1. След матрицы
Даны два вектора с конечной нормой: |φ> и |ψ>

1.1. Покажите, что

Sp |ψ> <φ| = <ψ, φ>.

1.2. Для частицы на реальной оси, оператор импульса и оператор координаты удовлетворяют коммутативному правилу

$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar E$, где E — единичная матрица.

След от левой части равен нулю из-за инварианта следа после цикличной смены аргументов $Sp[\hat{x}, \hat{p}] = 0$, тем не менее $i\hbar\, Sp\, E \neq 0$. Что из этого следует?

1.3. Выразите в конечно мерном Гильбертовом пространстве Sp({ $\hat{A}$ ✝ } $\hat{A}$) через элементы матрицы a_{mn} = < m | $\hat{A}$ | n > от $\hat{A}$ относительно ортогонального базиса | n >. Здесь A✝ — эрмитова матрица.

1.4. Существует ли $||A||^2$ = Sp(A✝ A) норма у матриц?

2. Восстановление матрицы плотности

Относительно базиса двухмерного Гильбертово пространства даны три наблюдаемые в форме следующих матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

В предыдущем состоянии были измерены ожидаемые значения <A> = 4, <B> = 3/2, <C> = 2. Определите матрицу плотности этого состояния. Она чистая или смешанная?

Подсказка: будет проще считать, если представить данные матрицы в качестве линейной комбинации из единичной матрицы и матриц Паули и использовать $Sp(\sigma_i\, \sigma_j) = 2\delta_{ij}$

3. Системы с двумя состояниями

Дана система с двумя состояниями с оператором Гамильтона, не зависящим от времени $\hat{H}_0$. В собственном базисе матрица энергии — диагональна $H_0 = \mathrm{diag}(E_1, E_2)$. Теперь на систему воздействует гармонично колеблющееся возмущение, так что $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$. Соответственно в собственном базисе $\hat{H}_0$:

$$H(t) = H_0 + V(t), \qquad V(t) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \rho \cdot \exp(-i\omega t) \\ \rho \cdot \exp(i\omega t) & 0 \end{pmatrix}$$

3.1. Рассчитайте оператор для разложения по времени U(t, 0).
3.2. Какова вероятность того, что стационарное состояние $\hat{H}_0$ перейдёт в возбужденное состояние $\hat{H}_0$?
3.3. Пускай теперь $E_1 = E_2$. Разложите U(t, 0) в степени параметра ρ , который определяет силу возмущений V(t).

Подсказка: после временной трансформации коэффициентов c_1 и c_2, можно избавится от временной зависимости H(t).