 0{,}002$.

2. *Вычисление работ сил $\vec{F}_1(t), \vec{F}_2(t)$ и $\vec{R}$ в интервале времени от 0 до t_k.*

Работы сил $\vec{F}_1(t), \vec{F}_2(t)$ и $\vec{R}$ определим по формулам

$$A_{F1}(t) = \int_0^t \vec{F}_1(t)\cdot\vec{v}(t)dt = \int_0^t (F_{1x}(t)v_x(t) + F_{1y}(t)v_y(t) + F_{1z}(t)v_z(t))dt,$$

$$A_{F2}(t) = \int_0^t \vec{F}_2(t)\cdot\vec{v}(t)dt = \int_0^t (F_{2x}(t)v_x(t) + F_{2y}(t)v_y(t) + F_{2z}(t)v_z(t))dt, \quad (Д2.5)$$

$$A_R(t) = \int_0^t \vec{R}(t)\cdot\vec{v}(t)dt = \int_0^t (R_x(t)v_x(t) + R_y(t)v_y(t) + R_z(t)v_z(t))dt.$$

Для момента времени $t = t_k$ получаем
$A_{F1}(t_k) = 0{,}225$ Дж, $A_{F2}(t_k) = -78{,}513$ Дж, $A_R(t_k) = -59{,}368$ Дж.

3. *Определение зависимостей импульсов сил $\vec{F}_1(t), \vec{F}_2(t)$ и $\vec{R}$ от времени и построение графиков этих зависимостей.*

Вычислим проекции импульсов сил $\vec{F}_1(t), \vec{F}_2(t)$ и $\vec{R}$ на оси координат по формулам

$$S_{1x}(t) = \int_0^t F_{1x}(t)dt = 4a\int_0^t \sin\pi t dt = 4\frac{a}{\pi}(1-\cos\pi t), \quad (Д2.6)$$

$$S_{1y}(t) = \int_0^t F_{1y}(t)dt = 0{,}5b\int_0^t t dt = \frac{bt^2}{4}, \quad (Д2.7)$$

$$S_{1z}(t) = \int_0^t F_{1z}(t)dt = 2c\int_0^t \cos\pi t dt = 2\frac{c}{\pi}\sin\pi t, \quad (Д2.8)$$

$$S_{2x}(t) = \int_0^t F_{2x}(t)dt = \int_0^t (-2m\pi^2\cos\pi t - 4a\sin\pi t - 2\alpha\pi\sin\pi t)dt = \quad (Д2.9)$$
$$= -2m\pi\sin\pi t + \left(4\frac{a}{\pi} + 2\alpha\right)(1-\cos\pi t),$$

$$S_{2y}(t) = \int_0^t F_{2y}(t)dt = \int_0^t (-4m\pi^2\sin\pi t - 0{,}5bt + 4\alpha\pi\cos\pi t)dt = \quad (Д2.10)$$
$$= -2m\pi(1-\cos\pi t) - \frac{bt^2}{4} + 4\alpha\sin\pi t,$$

$$S_{2z}(t) = \int_0^t F_{2z}(t)dt = \int_0^t (-2c\cos\pi t + 0{,}5\alpha)dt = -\frac{2c}{\pi}\sin\pi t + 0{,}5\alpha t, \quad (Д2.11)$$

$$S_{Rx}(t) = \int_0^t R_x(t)dt = 2\alpha\pi\int_0^t \sin\pi t dt = 2\alpha(1-\cos\pi t), \quad (Д2.12)$$

$$S_{Ry}(t)=\int_0^t R_y(t)dt=-4\alpha\pi\int_0^t \cos\pi t dt=-4\alpha\sin\pi t, \qquad (Д2.13)$$

$$S_{Rz}(t)=\int_0^t R_z(t)dt=-0{,}2\int_0^t dt=-0{,}2t. \qquad (Д2.14)$$

Графики зависимостей проекций и модулей импульсов сил $\vec{F}_1(t)$, $\vec{F}_2(t)$ и $\vec{R}$ от времени приведены далее в разделе «Расчет в Mathcad» (рис. Д2.2–Д2.5).

4. *Определение ближайшего момента времени $t=t_1$, при котором модуль скорости точки достигает значения v_1, и вычисление значений проекций импульсов сил и модуля вектора количества движения точки в этот момент времени.*

Для вычисления ближайшего момента времени, при котором модуль скорости точки достигает значения v_1, воспользуемся формулой (Д2.1):

$$v_1^2=v_x(t)^2+v_y(t)^2+v_z(t)^2,$$

или

$$v_1^2=4\pi^2\sin^2\pi t+16\pi^2\cos^2\pi t+0{,}5^2.$$

Отсюда

$$t_1=\frac{1}{\pi}\arccos\left(\sqrt{\frac{v_1^2-0{,}5^2-4\pi^2}{12\pi^2}}\right)=0{,}247\text{ с}.$$

Проекции скорости точки на оси координат при $t=t_1$ соответственно равны

$$v_{1x}=-4{,}403\text{ м/с},\quad v_{1y}=8{,}964\text{ м/с},\quad v_{1z}=0{,}5\text{ м/с}.$$

Модуль вектора количества движения точки в момент времени $t=t_1$:

$$mv_1=m\sqrt{v_{1x}^2+v_{1y}^2+v_{1z}^2}. \qquad (Д2.15)$$

Результаты расчетов по формулам (Д2.6)–(Д2.15) значений проекций импульсов сил и модуля вектора количества движения точки в момент времени $t=t_1$ следующие: проекции импульса силы $\vec{F}_1(t)$: $S_{1x}=0{,}892$ Н·с, $S_{1y}=0{,}182$ Н·с, $S_{1z}=0{,}012$ Н·с; проекции импульса силы $\vec{F}_2(t)$: $S_{2x}=-14{,}169$ Н·с, $S_{2y}=-9{,}692$ Н·с, $S_{2z}=-0{,}307$ Н·с; проекции импульса силы $\vec{R}(t)$: $S_{Rx}=0{,}229$ Н·с, $S_{Ry}=-1{,}121$ Н·с, $S_{Rz}=-0{,}049$ Н·с;
количество движения: $mv_1=30$ кг·м/с.

Расчет в Mathcad.

Приводим рабочий лист расчета рассмотренного примера.

Исходные данные:

$tk := 1.5000 \quad m := 3 \quad a := 2 \quad b := 0.5 \quad c := 0.8 \quad \alpha := 0.4$

$x(t) := 2\cdot\cos(\pi\cdot t) \quad y(t) := 4\cdot\sin(\pi\cdot t) \quad z(t) := 0.5\cdot t \quad v1 := 10$

1. Проекции скорости точки на оси координат:

$$vx(t) := \frac{d}{dt}x(t) \quad vy(t) := \frac{d}{dt}y(t) \quad vz(t) := \frac{d}{dt}z(t)$$

Модуль скорости:

$v(t) := \sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2 + vz(t)^2}$ $\quad v(tk) = 6.303$ м/с

Проекции ускорения точки на оси координат:

$ax(t) := \frac{d}{dt}vx(t) \quad ay(t) := \frac{d}{dt}vy(t) \quad az(t) := \frac{d}{dt}vz(t)$

Модуль ускорения:

$a(t) := \sqrt{ax(t)^2 + ay(t)^2 + az(t)^2}$ $\quad a(tk) = 39.478$ м/с^2

Проекции силы $\vec{F}_1(t)$ на оси координат:

$F1x(t) := a \cdot y(t) \quad F1y(t) := b \cdot z(t) \quad F1z(t) := c \cdot x(t)$

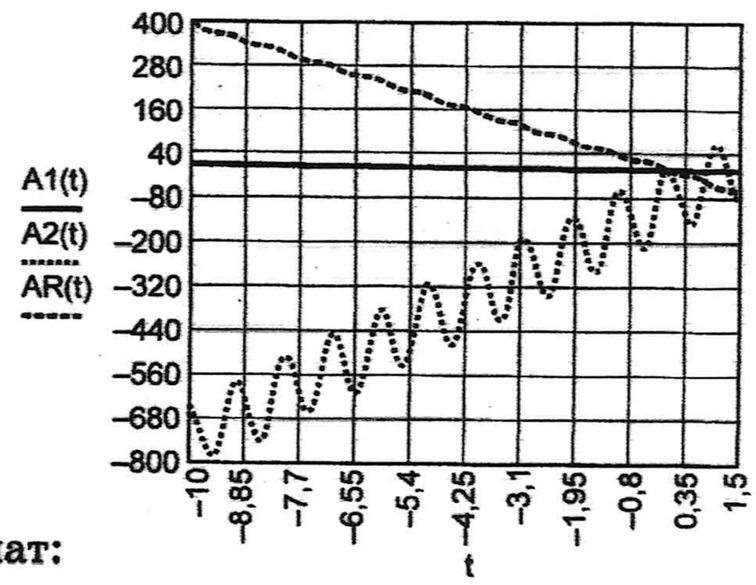

Рис. Д2.1

Работа силы $\vec{F}_1(t)$:

$$A1(t) := \int_0^t (F1x(t) \cdot vx(t) + F1y(t) \cdot vy(t) + F1z(t) \cdot vz(t))\,dt \qquad A1(tk) = 0.225 \text{ Дж}$$

Проекции силы $\vec{R}(t)$ на оси координат:

$$Rx(t) := -\alpha \cdot vx(t) \qquad Ry(t) := -\alpha \cdot vy(t) \qquad Rz(t) := -\alpha \cdot vz(t)$$

Работа силы $\vec{R}(t)$:

$$AR(t) := \int_0^t (Rx(t) \cdot vx(t) + Ry(t) \cdot vy(t) + Rz(t) \cdot vz(t))\,dt \qquad AR(tk) = -59.368 \text{ Дж}$$

Проекции силы $\vec{F}_2(t)$ на оси координат:

$$F2x(t) := m \cdot ax(t) - F1x(t) + \alpha \cdot vx(t) \qquad F2y(t) := m \cdot ay(t) - F1y(t) + \alpha \cdot vy(t)$$
$$F2z(t) := m \cdot az(t) - F1z(t) + \alpha \cdot vz(t)$$

2. Работа силы $\vec{F}_2(t)$:

$$A2(t) := \int_0^t (F2x(t) \cdot vx(t) + F2y(t) \cdot vy(t) + F2z(t) \cdot vz(t))\,dt \qquad A2(tk) = -78.513 \text{ Дж}$$

Строим графики зависимостей работы сил от времени (рис. Д2.1). Время t меняется от 0 до t_k с шагом 0,01:

$$t := 0, 0.01 .. tk$$

3. Вычисление момента времени t_1:

$$v1 := 10 \text{ м/с} \qquad f(t) := v1^2 - v(t)^2 \qquad t1 := root(f(t), t, 0, 0.3) \qquad t1 = 0.247 \text{ с}$$

Количество движения точки в этот момент времени:

$$m \cdot v(t1) = 30 \text{ кг·м/с}$$

Проекции импульса силы $\vec{F}_1(t)$ на оси координат:

$$S1x(t) := \int_0^t F1x(t)dt \qquad S1y(t) := \int_0^t F1y(t)dt \qquad S1z(t) := \int_0^t F1z(t)dt$$
$$S1x(t1) = 0.892 \text{ Н·м/с} \qquad S1y(t1) = 0.182 \text{ Н·м/с} \qquad S1z(t1) = 0.012 \text{ Н·м/с}$$

Проекции импульса силы $\vec{F}_2(t)$ на оси координат:

$$S2x(t) := \int_0^t F2x(t)dt \qquad S2y(t) := \int_0^t F2y(t)dt \qquad S2z(t) := \int_0^t F2z(t)dt$$
$$S2x(t1) = -14.169 \text{ Н·м/с} \qquad S2y(t1) = -9.692 \text{ Н·м/с} \qquad S2z(t1) = -0.307 \text{ Н·м/с}$$

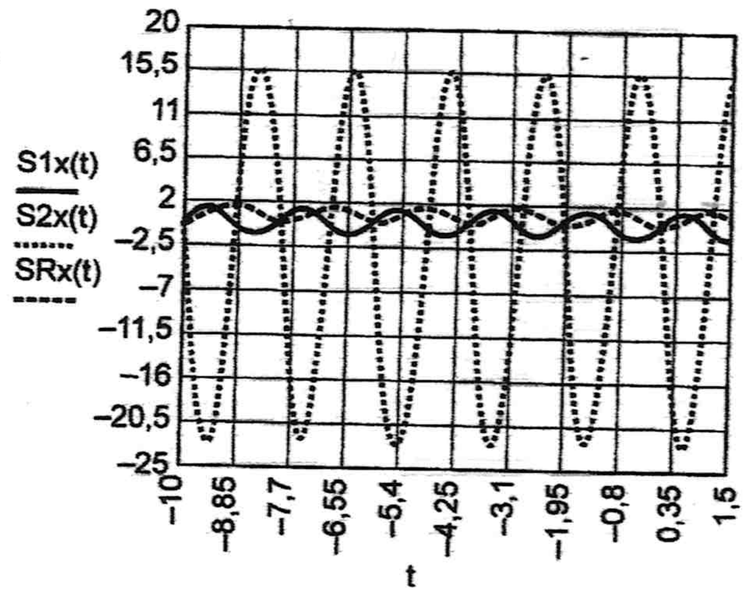

Рис. Д2.2

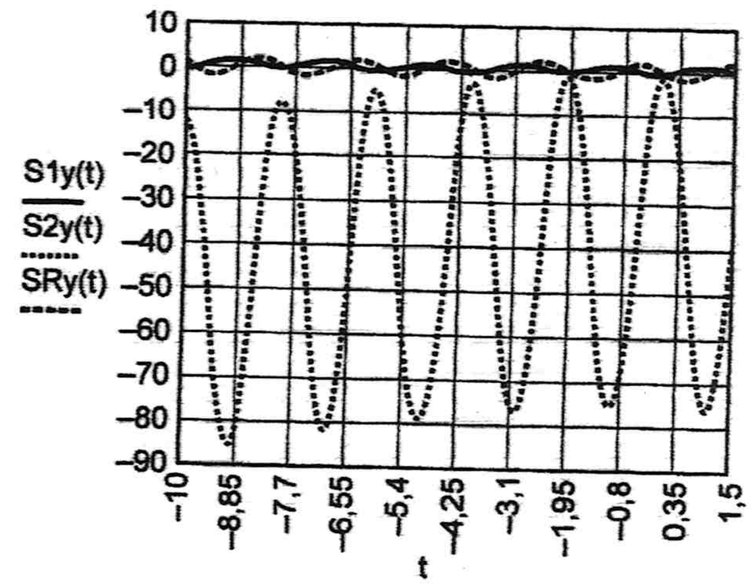

Рис. Д2.3

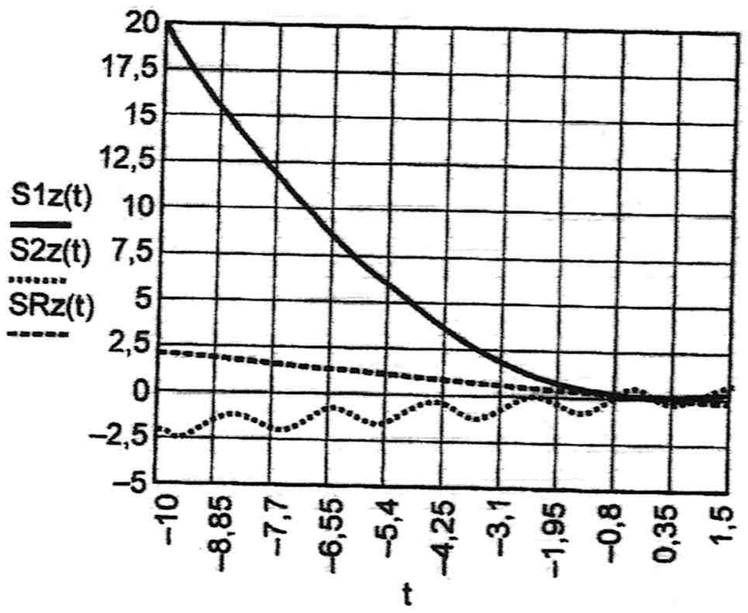

Рис. Д2.4

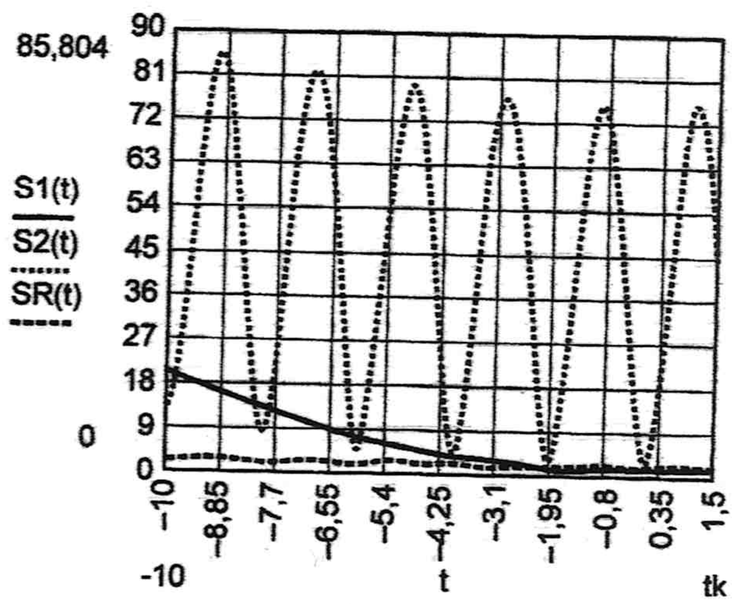

Рис. Д2.5

Проекции импульса силы $\vec{R}(t)$ на оси координат:

$$SRx(t) := \int_0^t Rx(t)dt \quad SRy(t) := \int_0^t Ry(t)dt \quad SRz(t) := \int_0^t Rz(t)dt$$

$$SRx(t1) = 0.229\ \text{Н}\cdot\text{м/с} \quad SRy(t1) = -1.121\ \text{Н}\cdot\text{м/с} \quad SRz(t1) = -0.049\ \text{Н}\cdot\text{м/с}$$

Графики зависимостей проекций импульсов сил $\vec{F}_1(t), \vec{F}_2(t)$ и $\vec{R}$ от времени показаны на рис. Д2.2–Д2.5.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие уравнения называются дифференциальными уравнениями движения материальной точки в декартовых координатах?
2. Как записываются естественные уравнения движения материальной точки?
3. Сформулируйте первую (прямую) и вторую (обратную) задачи динамики точки.
4. Как вычисляется импульс переменной силы?
5. Что называется количеством движения материальной точки?
6. Как определить импульсы постоянной и переменной сил?
7. Сформулируйте теорему об изменении количества движения материальной точки.
8. Какие следствия вытекают из теоремы об изменении количества движения материальной точки?
9. Как определяется работа переменной силы?
10. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии материальной точки.