

## РГР №1. Плоскопараллельное движение твердого тела.

Плоский механизм (рис. К.1-К.30) состоит из стержней, ползуна и ступенчатого колеса. Ведущим является звено 1. Точки  $D$  и  $K$  лежат в середине соответствующего стержня. Длины стержней, радиусы ступенчатого колеса (внешний  $R$ , внутренний  $r$ ), угловая скорость и угловое ускорение звена 1 приведены в таблице 1.1.

Определить скорости точек  $A, B, C, D, E, K, N, H$  с помощью мгновенного центра скоростей; угловые скорости звеньев 2, 3, 4, 5; ускорение точки  $B$  и угловое ускорение звена  $AB$ .

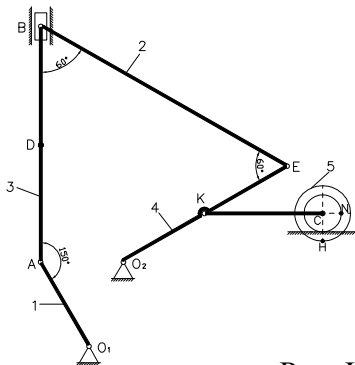


Рис. К.1

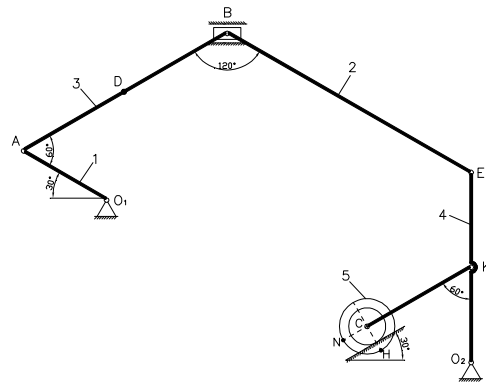


Рис. К.2

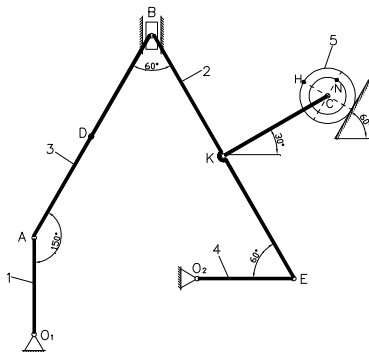


Рис. К.3

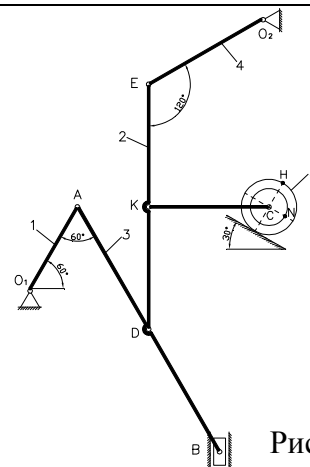


Рис. К.4

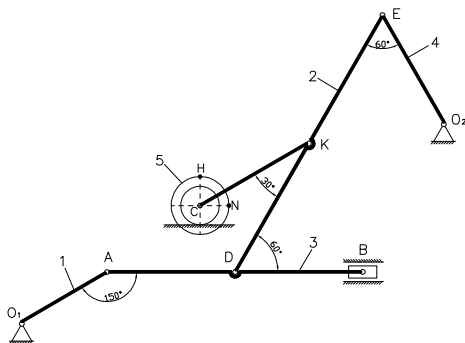


Рис. К.5

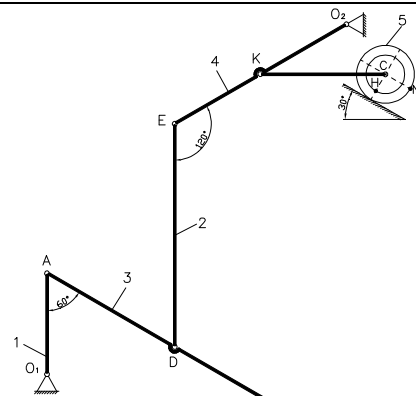


Рис. К.6

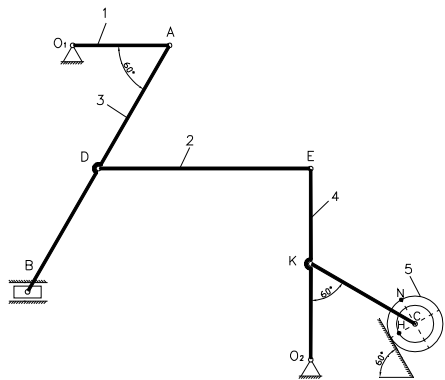


Рис. К.7

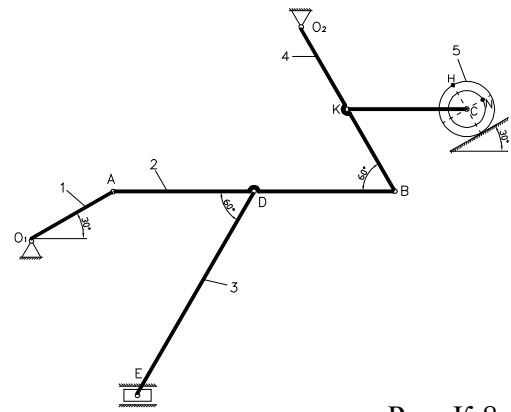


Рис. К.8

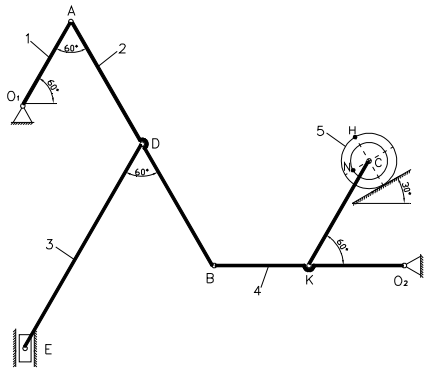


Рис. К.9

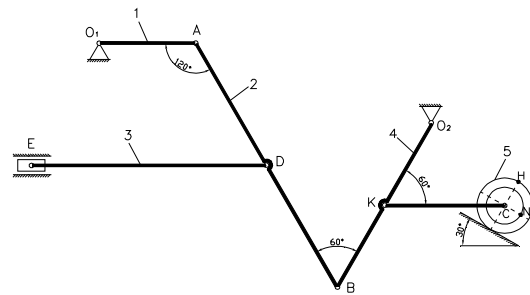


Рис. К.10

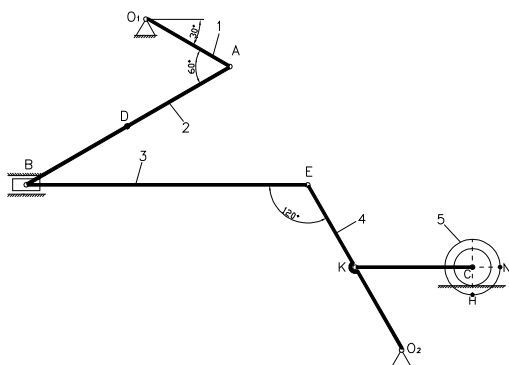


Рис. К.11

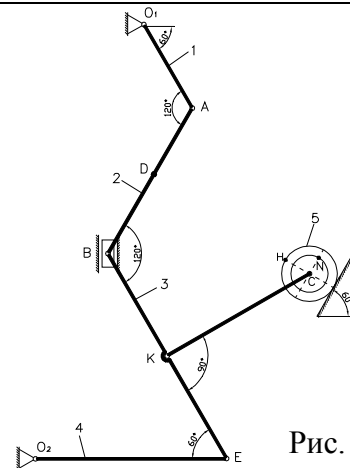


Рис. К.12

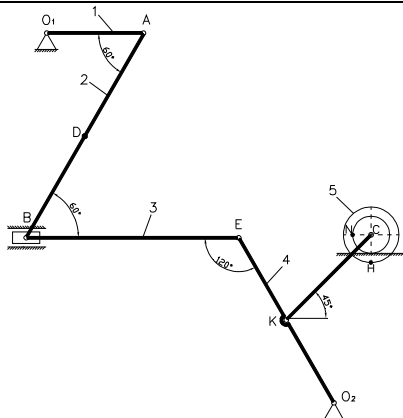


Рис. К.13

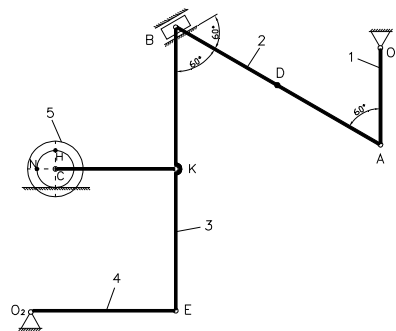


Рис. К.14

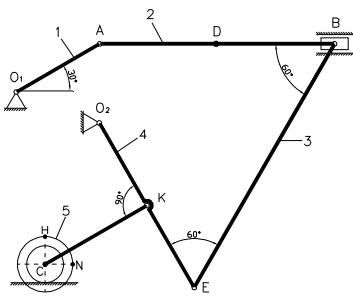


Рис. К.15

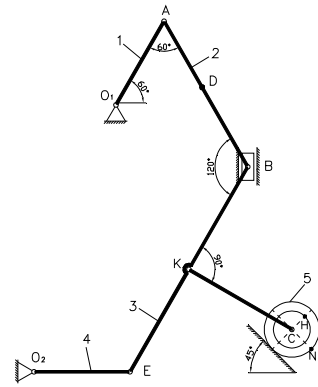


Рис. К.16

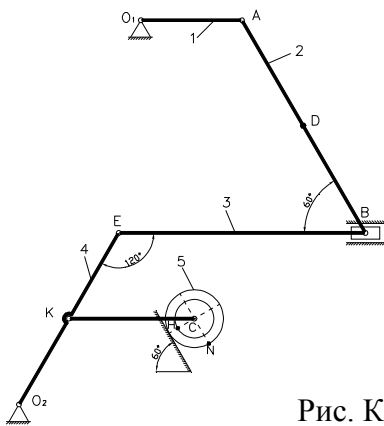


Рис. К.17

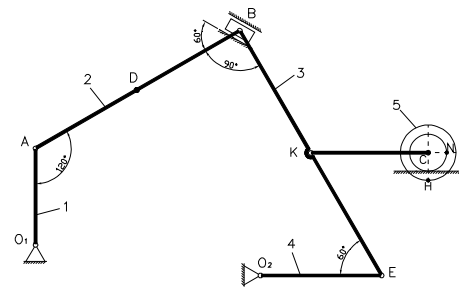


Рис. К.18

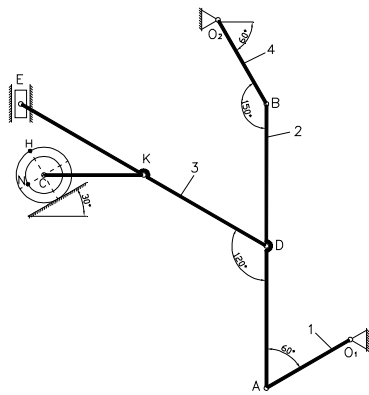


Рис. К.19

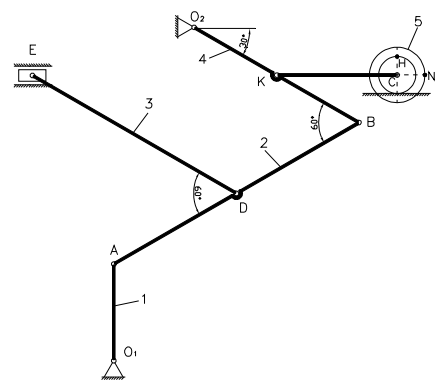


Рис. К.20

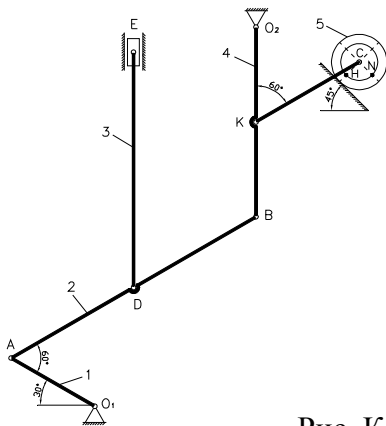


Рис. К.21

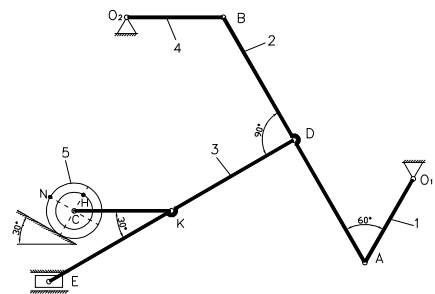


Рис. К.22

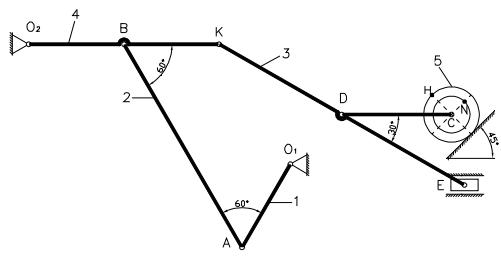


Рис. К.23

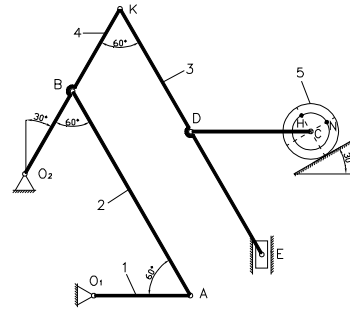


Рис. К.24

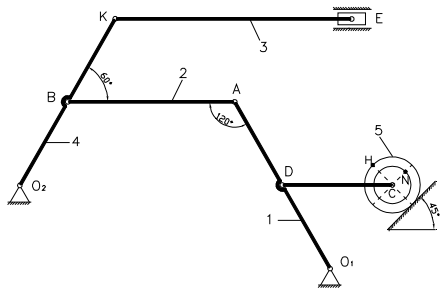


Рис. К.25

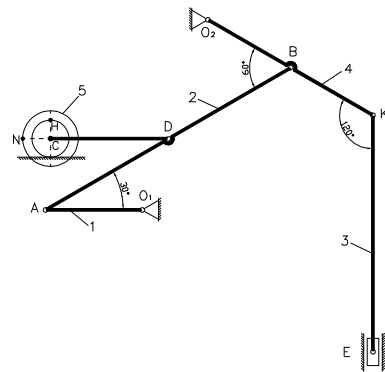


Рис. К.26

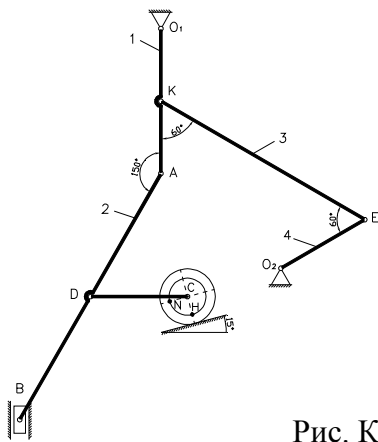


Рис. К.27

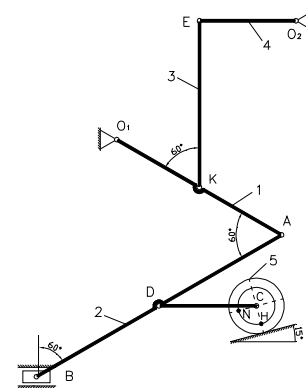


Рис. К.28

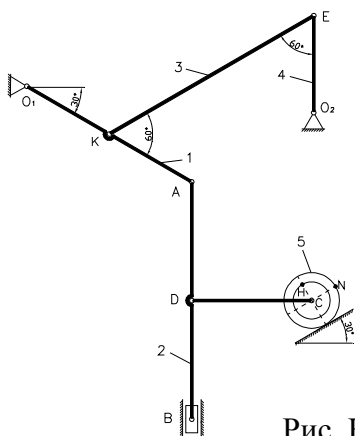


Рис. К.29

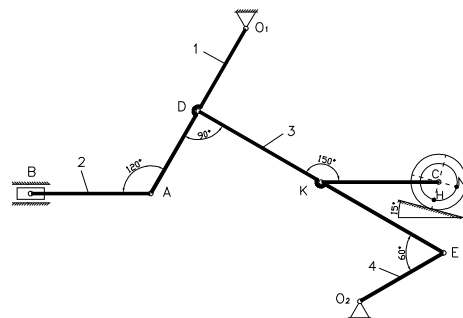


Рис. К.30



Так как звено 1 совершает вращательное движение вокруг точки  $O_1$ , то скорость точки  $A$  будет направлена перпендикулярно  $O_1A$ , в соответствии с направлением угловой скорости, а численное значение скорости точки  $A$ , равно:

$$v_A = \omega_1 \cdot l_1, \quad v_A = 8 \cdot 0,5 = 4 \text{ м/с}.$$

Скорость точки  $B$ , которая помимо звеньев 2 и 3 принадлежит ползуну совершающему поступательное движение, направлена параллельно направляющим ползуна.

Чтобы найти направление скорости точки  $D$  и численное значение скоростей  $\vec{v}_B, \vec{v}_D$  построим для звена 2 мгновенный центр скоростей (МЦС). Для этого проведем перпендикуляры к скоростям  $\vec{v}_A$  и  $\vec{v}_B$  на пересечении которых получим точку  $P_2$  – МЦС звена 2.

Теперь движение звена 2 в данный момент времени можно рассматривать как вращательное вокруг  $P_2$  с угловой скоростью  $\omega_2$ . Скорость точки  $D$  будет направлена перпендикулярно  $P_2D$  в соответствии с направлением вращения звена 2 вокруг  $P_2$ .

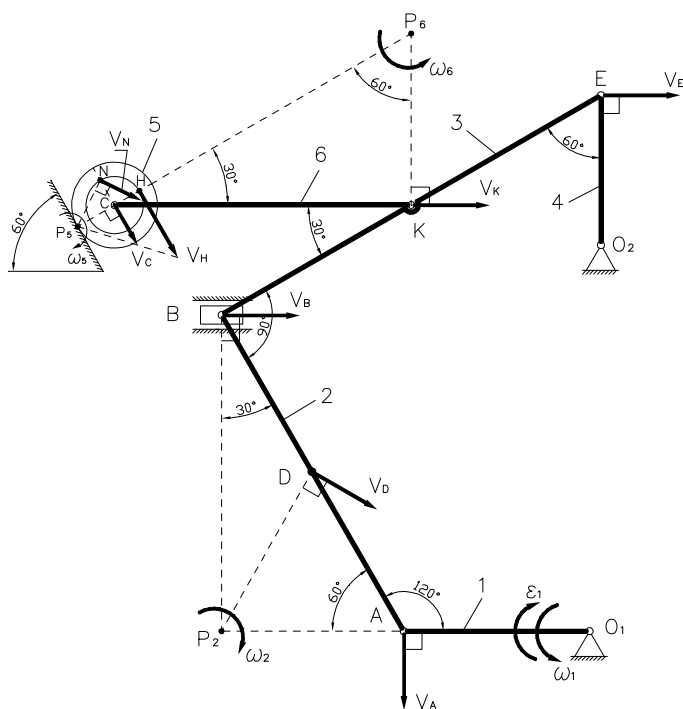


Рис.1.9

Для угловой скорости звена 2 можно записать:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP_2} = \frac{v_B}{BP_2} = \frac{v_D}{DP_2} \quad (1.8)$$

Определим расстояния  $AP_2$ ,  $BP_2$ ,  $DP_2$ . Из треугольника  $ABP_2$  найдем:

$$AP_2 = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} l_2, \quad AP_2 = 0,5 \text{ м как сторона лежащая против угла } 30^\circ,$$

$$BP_2 = AB \cdot \cos 30^\circ = l_2 \cdot \cos 30^\circ, \quad BP_2 = 0,866 \text{ м.}$$

Т.к. точка  $D$  лежит посередине  $AB$ , то  $AD = \frac{1}{2} AB = AP_2$ , и поскольку угол при вершине  $A$  равен  $60^\circ$ , значит треугольник  $ADP_2$  равносторонний, следовательно  $DP_2 = AD = AP_2 = 0,5 \text{ м}$ .

Теперь из формулы (1.8) найдем  $\omega_2$ ,  $v_B$ ,  $v_D$ :

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP_2}, \quad \omega_2 = 8 \text{ с}^{-1},$$

$$v_B = \omega_2 \cdot BP_2, \quad v_B = 6,9 \text{ м/с},$$

$$v_D = \omega_2 \cdot DP_2, \quad v_D = 4 \text{ м/с}.$$

Перейдем к рассмотрению звена 3.

Точка  $E$  принадлежит одновременно звеньям 3 и 4 и вместе с последним совершает вращательное движение вокруг точки  $O_2$ , значит её скорость направлена перпендикулярно  $EO_2$ .

Так как скорости  $\vec{v}_B$  и  $\vec{v}_E$  параллельны, то и перпендикуляры к ним также параллельны, следовательно, МЦС звена 3 лежит в бесконечности и движение будет мгновенно поступательным, значит, скорости всех точек звена 3, в данный момент времени, имеют одинаковое направление и численно равны, а угловая скорость равна нулю.

$$v_B = v_E = v_K = 6,9 \text{ м/с},$$

$$\omega_3 = 0.$$

Зная  $v_E$ , найдем угловую скорость звена 4:

$$\omega_4 = \frac{v_E}{EO_2} = \frac{v_E}{l_4}, \quad \omega_4 = 17,25 \text{ с}^{-1}.$$

Рассмотрим звено 6. Скорость точки  $C$  направлена параллельно поверхности, по которой движется колесо. На пересечении перпендикуляров к скоростям  $\vec{v}_K$  и  $\vec{v}_C$  получим точку  $P_6$  – МЦС звена 6.

Для угловой скорости звена 6, запишем:

$$\omega_6 = \frac{v_K}{KP_6} = \frac{v_C}{CP_6},$$

отсюда выразим  $v_C$ :

$$v_C = \frac{CP_6}{KP_6} \cdot v_K. \quad (1.9)$$

Из треугольника  $KCP_6$  найдем соотношение между сторонами  $CP_6$  и  $KP_6$ :

$KP_6 = \frac{1}{2}CP_6$  как катет лежащий против угла  $30^\circ$ , подставляя это в (1.9), найдем:

$$v_C = 2 \cdot v_K, \quad v_C = 13,8 \text{ м/с}.$$

МЦС звена 5 находится в точке соприкосновения колеса и поверхности – точка  $P_5$ . Скорость точки  $N$  будет направлена перпендикулярно  $NP_5$ , а скорость точки  $H$  – перпендикулярно  $HP_5$ , в соответствии с направлением вращения колеса. Для угловой скорости звена 5, запишем:

$$\omega_5 = \frac{v_C}{CP_5} = \frac{v_N}{NP_5} = \frac{v_H}{HP_5}. \quad (1.10)$$

Определим расстояния  $CP_5$ ,  $NP_5$ ,  $HP_5$ :

$$CP_5 = R_5, \quad CP_5 = 0,12 \text{ м},$$

$$NP_5 = \sqrt{R_5^2 + r_5^2}, \quad NP_5 = 0,144 \text{ м},$$

$$HP_5 = R_5 + r_5, \quad HP_5 = 0,2 \text{ м},$$

Подставляя эти значения в (1.10), найдем  $\omega_5$ ,  $v_N$ ,  $v_H$ :

$$\omega_5 = \frac{v_C}{CP_5}, \quad \omega_5 = 115 \text{ с}^{-1},$$

$$v_N = \omega_5 \cdot NP_5, \quad v_N = 16,56 \text{ м/с},$$

$$v_H = \omega_5 \cdot HP_5, \quad v_H = 23 \text{ м/с}.$$

Теперь перейдем к нахождению ускорения точки  $B$ .

Выбрав в качестве полюса точку  $A$ , ускорения точки  $B$  можно найти по формуле:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}, \quad (1.11)$$



здесь  $\vec{a}_A$  – ускорение полюса,  $\vec{a}_{BA}$  – ускорение, которое получает точка  $B$  при вращении вокруг полюса.

Разложив эти ускорения на тангенциальную и нормальную составляющие, формула (1.11) примет вид:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n. \quad (1.12)$$

Так как точка  $A$  вместе со звеном 1 совершает вращение вокруг  $O_1$ , то  $\vec{a}_A^n$  направлено от точки  $A$  к  $O_1$ ,  $\vec{a}_A^\tau$  – перпендикулярно  $AO_1$ , в соответствии с направлением углового ускорения звена 1 (рис. 1.10). Численные значения этих ускорений находятся по формулам:

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot AO_1 = \omega_1^2 \cdot l_1, \quad a_A^n = 32 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot AO_1 = \varepsilon_1 \cdot l_1, \quad a_A^\tau = 1 \text{ м/с}^2.$$

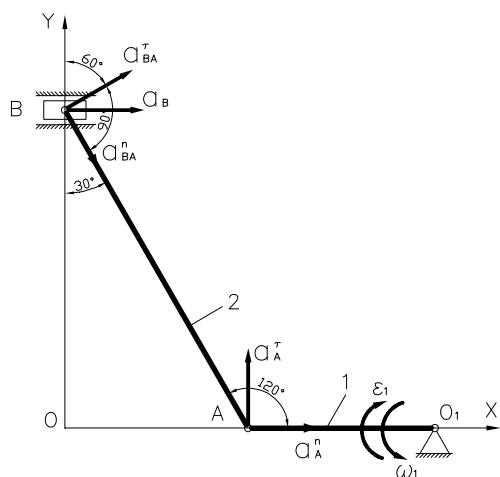


Рис.1.10

Ускорение  $\vec{a}_{BA}^n$  направлено от точки  $B$  к точке  $A$ ,  $\vec{a}_{BA}^\tau$  направлено перпендикулярно  $AB$  (направление этого ускорения заранее неизвестно, т.к. неизвестно направление  $\varepsilon_{AB}$ , поэтому направить его можно в любую сторону, неверно выбранное направление отразится лишь на знаке ускорения). Найдём численное значение  $\vec{a}_{BA}^n$ :

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot AB = \omega_2^2 \cdot l_2, \quad a_{BA}^n = 64 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение точки  $B$ , так как она принадлежит ползуну, будет направлено параллельно направляющим ползуна. Чтобы найти его, запишем уравнение (1.12) в проекциях на выбранные оси координат:

$$OX : a_B = a_A^n + a_{BA}^n \cdot \sin 30^\circ + a_{BA}^\tau \cdot \sin 60^\circ, \quad (1.13)$$

$$OY : 0 = a_A^\tau - a_{BA}^n \cdot \cos 30^\circ + a_{BA}^\tau \cdot \cos 60^\circ. \quad (1.14)$$

Из (1.14) найдём  $a_{BA}^\tau$ :

$$a_{BA}^\tau = \frac{a_{BA}^n \cdot \cos 30^\circ - a_A^\tau}{\cos 60^\circ}, \quad a_{BA}^\tau = 108,85 \text{ м/с}^2.$$

Подставляя полученное значение в (1.13), найдём:

$$a_B = 158,27 \text{ м/с}^2.$$

Зная  $a_{BA}^\tau$ , определим угловое ускорение звена  $AB$ :

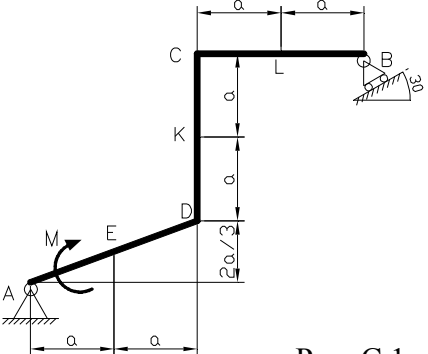
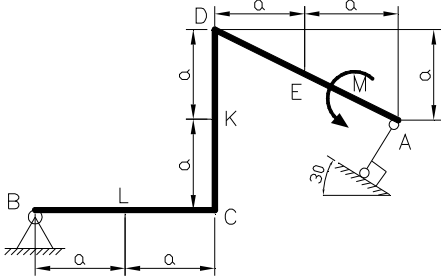
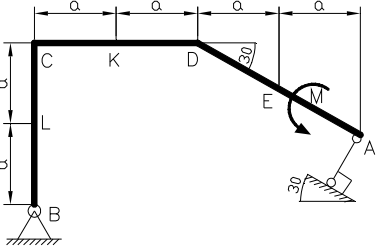
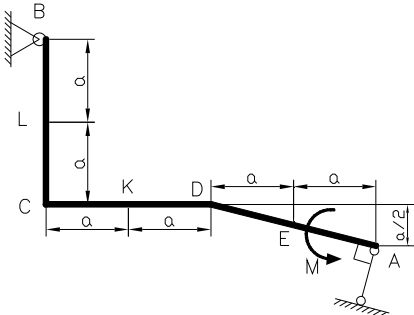
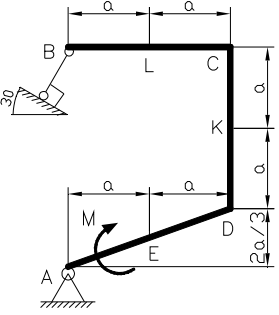
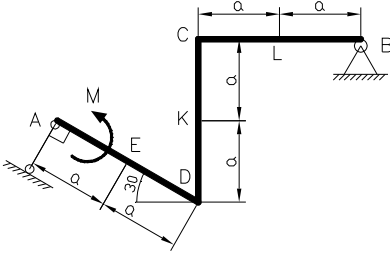
$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{l_2}, \quad \varepsilon_2 = 108,85 \text{ с}^{-2}.$$

Ответ:  $v_A = 4 \text{ м/с}$ ,  $v_B = 13,8 \text{ м/с}$ ,  $v_D = 4 \text{ м/с}$ ,  $v_E = 6,9 \text{ м/с}$ ,  
 $v_K = 6,9 \text{ м/с}$ ,  $v_C = 13,8 \text{ м/с}$ ,  $v_N = 16,56 \text{ м/с}$ ,  $v_H = 23 \text{ м/с}$ ,  
 $\omega_2 = 8 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_3 = 0 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_4 = 17,25 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_5 = 115 \text{ с}^{-1}$ ,  
 $a_B = 158,27 \text{ м/с}^2$ ,  $\varepsilon_2 = 108,85 \text{ с}^{-2}$ .

**РГР №2. Равновесие тела под действием плоской системы сил.**

К раме (рис. С.1-С.30) приложены две сосредоточенные силы, распределенная нагрузка и пара сил с моментом  $M = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Значение сил, их точки приложения и участок на котором действует распределенная нагрузка, указаны в таблице 2.1. Расстояние  $a = 1,5 \text{ м}$ . Считая, что система находится в равновесии определить реакции опор в трех случаях:

- п.1: В точках  $A$  и  $B$  наложены связи, как указано на рис.
- п.2: В точке  $B$  жесткая заделка.
- п.3: Рама состоит из двух частей шарнирно скрепленных в точке  $C$ , в точках  $A$  и  $B$  связи в виде неподвижных шарнирных опор.

 <p style="text-align: center;">Рис. С.1</p>	 <p style="text-align: center;">Рис. С.2</p>
 <p style="text-align: center;">Рис. С.3</p>	 <p style="text-align: center;">Рис. С.4</p>
 <p style="text-align: center;">Рис. С.5</p>	 <p style="text-align: center;">Рис. С.6</p>

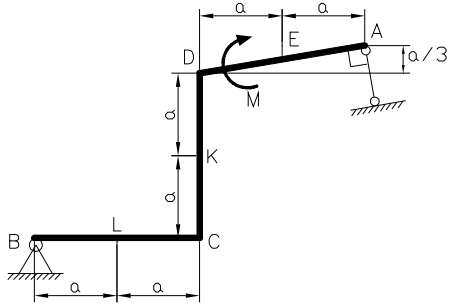


Рис. С.7

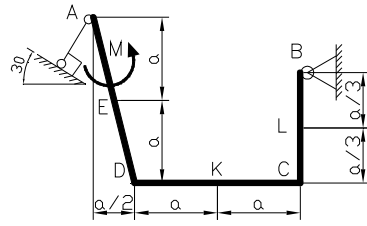


Рис. С.8

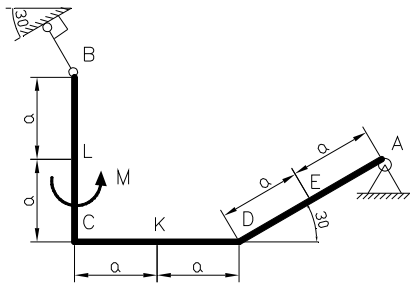


Рис. С.9

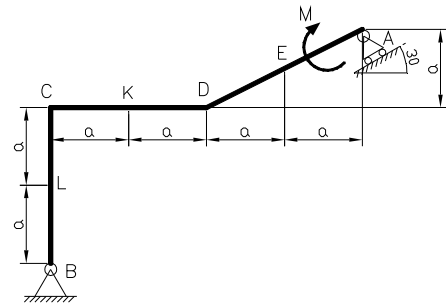


Рис. С.10

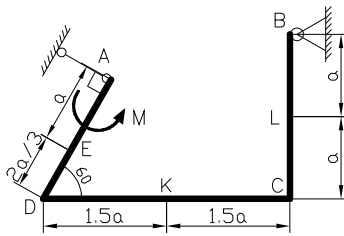


Рис. С.11

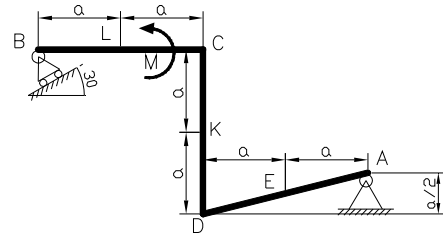


Рис. С.12

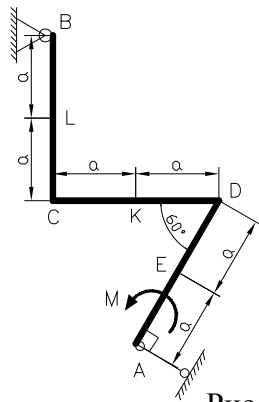


Рис. С.13

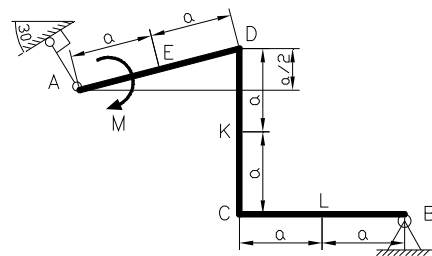


Рис. С.14

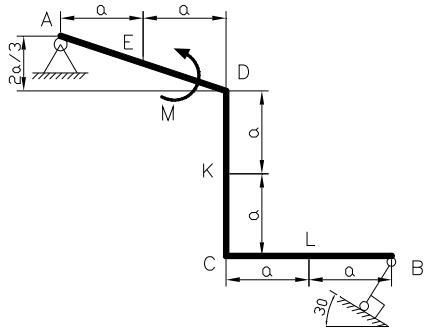


Рис. С.15

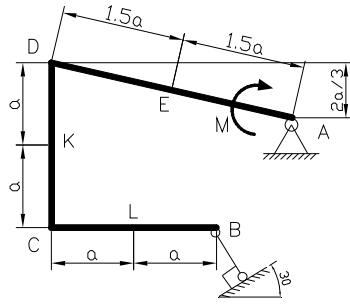


Рис. С.16

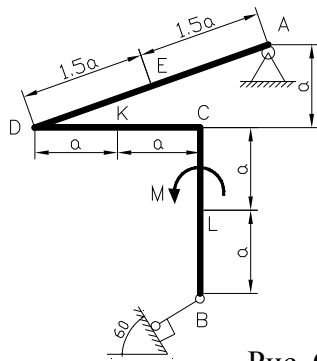


Рис. С.17

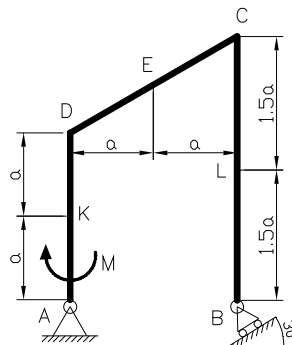


Рис. С.18

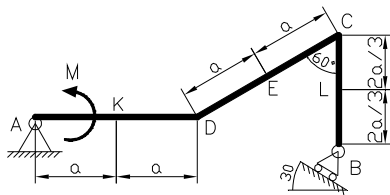


Рис. С.19

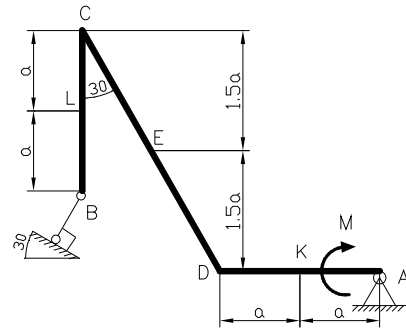


Рис. С.20

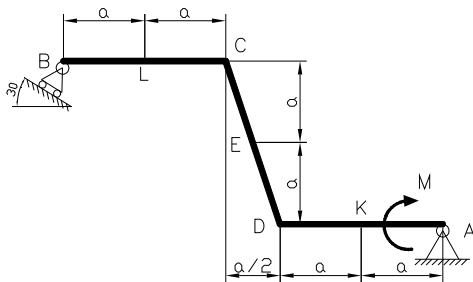


Рис. С.21

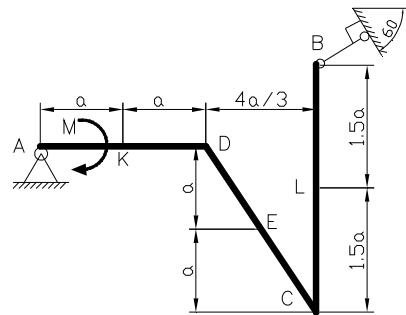


Рис. С.22

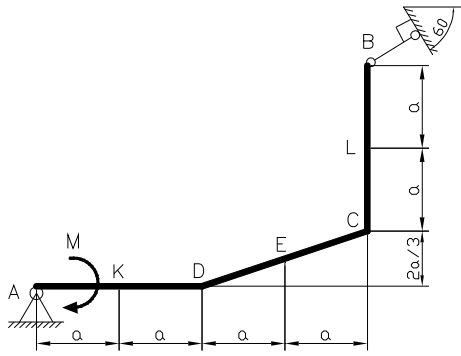


Рис. С.23

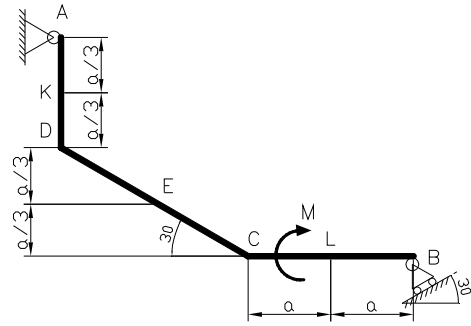


Рис. С.24

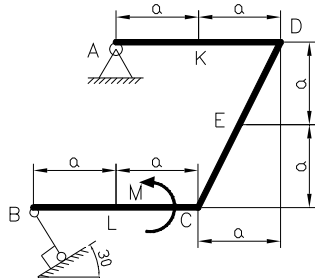


Рис. С.25

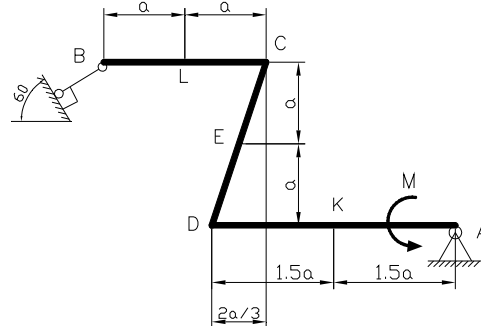


Рис. С.26

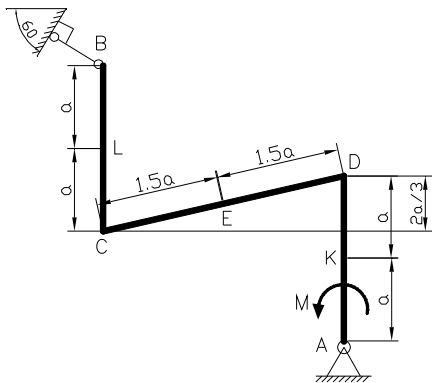


Рис. С.27

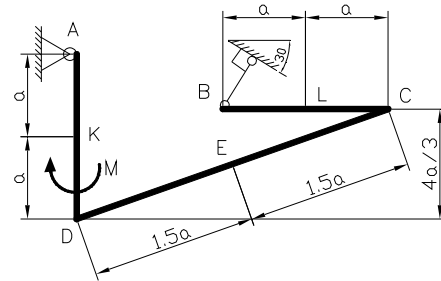


Рис. С.28

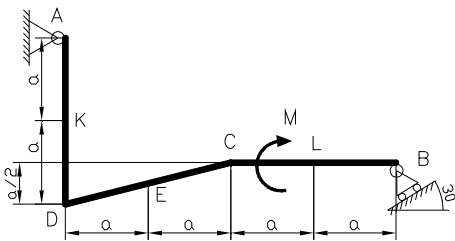


Рис. С.29

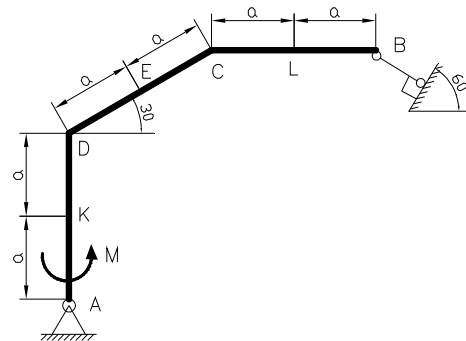


Рис. С.30

Таблица 2.1.

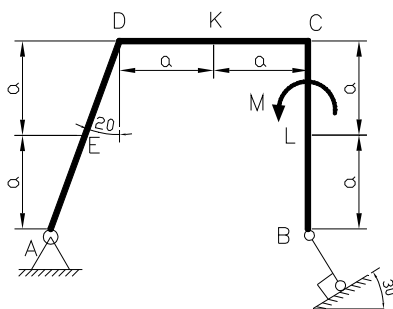
№ п/п	Распределенная нагрузка $q$ , кН/м				Сила $F_1$ , кН			Сила $F_2$ , кН		
	вид	значение	участок		значение	Точка прило- жения	угол	значение	Точка прило- жения	угол
			схемы 1-17	схемы 18-30						
1.		8	AD	DC	-15	К	60	20	L	30
2.		12	DC	AD	15	Е	0	20	L	-30
3.		12	CB	CB	15	Е	0	-20	К	60
4.		12	AD	DC	20	К	-30	18	L	45
5.		10	DC	AD	20	Е	0	-18	L	-60
6.		10	CB	CB	20	Е	0	18	К	45
7.		14	AD	DC	17	К	45	-23	L	30
8.		14	DC	AD	-17	Е	0	23	L	45
9.		14	CB	CB	-17	Е	0	23	К	-30
10.		8	ED	EC	-17	К	30	-23	L	-60

**Примечания:** 1. Если значение силы указано с положительным знаком, то ее следует прикладывать сверху вниз или слева направо, в зависимости от положения участка, и снизу вверх или справа налево, если значение силы дано с отрицательным знаком.

2. Угол следует отсчитывать от нормали к поверхности в данной точке, причем по ходу часовой стрелки, если значение угла дано с отрицательным знаком и против хода часовой стрелки, если значение угла дано с положительным знаком.

### Пример решения задачи.

Исходные данные:



$q$ , кН/м			Сила $F_1$ , кН			Сила $F_2$ , кН		
вид	значение	участок	значение	точка приложения	угол	значение	точка приложения	угол
	12	DC	-15	Е	0	20	L	30

$$M = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad a = 1,5 \text{ м}.$$

Считая, что система находится в равновесии определить реакции опор в трех случаях:

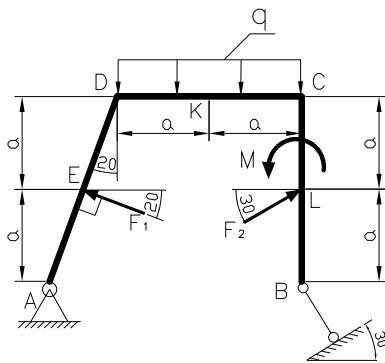
п.1: В точках  $A$  и  $B$  наложены связи, как указано на рис.

п.2: В точке  $B$  жесткая заделка.

п.3: Рама состоит из двух частей шарнирно скрепленных в точке  $C$ , в точках  $A$  и  $B$  связи в виде неподвижных шарнирных опор.

Решение:

п.1. Обозначим силы и распределенную нагрузку согласно данным:



Введем прямоугольную систему координат с осями  $X, Y$ .

Заменим связи их реакциями. В точке  $A$  наложена связь в виде неподвижного шарнира, направление реакция которого заранее неизвестно, поэтому раскладываем её на две взаимно перпендикулярные составляющие  $X_A, Y_A$ . В точке  $B$  – невесомый стержень, реакция  $R_B$  которого направлена вдоль оси стержня.

Для удобства разложим силы  $F_1, F_2$  вдоль осей  $X, Y$ .

$$F_{1x} = F_1 \cos 20^\circ, \quad F_{1y} = F_1 \sin 20^\circ,$$

$$F_{2x} = F_2 \cos 30^\circ, \quad F_{2y} = F_2 \sin 30^\circ.$$

Подставляя значения, найдем:

$$F_{1x} = 14,095 \text{ кН}, \quad F_{1y} = 5,13 \text{ кН}, \quad F_{2x} = 17,321 \text{ кН}, \quad F_{2y} = 10 \text{ кН}.$$

Заменим распределенную нагрузку сосредоточенной силой  $Q$ , которая будет приложена посередине участка  $DC$  и численно равна:

$$Q = q \cdot 2a, \quad Q = 36 \text{ кН}.$$

Получившаяся схема изображена на рис. 2.12.



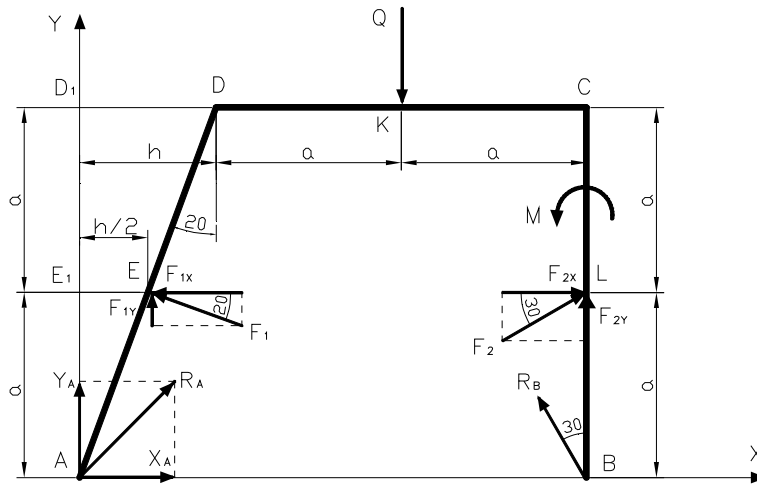


Рис. 2.12

Рассмотрим треугольники  $AEE_1$  и  $ADD_1$ , эти треугольники подобны по трем углам, следовательно:

$$\frac{AE_1}{AD_1} = \frac{EE_1}{DD_1} = \frac{1}{2}.$$

Обозначим  $DD_1 = h$ , значит  $EE_1 = h/2$ .

Найдем расстояние  $h$  из треугольника  $ADD_1$ :

$$h = 2a \cdot \operatorname{tg} 20^\circ, \quad h = 1,092 \text{ м.}$$

Составим теперь уравнения равновесия, которые для плоской системы сил имеют вид:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0.$$

В данном случае они запишутся:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = X_A - F_{1x} + F_{2x} - R_B \cdot \sin 30^\circ = 0, \\ \sum F_{ky} = Y_A + F_{1y} - Q + F_{2y} + R_B \cdot \cos 30^\circ = 0, \\ \sum M_A(\vec{F}_k) = F_{1y} \cdot h/2 + F_{2x} \cdot a - Q \cdot (a+h) + M - F_{2x} \cdot a + \\ \quad + F_{2y} \cdot (2a+h) + R_B \cdot (2a+h) \cdot \cos 30^\circ = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Получили систему трех уравнений с тремя неизвестными  $X_A, Y_A, R_B$ .

Из последнего уравнения системы выразим  $R_B$ :

$$R_B = \frac{-F_{1y} \cdot h/2 - F_{2x} \cdot a + Q \cdot (a+h) - M + F_{2x} \cdot a - F_{2y} \cdot (2a+h)}{(2a+h) \cdot \cos 30^\circ},$$

производя расчеты, найдем:

$$R_B = 4,07 \text{ кН.}$$

Из первого уравнения системы (2.11) найдем  $X_A$ :

$$X_A = F_{1x} - F_{2x} + R_B \cdot \sin 30^\circ, \quad X_A = -1,19 \text{ кН.}$$

Знак минус говорит о том, что направлен  $X_A$  в сторону противоположную, указанной на рисунке.

Из второго уравнения (2.11) находим:

$$Y_A = -F_{1y} + Q - F_{2y} - R_B \cdot \cos 30^\circ, \quad Y_A = 17,34 \text{ кН.}$$

Вспоминая, что  $X_A, Y_A$  составляющие реакции  $R_A$ , найдем:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}, \quad R_A = 17,38 \text{ кН.}$$

Итак, реакции равны:  $R_A = 17,38 \text{ кН}, R_B = 4,07 \text{ кН}.$

Сделаем проверку. Для этого составим уравнение равновесия моментов относительно точки, через которую не проходят линии действия искомых сил, в качестве этой точки выберем точку  $E$ .

$$\begin{aligned} \sum M_E(\vec{F}_k) = & -Y_A \cdot h / 2 + X_A \cdot a - Q \cdot (a + h / 2) + M + F_{2y} \cdot (2a + h / 2) + \\ & + R_B \cdot (2a + h / 2) \cdot \cos 30^\circ - R_B \cdot a \cdot \sin 30^\circ = 0. \end{aligned}$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$-0,00056 \approx 0.$$

Небольшая неточность связана с округлениями при расчетах. Можно считать, что проверка сошлась и реакции найдены верно.

**п.2.** Прейдем к второму пункту задачи. Теперь опора одна, в виде жесткой заделки в точке  $B$ . Исходная система имеет вид:

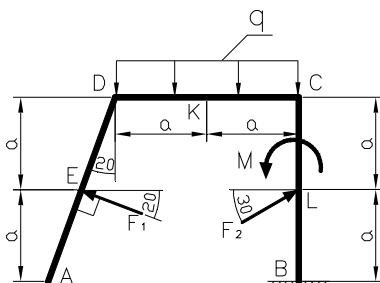


Схема нагружения осталась прежней, значит найденные нами в п.1  $F_{1x}, F_{1y}, F_{2x}, F_{2y}, Q$  и  $h$  будут такие же. Введем систему координат. В жесткой заделке возникает сила реакции заранее неизвестного направления  $R_B$ , которую раскладываем на две взаимно

перпендикулярные составляющие  $X_B, Y_B$ , и пара сил с моментом  $M_B$ , в итоге получим следующую систему сил (рис. 2.13).

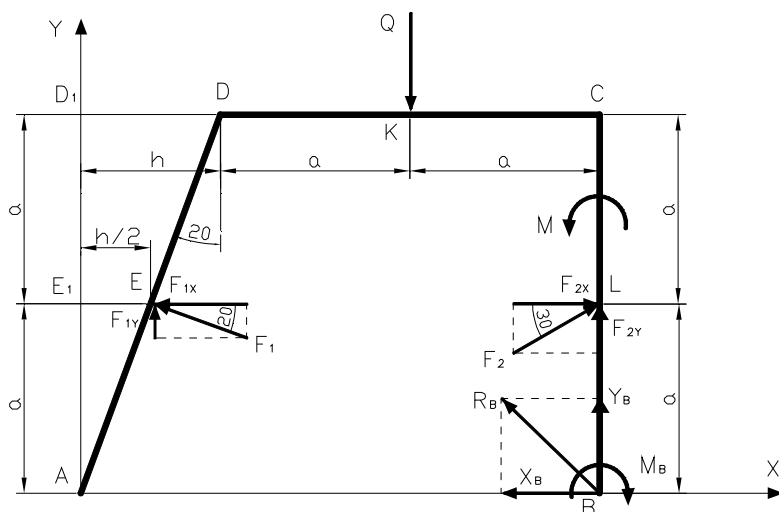


Рис. 2.13

Составим уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = -F_{1x} + F_{2x} - X_B = 0, \\ \sum F_{ky} = F_{1y} - Q + F_{2y} + Y_B = 0, \\ \sum M_B(\vec{F}_k) = -M_B - F_{2x} \cdot a + M + Q \cdot a + F_{1x} \cdot a - F_{1y} \cdot (2a + h/2) = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Получили систему трех уравнений с тремя неизвестными  $X_B, Y_B, M_B$ , причем в каждое уравнение входит только одно неизвестное, поэтому последовательно выражаем  $X_B, Y_B, M_B$ :

$$\begin{cases} X_B = -F_{1x} + F_{2x}, \\ Y_B = -F_{1y} + Q - F_{2y}, \\ M_B = -F_{2x} \cdot a + M + Q \cdot a + F_{1x} \cdot a - F_{1y} \cdot (2a + h/2) = 0. \end{cases}$$

и подставляя числовые значения, находим:

$$X_B = 3,22 \text{ кН}, \quad Y_B = 20,87 \text{ кН}, \quad M_B = 70,97 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Учитывая, что  $X_B, Y_B$  составляющие  $R_B$ , найдем:

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}, \quad R_B = 21,12 \text{ кН}.$$

Итак, искомые реакции:

$$R_B = 21,12 \text{ кН}, \quad M_B = 70,97 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Произведем проверку, для этого составим уравнения равновесия моментов относительно точки  $E$ :

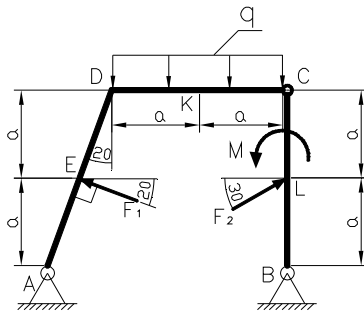
$$\sum M_E(\vec{F}_k) = -Q \cdot (a + h/2) + M + F_{2y} \cdot (2a + h/2) - M_B + Y_B \cdot (2a + h/2) - X_B \cdot a = 0.$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$0,0092 \approx 0.$$

Можно считать, что проверка сошлась и реакции определены верно.

**п.3.** Рама состоит из двух частей шарнирно скрепленных в точке  $C$ , в точках  $A$  и  $B$  связи в виде неподвижных шарнирных опор. Значения  $F_{1x}$ ,  $F_{1y}$ ,  $F_{2x}$ ,  $F_{2y}$ ,  $Q$  и  $h$  будут такие же, как в пункте 1. Исходная схема в этом случае будет выглядеть следующим образом:



Заменим опоры в точках  $A$  и  $B$  их реакциями  $R_A$  и  $R_B$  которые раскладываем на составляющие  $X_A, Y_A$  и  $X_B, Y_B$ . Если рассматривать равновесие всей системы целиком то для определения четырех неизвестных реакций трех уравнений равновесия для плоской системы сил будет недостаточно.

Для решения задачи мысленно разделим конструкцию по шарниру, через который передается усилие неизвестного направления. Разложим это усилие на составляющие  $X_C, Y_C$ , которые согласно третьему закону Ньютона будут действовать и на левую и на правую часть, причем будут равны по модулю и противоположны по направлению. С учетом этого, наша схема примет вид (рис. 2.14).

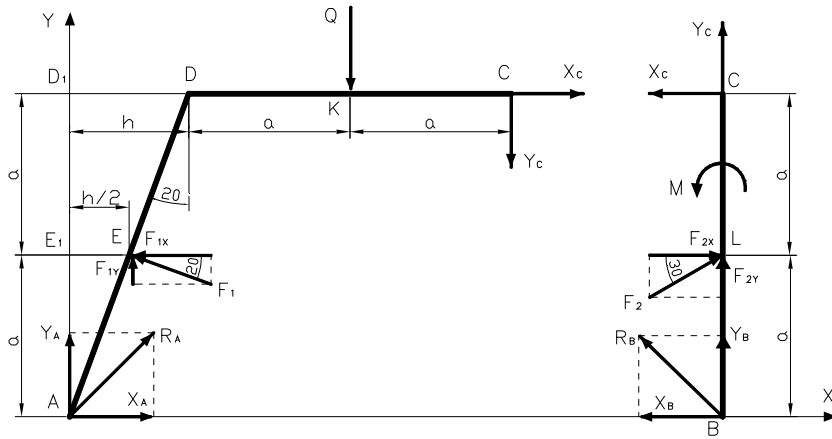


Рис. 2.14

Составим, теперь уравнения равновесия для каждой части.

Для левой части:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = X_A - F_{1x} + X_C = 0, \\ \sum F_{ky} = Y_A + F_{1y} - Q - Y_C = 0, \\ \sum M_A(\vec{F}_k) = F_{1y} \cdot h/2 + F_{1x} \cdot a - Q \cdot (a+h) - X_C \cdot 2a - Y_C \cdot (2a+h) = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Для правой части:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = -X_B + F_{2x} - X_C = 0, \\ \sum F_{ky} = Y_B + F_{2y} + Y_C = 0, \\ \sum M_B(\vec{F}_k) = -F_{2x} \cdot a + M + X_C \cdot 2a = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Получили систему шести уравнений с шестью неизвестными  $X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C$ . Из последнего уравнения (2.14) находим  $X_C$ :

$$X_C = \frac{F_{2x} \cdot a - M}{2a}, \quad X_C = -4.67 \text{ кН.}$$

Подставив найденное значение в третье уравнение (2.13) найдем  $Y_C$ :

$$Y_C = \frac{F_{1y} \cdot h/2 + F_{1x} \cdot a - Q \cdot (a+h) - X_C \cdot 2a}{(2a+h)}, \quad Y_C = -13.52 \text{ кН.}$$

Знак минус у  $X_C, Y_C$  означает, что они направлены в сторону, противоположную указанной на рисунке.

Теперь подставив  $X_C, Y_C$  в первые два уравнения (2.13) и первые два уравнения (2.14) найдем  $X_A, Y_A, X_B, Y_B$ :

$$\begin{aligned} X_A &= F_{1x} - X_C, \quad X_A = 18.77 \text{ кН,} \\ Y_A &= -F_{1y} + Q + Y_C, \quad Y_A = 17,34 \text{ кН,} \end{aligned}$$

$$X_B = F_{2x} - X_C, \quad X_B = 21,99 \text{ кН},$$

$$Y_B = -F_{2y} - Y_C, \quad Y_B = 3,52 \text{ кН}.$$

Найдем  $R_A, R_B$ :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}, \quad R_A = 25,55 \text{ кН},$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}, \quad R_B = 22,27 \text{ кН}.$$

Искомые реакции:  $R_A = 25,55 \text{ кН}, \quad R_B = 22,27 \text{ кН}.$

Для проверки составим уравнение равновесия моментов для всей конструкции относительно точки  $E$ :

$$\begin{aligned} \sum M_E(\vec{F}_k) = & -Y_A \cdot h/2 + X_A \cdot a - Q \cdot (a + h/2) + M + F_{2y} \cdot (2a + h/2) + \\ & + Y_B \cdot (2a + h/2) - X_B \cdot a = 0. \end{aligned}$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$-0,001 \approx 0.$$

Следовательно, реакции найдены правильно.

Ответ: п.1:  $R_A = 17,38 \text{ кН}, \quad R_B = 4,07 \text{ кН},$

п.2:  $R_B = 21,12 \text{ кН}, \quad M_B = 70,97 \text{ кН} \cdot \text{м},$

п.3:  $R_A = 25,55 \text{ кН}, \quad R_B = 22,27 \text{ кН}.$