ИГУМО ИНСТИТУТ ГУМАНИТАРНОГО ОБРАЗОВАНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА учебной дисциплины

«МАТЕМАТИКА»

для студентов специальностей
080109 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит»,
080502 «Экономика и управление на предприятии»,
080507 «Менеджмент организации»

Раздел 4

Методы оптимизации и исследования операций в экономике и управлении

(четвертый семестр)

Москва
2008

Рабочая программа составлена на основе государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по специальностям 080109 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», 080502 «Экономика и управление на предприятии», 080507 «Менеджмент организации», утвержденного 17.03.2000 г.

С о с т а в и т е л ь

декан факультета бизнес-администрирования,
заведующий кафедрой математической экономики и эконометрики,
кандидат экономических наук, доцент
В. И. Соловьев

О т в е т с т в е н н ы й   р е д а к т о р

декан факультета бизнес-администрирования,
заведующий кафедрой математической экономики и эконометрики,
кандидат экономических наук, доцент
В. И. Соловьев

Р а с с м о т р е н а   и   о д о б р е н а

на заседании кафедры математической экономики и эконометрики
1 сентября 2008 г. (протокол № 2)

С о г л а с о в а н а

с выпускающими кафедрами специальностей
080109 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит»,
080502 «Экономика и управление на предприятии»,
080507 «Менеджмент организации»

Организационно-методические указания

Программа учебной дисциплины «Математика» составлена в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по специальностям 080109 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», 080502 «Экономика и управление на предприятии», 080507 «Менеджмент организации».

Согласно Государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования по специальности 080507 «Менеджмент организации», «область профессиональной деятельности менеджера — обеспечение эффективного управления организацией, организация систем управления, совершенствование управления в соответствии с тенденциями социально-экономического развития... Менеджер должен быть готов к следующим видам деятельности: управленческая, организационная, экономическая, планово-финансовая, маркетинговая, информационно-аналитическая, проектно-исследовательская, диагностическая, инновационная, методическая, консультационная, образовательная,... должен знать принципы принятия и реализации экономических и управленческих решений, уметь выявлять проблемы экономического характера при анализе конкретных ситуаций, предлагать способы их решения и оценивать ожидаемые результаты, использовать основные и специальные методы экономического анализа информации в сфере профессиональной деятельности, разрабатывать и обосновывать варианты эффективных хозяйственных решений, критически оценивать поведение экономических агентов, тенденции развития объектов в сфере профессиональной деятельности, уметь использовать компьютерную технику в режиме пользователя для решения экономических задач». Аналогичные требования содержатся в Государственном образовательном стандарте высшего профессионального образования по другим экономическим специальностям.

В Государственном образовательном стандарте определяются требования к содержанию и уровню математического образования экономистов и менеджеров, в соответствии с которыми экономист и менеджер должен иметь представление о месте современной математики в общечеловеческой культуре и ее роли в экономических исследованиях, об истории развития математики и ее экономических приложений, знать и уметь использовать основы математического анализа, основы алгебры, геометрии и дискретной математики, основы теории дифференциальных уравнений и численных методов, основы теории вероятностей и математической статистики.

Целью преподавания дисциплины «Математика» студентам экономических специальностей является обучение студентов основным математическим понятиям и методам применительно к решению задач принятия и реализации экономических и управленческих решений, анализа, прогнозирования и эффективного управления экономическими системами с учетом неопределенности внешней среды и ограниченности внутренних возможностей управляемого объекта.

При преподавании дисциплины ставятся следующие **задачи**:

- ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения практических экономических и управленческих задач;
- привить студентам умение самостоятельно изучать учебную и научную литературу по математике и ее экономическим приложениям;
- выработать у студентов навыки математического исследования прикладных экономических вопросов и умение перевести экономическую задачу на математический язык, найти подходящий метод решения задачи, воспользоваться для ее решения вычислительной техникой, экономически проанализировать результаты решения и применить их на практике;
- развить у студентов логическое мышление и повысить общий уровень их математической культуры.

Овладение дисциплиной развивает у студентов аналитическое мышление, прививает навыки количественного обоснования принимаемых управленческих решений. Знания, умения и навыки, полученные в результате освоения дисциплины, могут быть использованы выпускниками во всех видах их деятельности в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования. Все это имеет большое значение для последующей практической работы экономистов и менеджеров.

Особенностью программы является ее прикладная направленность, позволяющая развить у студентов навыки анализа экономических проблем, повысить мотивацию к изучению дисциплины, тем самым повысить эффективность обучения.

Дисциплина «Математика» состоит из четырех разделов («Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Математический анализ и дифференциальные уравнения с экономическими приложениями», «Теория вероятностей и математическая статистика в экономике и управлении», «Методы оптимизации и исследования операций в экономике и управлении») и изучается в течение первых четырех семестров. Объем аудиторной нагрузки, необходимой для освоения программы, составляет 240 ч. для студентов очной формы обучения.

Методика преподавания дисциплины «Математика» строится на сочетании лекций со следующими видами учебной работы: групповыми практическими занятиями, групповыми и индивидуальными консультациями по отдельным разделам программы; выполнением студентами индивидуальных и групповых домашних заданий; выполнением студентами контрольных заданий, внеаудиторной самостоятельной работой студентов с учебным материалом под контролем преподавателя (работа с учебниками, учебными пособиями, методическими указаниями, заданиями, специальной литературой, поиск необходимой информации в сети Интернет). Кроме того, на практических занятиях активно используются активные методы обучения, в том числе, метод конкретных ситуаций, когда студентам предлагается для рассмотрения реальная проблема, и они находят ее решение при помощи изучаемых математических методов. Важной методической особенностью является интенсификация самостоятельной работы студентов с использованием персональных компьютеров, особенно в третьем и четвертом семестрах.

Особенно отметим **обязательное выполнение студентами индивидуальных семестровых контрольных заданий,** приведенных в настоящей программе (номер варианта индивидуального задания выбирается по последней цифре номера зачетной книжки студента).

В конце первого, второго, третьего и четвертого семестров по дисциплине «Математика» проводятся экзамены.

Дисциплина «Математика» изучается параллельно с общепрофессиональными дисциплинами, что позволяет активизировать освоение математических методов применительно к решению экономических задач и выработке управленческих решений на основе математического моделирования. В свою очередь, после изучения дисциплины «Математика» студенты смогут легче осваивать все последующие дисциплины специальностей (умея формализовать экономические постановки задач и делать выводы на основе исследования соответствующих экономико-математических моделей), а также использовать математические методы и модели при курсовом и дипломном проектировании.

В четвертом семестре изучаются математические методы оптимизации и исследования операций, которые затем будут использованы в дисциплинах «Финансовая математика», «Математические модели и методы в экономике».

Содержание дисциплины

ЛЕКЦИИ		ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ		САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТА	
№ зан.	Тема, основные вопросы	№ зан.	Тема, основные вопросы	Содержание	Бюджет времени
Тема 1. Линейное программирование					
1	Примеры линейных оптимизационных моделей в экономике и управлении. Линейная производственная задача. Постановка и различные формы записи задачи линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования. Каноническая форма задачи линейного программирования. Допустимые решения. Свойства области допустимых решений. Алгоритм симплексного метода линейного программирования. Симплексный метод как метод направленного перебора базисных допустимых решений. Критерий оптимальности. Экономическая интерпретация задачи линейного программирования, симплексного метода, симплексных оценок.	1	Решение задачи планирования производством симплексным методом.	Метод искусственного базиса. Модифицированный симплексный метод. Контрольное задание.	4
2	Симметричная пара двойственных задач. Экономическая интерпретация двойственной задачи. Основное неравенство теории двойственности, его экономическая интерпретация. Малая теорема двойственности. Достаточное условие оптимальности	2	Экономическое содержание второй основной теоремы двойственности. Ее применение к решению задач и интерпретации результатов.	Контрольное задание.	4

	пары взаимно двойственных задач. Первая и вторая основные теоремы двойственности, их геометрическая и экономическая интерпретация.				
3	Несимметричная пара двойственных задач. Третья основная теорема двойственности, ее геометрическая и экономическая интерпретация. Область устойчивости двойственных оценок.	3	Задача о расшивке узких мест производства. Постоптимизационный анализ задач линейного программирования.	Понятие о параметрическом линейном программировании. Двойственный симплексный метод. Контрольное задание.	4
4	Транспортная задача по критерию стоимости. Задача, двойственная к транспортной. Замкнутая транспортная задача и ее решение методом потенциалов. Экономическая интерпретация оценок клеток, потенциалов поставщиков и потребителей. Вырожденная транспортная задача. Фиктивные поставки. Открытая транспортная задача, фиктивные поставщики и потребители. Обязательные и запрещенные поставки.	4	Решение транспортных задач с дополнительными требованиями (обязательные и запрещенные поставки).	Контрольное задание.	4
5	Постановка и экономическая интерпретация задач целочисленного программирования. Методы отсечения. Общая характеристика комбинаторных методов решения задач целочисленного программирования. Метод ветвей и границ.	5	Решение задач целочисленного программирования методом ветвей и границ.	Контрольное задание.	4
Тема 2. Нелинейное программирование					
6	Общая задача нелинейного программирования, ее геометрическая интерпретация и экономические приложения.	6	Нелинейная производственная задача. Задача оптимизации затрат на рекламу.	Контрольное задание.	4

	Необходимые и достаточные условия экстремума функции нескольких переменных. Теорема Ферма. Стационарные точки дифференцируемых функций. Матрица Гессе. Критерий Сильвестра для исследования стационарных точек. Окаймленная матрица Гессе. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.		Детерминированные модели управления запасами, формула Вилсона. Производственные функции, теория фирмы, анализ производственной функции Кобба — Дугласа. Функция спроса, поиск точки спроса потребителя. Функция благосостояния, вогнутость функции благосостояния по отношению к доходу.		
7	Выпуклые множества и их свойства. Теоремы отделимости. Системы выпуклых неравенств. Выпуклые функции и их свойства. Задача выпуклого программирования, ее геометрическая интерпретация и экономические приложения. Условие регулярности. Функция Лагранжа. Условие оптимальности. Теорема Куна — Таккера. Условия Каруша — Куна — Таккера в дифференциальной форме, их геометрическая и экономическая интерпретация.	7	Задача квадратичного программирования. Условия Каруша — Куна — Таккера в дифференциальной форме и симплексный метод для решения задачи квадратичного программирования.	Контрольное задание.	4
8	Градиентные методы нелинейной оптимизации. Методы штрафных функций. Многокритериальная оптимизация. Оптимальность по Парето. Метод последовательных уступок.	8	Решение задач выпуклого программирования градиентными методами и методами штрафных функций.	Современные пакеты прикладных программ, реализация в них численных методов условной и безусловной оптимизации. Решение задач линейного, нелинейного и целочисленного программирования в пакете Microsoft Excel. Контрольное задание.	12

Тема 3. Динамическое программирование и оптимальное управление					
9	Специфика задач динамического программирования. Принцип оптимальности Беллмана. Параметр состояния, уравнение состояния. Рекуррентное соотношение.	9	Задача об оптимальном распределении инвестиций. Динамическая задача управления запасами и ее решение методом динамического программирования. Сведение задачи динамического программирования к задаче о кратчайшем пути.	Задача о наиболее рациональном использовании рабочей силы. Задача о замене оборудования. Контрольное задание.	12
10	Простейшая задача вариационного исчисления в форме Лагранжа и ее экономический смысл. Функция Гамильтона. Условия оптимальности. Задача оптимального управления, ее экономическая интерпретация. Принцип максимума Понтрягина, его применение в моделях оптимального экономического роста.	10	Оптимальный экономический рост в модели Солоу.	Оптимальное управление распределенными системами. Обобщенный принцип максимума. Оптимизация деятельности инновационных страховых компаний при условии их деятельности на рынке ценных бумаг.	12
Тема 4. Основные понятия теории графов. Поиск кратчайшего и критического пути					
11	Граф. Дуги и вершины. Полный граф. Изоморфизм графов. Связность, разрез графа. Операции над графами. Матрицы смежности и инцидентности. Дерево. Лес. Изображение графа. Плоский граф. Формула Эйлера. Теорема Понтрягина — Куратовского. Алгоритм Дейкстры решения задачи о кратчайшем пути.	11	Задача о кратчайшем пути. Управление проектами и сетевое планирование. Задача о критическом пути и ее приложения к управлению проектами. Задача о наиболее надежном пути..	Современные пакеты прикладных программ для автоматизации управления проектами. Решение задач управления проектами в пакете Microsoft Project. Контрольное задание.	4
Тема 5. Потоки в сетях. Поиск максимального потока					
12	Сеть. Потоки в сетях. Задача о максимальном потоке. Алгоритм Форда — Фалкерсона.	12	Решение задач о максимальных одно- и многопродуктовых потоках.	Контрольное задание	4
Тема 6. Основы теории игр					
13	Математические модели конфликт-	13	Решение матричных игр путем	Контрольное задание.	4

	ных ситуаций. Антагонистическое поведение игроков. Матричная игра, ее геометрическая и экономическая интерпретация. Чистые и смешанные стратегии. Оптимальные стратегии. Основная теорема теории матричных игр, выражение оптимальных стратегий игроков через решения пары двойственных задач линейного программирования.		сведения к пре двойственных задач линейного программирования.		
14	Матричная игра как модель сотрудничества и конкуренции. Понятие о кооперативных играх. Биматричная игра. Переговорное множество. Оптимальность по Парето. Равновесие Нэша.	14	Решение биматричных игр в некооперативном и кооперативном вариантах.	Контрольное задание.	4
Тема 7. Основы теории принятия решений в условиях неопределенности					
15	Матрица последствий и матрица сожалений, их экономическая интерпретация. Принятие решений в условиях полной неопределенности: критерии Вальда, Сэвиджа, Гурвица. Принятие решений в условиях частичной неопределенности: критерии максимизации ожидаемого дохода, минимизации ожидаемых сожалений.	15	Исследование ситуаций принятия решений в условиях полной и частичной неопределенности.	Байесовский подход к принятию решений и его экономические приложения. Контрольное задание.	4
15	Итого	15			84

Контрольные задания

1. **Линейная производственная задача.** Предприятие может выпускать четыре вида продукции, используя для этого три вида ресурсов. Известны технологическая матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

затрат ресурсов на производство единицы каждого вида продукции [элемент a_{ij} этой матрицы равен количеству ресурса i-го вида ($i = 1, 2, 3$), которое необходимо затратить в процессе производства единицы продукции j-го вида ($j = 1, 2, 3, 4$)], вектор

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

объемов ресурсов и вектор

$$\mathbf{c} = (c_1 \ \ c_2 \ \ c_3 \ \ c_4)$$

удельной прибыли на единицу продукции. Исходные данные для каждого варианта компактно записаны в прил. 1 в следующем виде.

c_1	c_2	c_3	c_4	
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_3

Требуется составить производственную программу, обеспечивающую предприятию наибольшую прибыль с учетом ограниченности запасов ресурсов.

Для этого необходимо обсудить экономическое содержание линейной производственной задачи и сформулировать ее математическую модель, преобразовать данную задачу к виду основной задачи линейного программирования, решить ее симплексным методом, обосновывая каждый шаг вычислительного процесса, найти оптимальную производственную программу, максимальную прибыль, остатки ресурсов различных видов и определить узкие места производства (дефицитные ресурсы).

Затем требуется сформулировать задачу, двойственную линейной производственной задаче, обсудить ее экономическое содержание и записать математическую модель, после чего найти решение двойственной задачи, пользуясь второй основной теоремой двойственности, обосновав экономический смысл этой теоремы.

Указать оптимальную производственную программу и оценки технологий, максимальную прибыль и минимальную суммарную оценку всех ресурсов, остатки и двойственные оценки ресурсов и обсудить экономический смысл всех этих величин.

После этого необходимо с помощью надстройки «Поиск решения» пакета «Microsoft Excel» проверить правильность решения задачи и, кроме того, определить границы, в которых могут изменяться коэффициенты целевой функции, в пределах которых не изменяется ассортимент выпускаемой продукции, и границы, в которых могут изменяться правые части ограничений, в пределах которых сохраняется устойчивость двойственных оценок.

2. **Задача о расшивке узких мест производства.** При выполнении оптимальной производственной программы в линейной производственной задаче некоторые ресурсы расходуются полностью и образуют узкие места. Требуется определить план заказа дополнительных объемов этих ресурсов, обеспечивающий максимальный прирост прибыли предприятия при условии сохранения устойчивости двойственных оценок, если поставщики могут предоставить дополнительно не более трети от первоначальных запасов соответствующих ресурсов.

3. **Целочисленная задача о расшивке узких мест производства.** Если полученное решение задачи о расшивке узких мест производства оказалось не целочисленным, то требуется с помощью метода ветвей и границ найти целочисленное решение этой задачи.

4. **Транспортная задача линейного программирования.** Однородный продукт, сосредоточенный на трех складах фирмы в количествах a_1, a_2, a_3 единиц, необходимо распределить между четырьмя магазинами, которым необходимо соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 единиц продукта. Стоимость перевозки единицы продукта из i-го пункта отправления ($i = 1, 2, 3$) в j-й пункт назначения ($j = 1, 2, 3, 4$) равна c_{ij} и известна для всех маршрутов. Вектор запасов продукта на складах

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

вектор запросов продукта магазинами

$$\mathbf{b} = (b_1 \;\; b_2 \;\; b_3 \;\; b_4)$$

и матрица транспортных тарифов

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix}$$

известны и для каждого варианта компактно записаны в прил. 2 в следующем виде.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}

a_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}
a_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}

Требуется определить оптимальный план перевозок, при котором запросы магазинов были бы удовлетворены в наибольшей степени за счет имеющегося на складах количества продукта, и при этом обязательно были бы удовлетворены запросы первого магазина, а общие транспортные расходы по доставке продукта были минимальны.

Для этого необходимо составить математическую модель транспортной задачи, преобразовать ее к закрытой форме путем введения фиктивного поставщика или потребителя и найти решение этой задачи с помощью метода потенциалов, обосновывая каждый шаг вычислительного процесса.

Указать оптимальный план перевозок, минимальные транспортные расходы, потенциалы поставщиков и потребителей, оценки клеток и обсудить экономический смысл всех этих величин.

5. **Динамическая задача распределения инвестиций.** Производственное объединение состоит из четырех предприятий ($n = 4$). Общая сумма капитальных вложений равна 700 тыс. руб. ($b = 700$), выделяемые предприятиям суммы кратны 100 тыс. руб. Если j-е предприятие получает инвестиции в объеме ξ тыс. руб., то прирост годовой прибыли на этом предприятии составит $f_j(\xi)$ тыс. руб. в год. Значения функций $f_j(\xi)$ известны и для каждого варианта компактно записаны в прил. 3 в следующем виде.

$f_1(0)$	$f_1(100)$	$f_1(200)$	$f_1(300)$	$f_1(400)$	$f_1(500)$	$f_1(600)$	$f_1(700)$
$f_2(0)$	$f_2(100)$	$f_2(200)$	$f_2(300)$	$f_2(400)$	$f_2(500)$	$f_2(600)$	$f_2(700)$
$f_3(0)$	$f_3(100)$	$f_3(200)$	$f_3(300)$	$f_3(400)$	$f_3(500)$	$f_3(600)$	$f_3(700)$
$f_4(0)$	$f_4(100)$	$f_4(200)$	$f_4(300)$	$f_4(400)$	$f_4(500)$	$f_4(600)$	$f_4(700)$

Требуется найти такое распределение инвестиций между предприятиями, которое максимизирует суммарный прирост прибыли на всех предприятиях вместе. Для этого необходимо составить математическую модель динамической задачи распределения инвестиций и решить ее методом динамического программирования, обосновывая каждый шаг вычислительного процесса.

6. **Динамическая задача управления производством и запасами.** Рассматривается трехэтапная система управления запасами с дискретной продукцией и динамическим детерминированным спросом. Заявки потребителей на продукцию составляют на этапе j равен d_j единиц ($j = 1, 2, 3$). К началу первого этапа на складе имеется только y_1 единицы продукции. Затраты на хранение единицы продукции на этапе j равны h_j. Затраты на производство x_j единиц продукции на j-м этапе определяются функцией

$$\varphi_j(x_j) = ax_j^2 + bx_j + c,\ j = 1, 2, 3.$$

Требуется указать, сколько единиц продукции на отдельных этапах следует производить, чтобы заявки потребителей были удовлетворены, а общие затраты на производство и хранение за все три этапа были наименьшими. Для этого необходимо составить математическую модель динамической задачи управления производством и запасами и решить ее методом динамического программирования, обосновывая каждый шаг вычислительного процесса. Исходные данные приведены для каждого варианта в прил. 4.

7. **Задача о максимальном потоке в сети.** Требуется определить максимальный поток в сети, изображенной на рис. 1, из вершины X_i в вершину X_j, где числа на дугах, снабженные стрелками, означают пропускные способности этих дуг в указанных направлениях. Номера вершин *i* и *j* для каждого варианта приведены в прил. 5.

8. **Задача о кратчайшем пути.** Требуется определить кратчайший путь из вершины X_i в вершину X_j в графе, изображенном на рис. 2, где числа на дугах означают длины этих дуг. Номера вершин *i* и *j* для каждого варианта приведены в прил. 5.

9. **Задача о критическом пути.** Требуется определить кратчайший путь из вершины X_i в вершину X_j в графе, изображенном на рис. 2, где числа на дугах означают длины этих дуг. Номера вершин *i* и *j* для каждого варианта приведены в прил. 5.

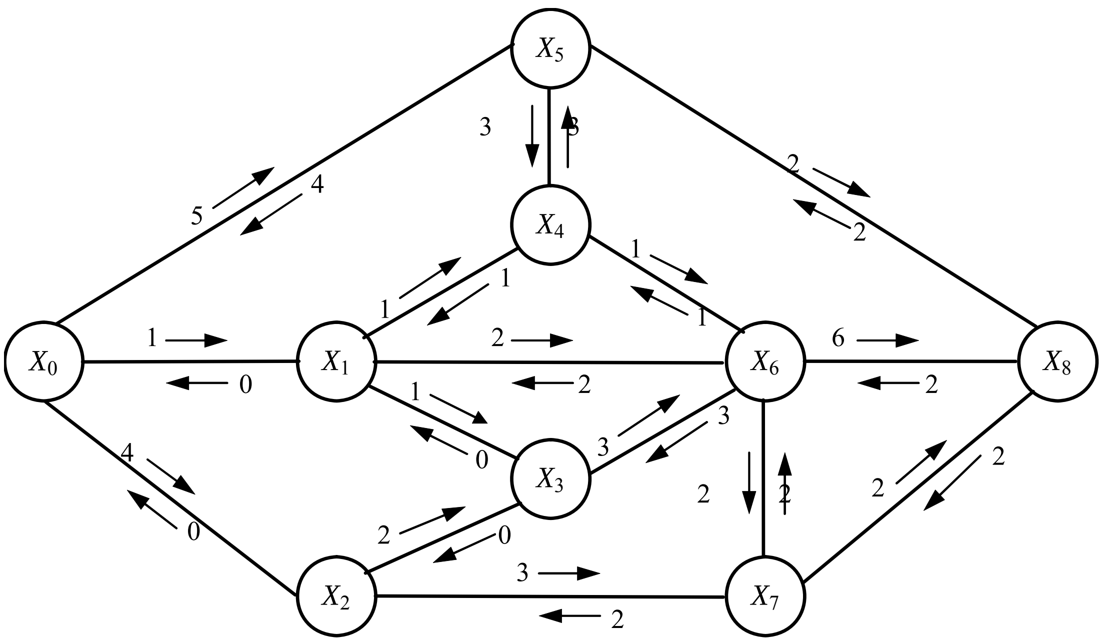

Рис. 1. *Сеть в задаче о максимальном потоке*

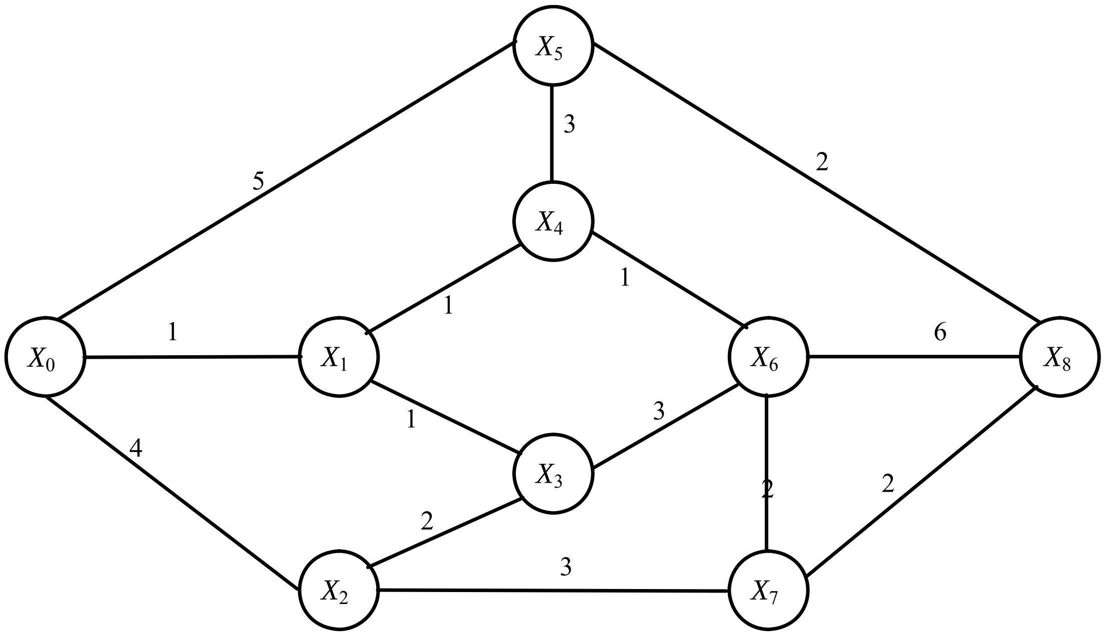

Рис. 2. *Граф в задачах о кратчайшем и критическом путях*

10. **Матричная игра.** Предприятие имеет две стратегии рыночного поведения, тогда как его конкурент имеет четыре таких стратегии. Прибыль (в млн. руб.), которую получит предприятие при условии, что оно изберет стратегию i $(i = 1, 2)$, а его конкурент — стратегию j $(j = 1, 2, 3, 4)$, равна π_{ij}. Платежные матрицы П для каждого варианта приведены в прил. 6. Требуется найти оптимальные смешанные стратегии предприятия и конкурента, а также цену игры — оптимальную прибыль предприятия.

11. **Принятие решений в условиях неопределенности.** Возможные значения курса базовой валюты в течение ближайшего года представлены четырьмя интервалами. Банк рассматривает четыре инвестиционных проекта, каждый из которых связан с международным бизнесом. Матрицы последствий от принятия банком i-го инвестиционного проекта при условии, что курс валюты окажется в j-м интервале, приведены в прил. 7. Там же приведены прогнозируемые экспертами вероятности возможных интервалов курса базовой валюты. Требуется построить матрицу сожалений, найти решения, рекомендуемые правилами Вальда, Сэвиджа, максимального ожидаемого дохода и минимального ожидаемого риска, а также определить проекты, оптимальные по Парето.

12. **Оптимальность по Парето.** Инвестор рассматривает четыре инвестиционные операции со случайными эффективностями, описываемыми случайными величинами E_1, E_2, E_3, E_4 с рядами распределения, приведенными для каждого варианта в прил. 8. Требуется определить, какие из этих операций оптимальны по Парето.

13. **Многокритериальная оптимизация.** Методом последовательных уступок (допустимые уступки по первым двум критериям принять

равными $\delta_1 = 3$ и $\delta_2 = 2$) требуется решить следующую задачу векторной оптимизации:

$$z_1 = (3-n)x_1 + (n-6)x_2 \to \max,$$
$$z_2 = (5-n)x_1 + (n-7)x_2 \to \max,$$
$$z_1 = (n-5)x_1 + (8-n)x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 18, \\ 1 \leqslant x_1 \leqslant n+2, \\ 1 \leqslant x_2 \leqslant 9, \end{cases},$$

где n — номер варианта.

Вопросы к экзамену

1. Задача оптимального производственного планирования и ее математическая модель.

2. Общая задача математического программирования.

3. Различные формулировки задачи линейного программирования, функция цели, допустимые и оптимальные решения. Основная задача линейного программирования, ее векторная и матричная формы записи.

4. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования и симплексного метода. Графическое решение задачи линейного программирования с двумя переменными.

5. Симплексный метод линейного программирования: задача линейного программирования в предпочитаемой форме, выражение функции цели через свободные неизвестные, вычисление относительных оценочных коэффициентов Δ_j и значения целевой функции, соответствующих данному базисному допустимому решению.

6. Симплексный метод линейного программирования: исследование данного базисного допустимого решения на оптимальность, условие оптимальности в случае минимизируемой и максимизируемой функции цели.

7. Симплексный метод линейного программирования: условие единственности базисного оптимального решения. Условие неограниченности целевой функции на множестве допустимых решений.

8. Симплексный метод линейного программирования: переход от одного базисного допустимого решения к другому, правила выбора разрешающей неизвестной и разрешающего уравнения, их обоснование. Монотонность и конечность симплексного алгоритма для невырожденной задачи линейного программирования.

9. Применение искусственных базисных неизвестных к решению основной задачи линейного программирования. Условие противоречивости системы условий исходной задачи.

10. Двойственные (расчетные) оценки ресурсов. Симметричная пара двойственных задач линейного программирования.

11. Несимметричная пара двойственных задач линейного программирования, правила составления двойственной задачи для данной задачи линейного программирования со смешанными ограничениями.

12. Основное неравенство теории двойственности линейного программирования. Малая теорема двойственности и ее экономическое содержание.

13. Теорема о достаточном условии оптимальности решений пары двойственных задач линейного программирования.

14. Первая основная теорема двойственности и ее экономическое истолкование.

15. Вторая основная теорема двойственности (о дополняющей нежесткости) и ее экономическое истолкование.

16. Третья основная теорема двойственности (об оценках влияния ресурсов на выпуск продукции) и ее экономическое содержание.

17. Перераспределение ресурсов между предприятиями холдинга с помощью двойственных оценок ресурсов.

18. Условие сохранения структуры производственной программы и двойственных оценок ресурсов при изменении объемов ресурсов.

19. Задача о расшивке узких мест производства, ее математическая модель и решение.

20. Транспортная задача по критерию стоимости: постановка и математическая модель, свойства закрытой модели. Преобразование открытой модели в закрытую.

21. Методы построения первого базисного решения транспортной задачи.

22. Метод потенциалов для решения транспортной задачи.

23. Задача целочисленного программирования, понятие о методе ветвей и границ: основные идеи, описание алгоритмов.

24. Задача выпуклого программирования, ее геометрическая интерпретация и экономические приложения. Функция Лагранжа. Теорема Куна — Таккера. Условия Куна — Таккера в дифференциальной форме, их геометрическая и экономическая интерпретация.

25. Градиентные методы нелинейной оптимизации.

26. Методы штрафных функций.

27. Многокритериальная оптимизация. Оптимальность по Парето. Метод последовательных уступок.

28. Динамическое программирование как метод решения многошаговых задач управления. Параметр состояния и функция состояния. Принцип оптимальности и рекуррентные соотношения.

29. Задача распределения капитальных вложений: постановка, математическая модель и решение методом динамического программирования.

30. Динамическая задача управления запасами: постановка, математическая модель и решение методом динамического программирования.

31. Основные понятия теории графов.

32. Задача о максимальном потоке в сети и ее решение.

33. Задача о кратчайшем пути в графе и ее решение.

34. Задача о критическом пути в графе и ее решение.

35. Матричная игра как модель конфликтной ситуации. Матрица игры. Верхняя и нижняя цена игры, седловая точка. Чистые и смешанные стратегии игроков.

36. Ряд распределения выигрышей в матричной игре. Средний ожидаемый выигрыш и риск. Оптимальные стратегии игроков и цена игры. Представление математического ожидания выигрыша первого игрока и дисперсии в игре с двумя стратегиями первого игрока.

37. Матричная игра как модель конкуренции и сотрудничества. Графическое решение игр с двумя стратегиями одного из игроков. Доминирование чистых стратегий.

38. Матричная игра типа с произвольным числом стратегий игроков. Критерий оптимальности стратегий.

39. Теорема о преобразовании матрицы игры, сохраняющем оптимальные стратегии игроков.

40. Основная теорема теории игр, выражение оптимальных стратегий игроков через решения пары двойственных задач линейного программирования.

41. Принятие решений в условиях полной неопределенности. Матрица последствий и матрица сожалений. Критерии Вальда, Сэвиджа и Гурвица.

42. Принятие решений в условиях частичной неопределенности. Критерии максимизации ожидаемого дохода, минимизации ожидаемых сожалений.

Рекомендуемая литература

Основная

1. *Колемаев В. А., Соловьев В. И., Гатауллин Т. М. и др.* Математические модели и методы исследования операций: Учебник. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008. – 386 с.

2. *Колемаев В. А., Соловьев В. И., Бушуев А. Ю. и др.* Практикум по исследованию операций в экономике: Учебное пособие. – М.: Вега-Инфо, 2008. – 208 с.

3. *Соловьев В. И.* Математика в экономической деятельности: Учебное пособие. – М.: Дрофа, 2008.

4. *Карандаев И. С., Малыхин В. И., Соловьев В. И.* Прикладная математика: Учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 256 с.

5. *Кузнецов А. В., Сакович В. А., Холод Н. И.* Высшая математика: Математическое программирование: Учебник. – Минск: Вышэйшая школа, 2001. – 351 с.

6. *Кузнецов А. В., Сакович В. А., Холод Н. И. и др.* Сборник задач и упражнений по высшей математике: Математическое программирование: Учебное пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 2001. – 447 с.

Дополнительная

7. *Акулич И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.

8. *Афанасьев М. Ю., Суворов Б. П.* Исследование операций в экономике. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 326 с.

9. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. – М.: Факториал, 2002. – 824 с.

10. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. – М.: Советское радио, 1972. – 552 с.

11. *Вентцель Е. С.* Исследование операций: Задачи, принципы, методология. – М.: Дрофа, 2004. – 208 с.

12. *Зайцев М. Г.* Методы оптимизации управления для менеджеров: Компьютерно-ориентированный подход. – М.: Дело, 2002. – 304 с.

13. *Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Фридман М. Н. и др.* Исследование операций в экономике. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 407 с.

14. *Карандаев И. С.* Решение двойственных задач в оптимальном планировании. – М.: Статистика, 1976. – 88 с.

15. *Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б.* Математическое программирование. – М: Высшая школа, 1980. – 300 с.

16. *Дубров А. М., Лагоша Б. А., Хрусталев Е. Ю., Барановская Т. П.* Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 224 с.

17. *Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М.* Методы оптимизации. – м.: Наука, 1978. – 352 с.

18. *Морозов В. В., Сухарев А. Г., Федоров В. В.* Исследование операций в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа, 1986. – 287 с.

19. *Соловьев В. И.* Математические методы управления рисками. – М.: ГУУ, 2003. – 100 с.

20. *Соловьев В. И.* Обобщенный принцип максимума как необходимое условие оптимальности в распределенной задаче оптимального управления с ограничениями в частных производных // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2004. – Т. 11. – № – С. 229–230.

21. *Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В.* Математика в экономике: Учебник: В 2-х ч. Ч. 1. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 224 с.

22. *Таха Х.* Введение в исследование операций. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 912 с.

Приложение 1. Исходные данные для линейной производственной задачи

Вариант 1.

45	60	21	14	
3	6	3	0	180
6	2	0	6	210
2	3	5	7	112

Вариант 2.

30	11	45	6	
3	2	6	0	150
4	2	3	5	130
4	3	2	4	124

Вариант 3.

35	41	22	12	
2	2	3	4	151
3	1	0	2	156
1	4	4	0	162

Вариант 4.

59	27	20	35	
1	3	2	2	102
3	2	0	3	204
4	2	3	1	188

Вариант 5.

34	32	28	36	
2	4	5	3	128
3	0	4	1	130
3	5	0	2	142

Вариант 6.

27	10	9	8	
3	5	0	6	144
2	0	1	0	130
1	4	2	3	140

Вариант 7.

36	32	10	13	
2	3	4	1	103
4	2	0	2	148
2	8	7	0	158

Вариант 8.

48	30	29	10	
3	2	4	3	198
2	3	1	2	96
6	5	1	0	228

Вариант 9.

38	12	28	21	
3	0	3	3	186
2	3	1	1	102
4	3	2	2	196

Вариант 0.

30	28	9	23	
1	0	2	5	110
3	6	0	4	126
2	4	1	3	114

Приложение 2. Исходные данные для транспортной задачи

Вариант 1.

	45	60	21	24
50	3	6	3	1
70	6	2	1	6
40	10	3	5	7

Вариант 2.

	30	11	45	36
50	3	2	6	7
70	7	8	3	5
30	4	3	4	6

Вариант 3.

	35	41	52	32
70	2	2	3	2
80	4	1	5	2
47	6	4	6	3

Вариант 4.

	59	27	40	35
45	1	3	2	2
55	3	2	4	3
70	4	2	3	1

Вариант 5.

	36	32	40	53
40	2	3	4	1
60	4	2	1	2
70	2	7	7	1

Вариант 6.

	48	30	29	40
40	3	6	4	3
45	2	3	1	3
70	6	5	1	4

Вариант 7.

	38	42	28	41
60	3	2	4	3
50	5	3	1	4
48	4	3	6	1

Вариант -8.

	60	32	44	57
50	3	2	4	1
90	4	6	5	2
60	9	4	10	6

Вариант 9.

	48	75	41	32
90	4	1	3	1
75	4	1	3	2
40	5	2	3	5

Вариант 0.

	28	44	31	20
50	4	2	2	6
40	5	3	2	7
42	1	4	3	2

Приложение 3. Исходные данные для динамической задачи распределения инвестиций

Вариант 1.

ξ	0	100	200	300	400	500	600	700
$f_1(\xi)$	0	20	44	55	63	67	70	70
$f_2(\xi)$	0	18	29	49	72	87	100	108
$f_3(\xi)$	0	25	41	52	74	82	88	90
$f_4(\xi)$	0	30	52	76	90	104	116	125

Вариант 2.

0	15	24	30	36	40	43	45
0	18	26	34	39	42	44	46
0	16	27	37	44	48	50	56
0	10	17	23	29	34	38	41

Вариант 3.

0	42	58	71	80	89	95	100
0	30	49	63	68	69	65	60
0	22	37	49	59	68	76	82
0	50	68	82	92	100	107	112

Вариант 4.

0	5	10	14	17	19	21	22
0	8	13	18	21	23	21	17
0	10	16	21	24	27	29	30
0	11	19	26	30	33	35	36

Вариант 5.

0	28	45	65	78	90	102	113
0	25	41	55	65	75	80	85
0	15	25	40	50	62	73	82
0	20	33	42	48	53	56	58

Вариант 6.

0	37	64	87	105	120	134	145
0	48	75	98	120	132	144	156
0	85	100	111	118	124	129	132
0	47	70	80	86	91	94	98

Вариант 7.

0	10	20	30	38	43	49	52
0	13	25	37	47	55	61	66
0	6	13	20	27	33	38	41
0	24	36	42	46	48	48	49

Вариант 8.

0	3	5	7	8	9	10	10
0	5	8	10	12	13	14	15
0	8	13	17	20	23	25	27
0	6	10	13	15	16	16	16

Вариант 9.

0	28	42	51	57	61	64	66
0	20	27	30	31	32	32	33
0	8	26	37	47	53	58	61
0	5	20	29	36	41	45	47

Вариант 0.

0	5	10	14	17	19	21	22
0	20	34	45	50	48	40	40
0	15	24	30	38	46	52	53
0	26	30	35	40	45	48	50

Приложение 4. Исходные данные для динамической задачи управления производством и запасами

Вариант	d_1	d_2	d_3	a	b	c	h_1	h_2	h_3	y_1
1	5	6	7	2	3	4	4	3	2	2
2	3	2	3	1	2	2	4	3	2	3
3	5	2	3	2	2	2	4	5	6	4
4	2	3	3	2	3	4	3	2	2	2
5	3	2	3	1	3	2	4	3	2	1
6	3	2	4	5	1	0	3	3	3	2
7	3	2	4	8	1	1	1	0	1	0
8	6	2	4	3	4	3	2	1	3	1
9	5	4	3	4	4	4	5	0	4	2
0	7	3	4	2	1	3	2	5	7	4

Приложение 5. Исходные данные для задач оптимизации на графах

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
i	2	3	4	5	6	7	8	2	3	4
j	8	7	6	5	4	3	2	7	8	8

Приложение 6. Исходные данные для матричной игры

Вариант 1.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Вариант 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Вариант 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Вариант 5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Вариант 6.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Вариант 7.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 8.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Вариант 9.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 0.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Приложение 7. Исходные данные для задачи принятия решений в условиях неопределенности

Последствия от реализации проектов

1.	0	8	16	20
2.	0	4	10	14
3.	0	4	5	20
4.	0	4	8	32
5.	0	8	12	24
6.	2	12	18	22
7.	2	6	12	20
8.	2	6	8	22
9.	−6	−4	−2	10
10.	−6	−2	0	6
11.	0	8	12	20
12.	−6	−5	−4	3
13.	0	2	4	16

Вероятности интервалов курса валюты

1.	1/2	1/8	1/8	1/4
2.	1/4	1/4	1/4	1/4
3.	1/2	1/4	1/5	1/20
4.	1/5	1/5	1/5	2/5
5.	1/2	1/8	1/8	1/4
6.	1/4	1/4	1/4	1/4
7.	1/2	1/4	1/5	1/20
8.	1/3	1/3	1/6	1/6
9.	1/2	1/4	1/8	1/8
0.	1/4	1/4	1/3	1/6

В варианте с номером n необходимо выбрать проекты с номерами $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ из числа приведенных выше, после этого нужно выбрать набор вероятностей интервалов курса валюты.

Приложение 8. Исходные данные для задачи оптимизации по Парето

1. (0, 1/2)(2, 1/4) (4, 1/8) (16, 1/8)
2. (0, 1/4) (4, 1/4) (6, 1/3) (12, 1/6)
3. (0, 1/3) (1, 1/3) (2, 1/6) (8, 1/6)
4. (0, 1/5) (4, 1/5) (6, 1/5) (10, 2/5)
5. (0, 1/5) (1, 2/5) (5, 1/5) (14, 1/5)
6. (0, 1/2) (8, 1/8) (16, 1/8) (20, 1/4)
7. (0, 1/4) (4, 1/4) (10, 1/4) (14, 1/4)
8. (2,1/2) (4,1/4) (6,1/8) (18,1/8)
9. (2, 1/4) (6, 1/4) (8, 1/3) (14, 1/6)
10. (2, 1/3) (3, 1/3) (4, 1/6) (10, 1/6)
11. (2, 1/5) (6, 1/5) (8, 1/5) (12, 2/5)
12. (2, 1/5) (4, 2/5) (6, 1/5) (18, 1/5)
13. (2, 1/2) (12, 1/8) (18, 1/8) (22, 1/4)

В варианте с номером n необходимо выбрать операции с номерами $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ из числа приведенных выше (для каждой операции компактно записан ряд ее распределения: первое число в скобках означает возможное значение эффективности операции, а второе — вероятность соответствующего значения). Например, первая операция имеет эффективность, описываемую таким рядом распределения:

$$\begin{array}{c|cccc} E_1 & 0 & 2 & 4 & 16 \\ \hline p & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \end{array}.$$