

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

1. Вычислить $\int_L f(z) dz$.

1. $f(z) = \operatorname{Re} z$; L : контур, состоящий из верхней половины единичной окружности и горизонтального диаметра.
2. $f(z) = \operatorname{Im} z$; L : контур кругового сектора с дугой $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.
3. $f(z) = z \bar{z}$; L : контур прямоугольника с вершинами $-1, 1, 1+i, -1+i$.
4. $f(z) = \bar{z} \operatorname{Re} z$; L : контур, состоящий из правой половины единичной окружности и вертикального диаметра.
5. $f(z) = \bar{z} \operatorname{Im} z$; L : контур кругового сектора с дугой $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
6. $f(z) = \operatorname{Re} z$; L : контур кругового сектора с дугой $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.
7. $f(z) = \operatorname{Im} z$; L : контур прямоугольника с вершинами $-1, 1, 1+i, -1+i$.
8. $f(z) = z \bar{z}$; L : контур, состоящий из правой половины единичной окружности и вертикального диаметра.
9. $f(z) = \bar{z} \operatorname{Re} z$; L : контур кругового сектора с дугой $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
10. $f(z) = \bar{z} \operatorname{Im} z$; L : контур, состоящий из верхней половины единичной окружности и горизонтального диаметра.
11. $f(z) = \operatorname{Re} z$; L : контур прямоугольника с вершинами $-1, 1, 1+i, -1+i$.
12. $f(z) = \operatorname{Im} z$; L : контур, состоящий из правой половины единичной окружности и вертикального диаметра.
13. $f(z) = z \bar{z}$; L : контур кругового сектора с дугой $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
14. $f(z) = \bar{z} \operatorname{Re} z$; L : контур, состоящий из верхней половины единичной окружности и горизонтального диаметра.
15. $f(z) = \bar{z} \operatorname{Im} z$; L : контур кругового сектора с дугой $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.

16. $f(z) = \operatorname{Re} z$; L : контур, состоящий из правой половины единичной окружности и вертикального диаметра.
17. $f(z) = \operatorname{Im} z$; L : контур кругового сектора с дугой $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
18. $f(z) = z \bar{z}$; L : контур, состоящий из верхней половины единичной окружности и горизонтального диаметра.
19. $f(z) = \bar{z} \operatorname{Re} z$; L : контур кругового сектора с дугой $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.
20. $f(z) = \bar{z} \operatorname{Im} z$; L : контур прямоугольника с вершинами $-1, 1, 1+i, -1+i$.
21. $f(z) = \operatorname{Re} z$; L : контур кругового сектора с дугой $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
22. $f(z) = \operatorname{Im} z$; L : контур, состоящий из верхней половины единичной окружности и горизонтального диаметра.
23. $f(z) = z \bar{z}$; L : контур кругового сектора с дугой $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.
24. $f(z) = \bar{z} \operatorname{Re} z$; L : контур прямоугольника с вершинами $-1, 1, 1+i, -1+i$.

2. Используя теорему Коши для многосвязной области и интегральную формулу Коши, вычислить интеграл $\int_L f(z) dz$.

1. $f(z) = \frac{e^z}{z^2 + \frac{\pi^2}{16}}$, $L: |z| = 2$;
2. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2 + 1}$, $L: |z+i| = 1$;
3. $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z(z-1)}$, $L: |z| = 2$;
4. $f(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 + 1}$, $L: |z| = 2$;
5. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2 - \frac{\pi^2}{4}}$, $L: |z-1| = 1$;
6. $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 - \frac{\pi^2}{16}}$, $L: |z-1| = 1$;
7. $f(z) = \frac{e^z}{z\left(z + \frac{\pi}{2}i\right)}$, $L: |z| = 2$;
8. $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 + 3z + 2}$, $L: |z+1| = 2$;
9. $f(z) = \frac{z^2 + 4}{z^2 - 5z + 6}$, $L: |z-1| = 3$;
10. $f(z) = \frac{e^z}{z^2 - 4}$, $L: |z| = 3$;

11. $f(z) = \frac{ze^z}{z^2 + 4}, \quad L: |z| = 3;$

12. $f(z) = \frac{z \sin z}{z^2 + 1}, \quad L: |z - i| = 1;$

13. $f(z) = \frac{e^{3z}}{z^2 + \frac{\pi^2}{9}}, \quad L: |z| = 2;$

14. $f(z) = \frac{z^2 - 2}{z^2 + 3z - 4}, \quad L: |z + 2| = 4;$

15. $f(z) = \frac{ze^{2z}}{z^2 + \frac{\pi^2}{16}}, \quad L: |z| = 1;$

16. $f(z) = \frac{e^{-iz} \cos z}{z^2 - \pi^2}, \quad L: |z + \pi| = \pi;$

17. $f(z) = \frac{z^2 e^{-z}}{z^2 + \frac{\pi^2}{36}}, \quad L: |z| = 1;$

18. $f(z) = \frac{1 + 3z - z^2}{z^2 + z - 12}, \quad L: |z + 1| = 5;$

19. $f(z) = \frac{z^2 + 3z}{z^2 + 9}, \quad L: |z| = 4;$

20. $f(z) = \frac{4 - z^2}{z^2 - 3z - 4}, \quad L: |z - 1| = 4;$

21. $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2 - \pi^2)}, \quad L: |z + \pi| = 4;$

22. $f(z) = \frac{2z^2 - 3z + 1}{z^2 - z - 12}, \quad L: |z - 2| = 6;$

23. $f(z) = \frac{z \cos \frac{z}{2}}{z^2 - 4\pi^2}, \quad L: |z| = 7;$

24. $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 2z + 5}, \quad L: |z| = 3.$

3. Используя теорему Коши для многосвязной области и интегральную формулу Коши для аналитической функции и ее производных, вычислить интеграл $\int_L f(z) dz$.

1. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z-i)}, \quad L: |z - i| = 2;$

2. $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z+1)}, \quad L: |z - 1| = 1;$

3. $f(z) = \frac{e^z \sin z}{z^3}, \quad L: |z| = 1;$

4. $f(z) = \frac{e^z \cos z}{\left(z - \frac{\pi}{2}i\right)^2}, \quad L: \left|z - \frac{\pi}{2}i\right| = \frac{\pi}{2};$

5. $f(z) = \frac{z \sin z}{\left(z + \frac{\pi}{2}\right)^2}, \quad L: |z| = 2;$

6. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z+i)}, \quad L: |z + i| = 2;$

7. $f(z) = \frac{\cos z}{(z-i)^4}, \quad L: |z - i| = 1;$

8. $f(z) = \frac{\cos z}{(z^2 - \pi^2)^2}, \quad L: |z + \pi| = \pi;$

9. $f(z) = \frac{z^3}{(z+i)^4}, \quad L: |z + i| = 1;$

10. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)^3}, \quad L: |z + 1| = 1;$

11. $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^3}, \quad L: |z + i| = 1;$

12. $f(z) = \frac{z^2 - z + 1}{(z^2 + 1)^2}, \quad L: |z - i| = 1;$

13. $f(z) = \frac{2z^2 - z + 1}{(z-i)^2(z+i)}, \quad L: |z + i| = 3;$

14. $f(z) = \frac{e^{2z}}{z^2(z-i)}, \quad L: |z| = \frac{1}{3};$

15. $f(z) = \frac{ze^z}{(z-1)^4}, \quad L: |z - 1| = 1;$

16. $f(z) = \frac{z^2 - 4z - 3}{(z+i)^2 z}, \quad L: |z + i| = \frac{1}{2};$

17. $f(z) = \frac{3z^2 + z - 4}{(z+2i)^2(z-i)}, \quad L: |z + i| = 3;$

18. $f(z) = \frac{e^{3z}}{(z+1)^2 z}, \quad L: |z + 1| = \frac{1}{2};$

19. $f(z) = \frac{z \cos z}{(z - \pi)^3}, \quad L: |z - \pi| = 1;$

20. $f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z-2i)^4}, \quad L: |z - 2i| = 1;$

21. $f(z) = \frac{2z^2 + 3z - 1}{(z-i)^2 z}, \quad L: |z - i| = \frac{1}{2};$

22. $f(z) = \frac{\cos z}{(z - \pi)^3(z + \pi)}, \quad L: |z - \pi| = 1;$

23. $f(z) = \frac{ze^{-z}}{(z+1)^3}, \quad L: |z + 1| = 1;$

24. $f(z) = \frac{\sin z}{\left(z + \frac{\pi}{6}\right)^3}, \quad L: \left|z + \frac{\pi}{6}\right| = 1.$

4. Найти круг сходимости степенного ряда.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(z-i)^n}{(2+i)^n};$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!z^n}{i^n};$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{(5n+3i)^n};$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{ni-1};$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{ne^{in}};$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(z-1)^n}{(2n)!};$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (in)^n (z+2)^n;$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z+i)^n}{(2n-i)^2};$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(2i)^{n-1}};$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2(z+1)^n}{n!};$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(1+in)^n};$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{2+in};$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-4i)^n}{n} (z+i)^n;$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)(z+2i)^n;$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{ni}{3n+1}\right)^n (z-i)^n;$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+i)^2 (z-2)^n;$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} n(4+3i)^n (z-2i)^n;$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{(2n-1)!} (z-i)^n;$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-2i)^n}{n+i} (z+i)^n;$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+i}{n^2} (z-2i)^n;$

21. $\sum_{n=0}^{\infty} (1-2i)^{2n} (z+2i)^n;$