

Предупреждение типичных ошибок

1. При вычислении весов участков рамы не надо мельчить участки. Берите прямолинейные участки от одного изгиба до другого или до опоры.

2. Вычисляя момент наклонной силы, учитывайте обе ее составляющие. Не забывайте, что плечо силы относительно точки равно расстоянию от точки до *линии действия силы*, а не до точки приложения силы.

3. Знак сосредоточенного момента (пары) в уравнении моментов не зависит от взаимного расположения точки приложения момента и точки, относительно которой уравнение составляется. Он определяется самим моментом (против часовой стрелки “плюс”, по часовой стрелке “минус”). Точка приложения пары не требует точного задания, так как по свойству пары ее можно переносить в любую точку тела, не меняя воздействия на тело.

4. Точку приложения силы можно переносить вдоль линии действия силы, не меняя воздействия силы на тело (вектор силы в теоретической механике является *скользящим*). Перенеся силу вдоль ее линии действия поближе к точке, относительно которой вычисляется ее момент, можно упростить определение момента.

5. Наклонный стержень одним концом закреплен на неподвижном шарнире. Часто вместо того, чтобы просто отбросить стержень и приложить к телу одну силу R_H , направленную вдоль стержня, студент изображает две реакции этого шарнира, после чего в задаче количество неизвестных становится больше, чем уравнений. Одновременно с такой ошибкой возникает вопрос, чему равна длина наклонного опорного стержня? Длина стержня в задаче не дана.

6. Вес участков рамы учитывайте только в тех задачах, где это оговорено. В данной задаче рама имеет вес.

2.2 Ферма. Аналитические методы расчета

Постановка задачи. *Плоская ферма опирается на неподвижный и подвижный шарниры. К узлам фермы приложены нагрузки. Найти усилия в стержнях фермы методом Риттера¹ или методом вырезания узлов.*

Эта задача является усложненным вариантом задачи из §1.1, где усилия в стержнях можно было легко определить только из уравнений проекций, не находя реакции опор и не привлекая понятие момента

¹Август Риттер (1826-1906) — немецкий механик.

силы. Аналогично можно поступить и в этой задаче, однако порядок системы линейных уравнений, описывающей равновесие всех узлов, будет велик, поэтому, во-первых, надежно решить такую систему можно только с помощью компьютера (§ 6.1, с. 139), во-вторых, таким образом будет проделана лишняя работа, так как система уравнений содержит усилия всех стержней, в том числе и тех, которые по условию задачи не требуется определять. Поэтому для решения сложных ферм, содержащих большое число стержней, применим метод Риттера, основная идея которого — независимое определение усилий в стержнях. Эту же идею можно с успехом применять и в других задачах статики.

План решения

1. Освобождаем ферму от внешних связей. Действие опорных шарниров заменяем их реакциями. Для определения реакций опор составим три уравнения равновесия.

2. Проверяем найденные реакции, составляя еще одно уравнение равновесия фермы.

3. В тех стержнях, где это возможно, усилия находим методом Риттера². Мысленно разделяем ферму на две части, пересекая *три* стержня (сечение Риттера). Действие разрезанных стержней заменяем их усилиями, направляя соответствующие векторы из узлов в сторону сечения, предполагая стержни растянутыми.

Рассматриваем равновесие одной из частей фермы (как правило, где меньше нагрузок). Для стержней, усилия в которых необходимо определить, находим точки Риттера (моментные точки). Они являются точками попарного пересечения линий действия сил в рассеченных стержнях. Искомые усилия определяем из уравнений моментов рассматриваемой части относительно точек Риттера.

Если два стержня в сечении параллельны, то точки Риттера для третьего стержня не существует, и для определения усилия в нем необходимо составить уравнение проекций на ось, перпендикулярную параллельным стержням.

В уравнение метода Риттера всегда входит усилие только одного стержня. Это позволяет искать усилия независимо одно от другого, уменьшая тем самым возможность ошибок и избегая накопления неизбежных погрешностей округления в численных расчетах.

4. Определяем усилия методом вырезания узлов (§ 1.1). Этот метод применяют в тех случаях, когда сечения Риттера для нужного стержня не существует. Вырезаем узел фермы, к которому подходит стержень с

² Другие названия — метод сечений, метод моментных точек.

искомым усилием. Выбираем оси и составляем уравнения равновесия узла в проекциях. Решаем уравнения относительно искомого усилия. Если к узлу подходит более двух стержней с неизвестными усилиями, то метод вырезания узлов можно комбинировать с методом Риттера.

ПРИМЕР. Плоская ферма опирается на неподвижный и подвижный шарниры (рис. 22). К узлам фермы приложены две вертикальные нагрузки $P = 90$ кН и две наклонные $Q = 40$ кН и $F = 38$ кН, $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 15^\circ$. Найти усилия в стержнях 1–5.

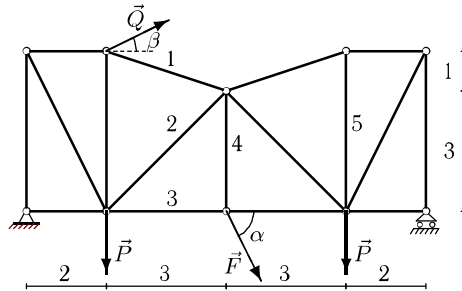


Рис. 22

Решение

1. Освобождаем ферму от внешних связей. Действие опор заменяем их реакциями. Левую (неподвижную) шарнирную опору заменяем двумя составляющими реакции X_A , Y_A , правую (подвижную) — одной вертикальной Y_B (рис. 23). Для определения реакций опор составляем три уравнения равновесия — уравнение проекций на горизонтальную ось x и два уравнения моментов относительно опор³:

$$\sum X_i = X_A + F \cos \alpha + Q \cos \beta = 0,$$

$$\sum M_A = -2 \cdot P + 2 Q \sin \beta - 4 Q \cos \beta - 5 F \sin \alpha - 8 P + 10 Y_B = 0,$$

$$\sum M_B = 8 P - 8 Q \sin \beta - 4 Q \cos \beta + 5 F \sin \alpha + 2 P - 10 Y_A = 0.$$

Система уравнений состоит из трех независимых друг от друга уравнений, решение которых легко найти, подставив численные значения нагрузок и углов из условия

$$Y_A = 81.827 \text{ кН}, \quad Y_B = 118.948 \text{ кН}, \quad X_A = -60.433 \text{ кН}.$$

2. Проверяем найденные вертикальные реакции, составляя уравне-

³Уравнение проекций на ось y оставим для проверки реакций Y_A и Y_B .

ние проекций всех сил на ось y :

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= Y_A - P + Q \sin \beta - F \sin \alpha - P + Y_B = \\ &= 81.827 - 90 + 40 \sin 15 - 38 \sin 55 - 90 + 118.948 = 0.\end{aligned}$$

Горизонтальную реакцию X_A можно проверить, составив еще одно уравнение моментов, например относительно точки D .

3. *Методом Риттера* находим усилия в стержнях 1, 2, 3. Сечением I-I (рис. 23) мысленно разделяем ферму на две части, пересекая три стержня. Действие разрезанных частей заменяем их усилиями.

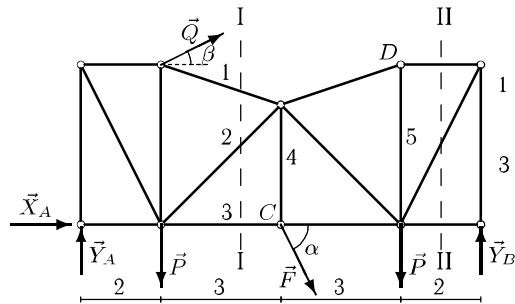


Рис. 23

Рассматриваем левую часть (рис. 24), на которую действуют четыре известных силы \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{P} , \vec{Q} и реакции стержней, направленные из узлов к сечению. Точки Риттера R_1 , R_2 , R_3 находятся в точках попарного пересечения линий действия сил \vec{S}_1 , \vec{S}_2 , \vec{S}_3 . Номер точки Риттера соответствует номеру рассеченного стержня, который через эту точку не проходит.

Точка R_2 находится на продолжении стержня 1. Расстояние до нее легко вычислить, зная угол γ между стержнем 1 и горизонталью: $\operatorname{tg} \gamma = 1/3$.

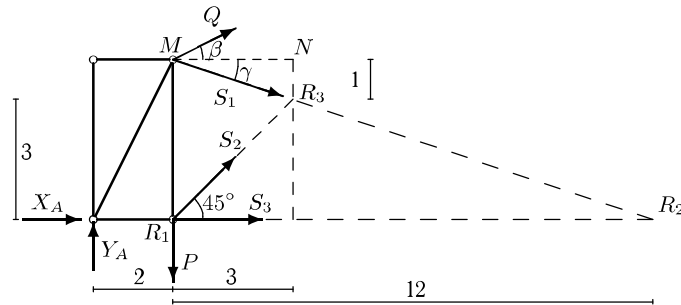


Рис. 24

Уравнения метода Риттера имеют вид

$$\sum M_{R_1} = -4 \cdot S_1 \cos \gamma - 4 \cdot Q \cos \beta - 2 \cdot Y_A = 0,$$

$$\sum M_{R_2} = -12 \cdot S_2 \cos 45^\circ - 4 \cdot Q \cos \beta - 12 \cdot Q \sin \beta + 12 \cdot P - 14 \cdot Y_A = 0,$$

$$\sum M_{R_3} = 3 \cdot S_3 - 1 \cdot Q \cos \beta - 3 \cdot Q \sin \beta + 3 \cdot P - 5 \cdot Y_A + 3 \cdot X_A = 0.$$

Находим решение системы: $S_1 = -83.854$ кН, $S_2 = -40.584$ кН, $S_3 = -130.04$ кН.

4. Методом *вырезания узлов* определяем S_4 . Вырезаем узел C (рис. 23) и составляем уравнение проекций на ось y (рис. 25), из которого сразу же определяем искомое усилие:

$$\sum Y_i = S_4 - F \sin \alpha = 0, \quad S_4 = 31.128 \text{ кН.}$$

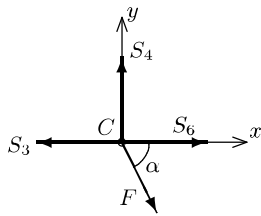


Рис. 25

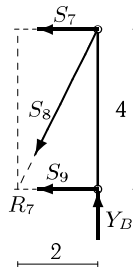


Рис. 26

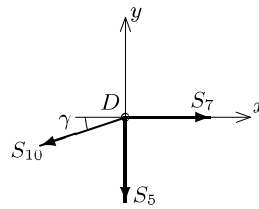


Рис. 27

Усилие больше нуля, следовательно, стержень 4 растянут. Усилие в стержне 5 методом Риттера определить нельзя — не существует сечения, делящего ферму на две части и пересекающего при этом три стержня. В этом состоит недостаток метода. Поэтому воспользуемся

