В. Ф. ЧУДЕСЕНКО

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ КУРСАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

(Типовые расчеты)

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших
технических учебных заведений

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1983

ББК 22.11
Ч84
УДК 51

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук Б. Ю. Стернин и кафедра общей математики факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова (зав. кафедрой проф. В. А. Ильин)

Чудесенко В. Ф.
Ч84 Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты): Учеб. пособие для втузов. — М.: Высш. школа, 1983. — 112 с.
25 к.

Пособие написано в соответствии с действующей программой по курсу высшей математики. Оно содержит типовые расчеты по теории функций комплексного переменного, операционному исчислению, уравнениям математической физики, теории вероятностей и математической статистике. Задачи представлены 31 вариантом. Типовые расчеты содержат также теоретические вопросы, упражнения и справочный материал.

$Ч\frac{1702000000-160}{001(01)-83}$ 57—83

ББК 22.11
514

Валерий Федорович Чудесенко

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ КУРСАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

(типовые расчеты)

Зав. редакцией *Е. С. Гридасова*
Редактор *А. И. Селиверстова*
Младшие редакторы *С. А. Доровских, Н. П. Майкова*
Художественный редактор *В. И. Пономаренко*
Технический редактор *Ю. А. Хорева*
Корректор *Р. К. Косинова*

ИБ № 3933

Изд. № ФМ-734. Сдано в набор 01.11.82. Подп. в печать 22.02.83. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бум. кн.-журн. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 7 усл. печ. л. 7,25 усл. кр.-отт. 7,03 уч.-изд. л. Тираж 60 000 экз. Зак. № 652. Цена 25 коп.
Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский просп., 15.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Активная самостоятельная работа студентов — залог успешного овладения изучаемым курсом. Одной из форм активизации учебного процесса по математике служит система типовых расчетов (ТР). Применение системы ТР рекомендовано действующей программой по высшей математике для инженерно-технических специальностей вузов, утвержденной Минвузом СССР в 1979 г.

Основой системы ТР является индивидуализация заданий. Задачи — расчетные задания, входящие в настоящий сборник, представлены каждая 31 вариантом, что позволяет предложить каждому студенту учебной группы индивидуальное задание. Помимо задач типовые расчеты содержат теоретические вопросы и теоретические упражнения, общие для всех студентов. Расчетные задания сопровождаются ссылками на справочный материал, в котором содержатся необходимые теоретические сведения и примеры решения некоторых задач.

Система ТР не исключает традиционных текущих заданий. Поскольку не все разделы спецкурсов отражены в книге в равной мере, важно, чтобы ТР и текущие домашние задания дополняли друг друга.

Расчетные задания выполняются частями по мере продвижения в изучении курса. Теоретические вопросы прорабатываются по лекционному материалу и обсуждаются на аудиторных занятиях. Теоретические упражнения и задачи решаются студентами самостоятельно и сдаются на проверку в указанные преподавателем сроки. Решение каждой задачи приводится на отдельном листе стандартного формата. Неверно решенные примеры возвращаются на доработку с указанием характера ошибки. В специальном журнале преподаватель фиксирует сданные на проверку, а также зачтенные задачи и упражнения.

Защита ТР осуществляется в письменной форме по специальным билетам в часы занятий. Во время защиты проверяется умение студента правильно отвечать на теоретические вопросы, пояснять решение теоретических упражнений и задач, решать задачи аналогичного типа. Как правило, защита занимает один учебный час. Срок защиты устанавливается учебным графиком. Повторная защита проводится вне сетки расписания в письменной форме или путем собеседования (по усмотрению преподавателя). Промежуток времени до повторной защиты не должен превышать одной недели.

Каждый из предлагаемых в настоящей книге ТР обеспечивает семестровый спецкурс. В том случае, когда соответствующий раздел излагается в меньшем объеме, ТР подлежит сокращению.

Предлагаемые ТР составлены на кафедре высшей математики Московского энергетического института (заведующий кафедрой проф. С. И. Похожаев). Существенный вклад в их разработку принадлежит В. Н. Агееву, И. Ф. Бывшевой, А. П. Васину, В. В. Жаринову, А. И. Кириллову, Ю. Н. Киселеву, Л. А. Кузнецову, Н. К. Нарышкиной, В. П. Пикулину, Р. Ф. Салихджанову, А. Г. Черных. Материалы раздела III подготовил И. М. Петрушко.

Автор благодарен коллегам за предоставленные материалы, рецензентам за полезные замечания, С. И. Похожаеву за внимание к работе над сборником и содействие в его подготовке.

Книга представляет собой первую попытку обеспечить учебным пособием систему типовых расчетов по специальным курсам высшей математики. Все замечания и советы будут приняты с благодарностью.

Автор

I. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1.1. Извлечение корня. *Корень n-й степени из комплексного числа z* имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ \varphi=\arg z,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

1.2. Элементарные функции комплексного переменного. Значения *показательной функции* комплексного переменного $z=x+iy$ вычисляются по формуле

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y). \tag{1}$$

Показательная функция e^z обладает следующими свойствами:

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2},$$

где z_1 и z_2 — любые комплексные числа;

$$e^{z+2\pi ki}=e^z,\ k=0,\ \pm1,\ \ldots,\ \text{т. е. } e^z$$

является периодической функцией с основным периодом $2\pi i$.

Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ выражаются через показательную:

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$$

Функции $w=\sin z$ и $w=\cos z$ — периодические с действительным периодом 2π и имеют только действительные нули $z=k\pi$ и $z=\pi/2+k\pi$ ($k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$) соответственно.

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются равенствами

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Для тригонометрических функций комплексного переменного остаются в силе все известные формулы тригонометрии.

Гиперболические функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ определяются равенствами

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\quad \operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\quad \operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\quad \operatorname{cth}=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Имеют место тождества $\operatorname{sh} z=-i\sin iz$, $\operatorname{ch} z=\cos iz$.

Логарифмическая функция $\operatorname{Ln} z$, где $z\neq0$, определяется как функция, обратная показательной, причем

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Значение функции, которое получается при $k=0$, называется *главным значением* и обозначается

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z,$$

Логарифмическая функция обладает следующими свойствами:

$$\operatorname{Ln}(z_1z_2)=\operatorname{Ln}z_1+\operatorname{Ln}z_2,\quad \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Ln}z_1-\operatorname{Ln}z_2,$$

$$\operatorname{Ln}z^n=n\operatorname{Ln}z+2\pi ki,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \operatorname{Ln}\sqrt[n]{z}=\frac{1}{n}\operatorname{Ln}z.$$

Функции $\operatorname{Arcsin}z$, $\operatorname{Arccos}z$, $\operatorname{Arctg}z$, $\operatorname{Arcctg}z$ определяются как *обратные* к функциям $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg}z$, $\operatorname{ctg}z$ соответственно. Так, если $z=\cos w$, то w называется арккосинусом числа z и обозначается $w=\operatorname{Arccos}z$. Все эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмическую:

$$\operatorname{Arcsin}z=-i\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right),\quad \operatorname{Arccos}z=-i\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\operatorname{Arctg}z=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz},\quad \operatorname{Arcctg}z=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}.$$

Значения, соответствующие главному значению логарифма, обозначаются теми же символами со строчной буквы ($\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg}z$, $\operatorname{arcctg}z$); они называются *главными значениями*.

Общая степенная функция $w=z^\alpha$, где α — любое комплексное число, определяется соотношением

$$z^\alpha=e^{\alpha\operatorname{Ln}z},\quad z\neq0.$$

Эта функция многозначная; значение $z^\alpha=e^{\alpha\ln z}$ называется *главным значением*.

Общая показательная функция $w=\alpha^z$, $\alpha\neq0$ определяется равенством

$$\alpha^z=e^{z\operatorname{Ln}\alpha}.$$

Главное значение этой функции $\alpha^z=e^{z\ln\alpha}$.

1.3. Кривые на комплексной плоскости. Уравнение вида $z=z(t)=x(t)+iy(t)$ определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид

$$x=x(t),\quad y=y(t).$$

Исключением параметра t из этих уравнений получаем уравнение кривой в виде $F(x,\ y)=0$.

1.4. Дифференцирование функций комплексного переменного, условия Коши — Римана. Пусть функция $w=f(z)$ определена в некоторой области G комплексного переменного z. Пусть точки z и $z+\Delta z$ принадлежат области G. Введем обозначения $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$, $\Delta z=\Delta x+i\,\Delta y$.

Функция $w=f(z)$, называется дифференцируемой в точке $z\in G$, если отношение $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ имеет конечный предел при $\Delta z\to0$. Этот предел называется производной функции $w=f(z)$ и обозначается $f'(z)$ $\left(\text{или } \dfrac{dw}{dz}\right)$, $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$.

Пусть $z=x+iy$, $w=f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$, тогда в каждой точке дифференцируемости функции $f(z)$ выполняются соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},\tag{2}$$

называемые *условиями Коши — Римана*.

Обратно, если в некоторой точке $(x,\ y)$ выполняются условия Коши — Римана и, кроме того, функции $u=u(x,\ y)$ и $v=v(x,y)$ дифференцируемы как функции двух действительных переменных, то функция $f(z)=u+iv$ является дифференцируемой в точке $z=x+iy$ как функция комплексного переменного z.

Функция $w=f(z)$ называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w=f(z)$ называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z\in G$.

Производная аналитической функции вычисляется по формулам

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Пользуясь условиями Коши—Римана, можно восстановить аналитическую функцию $w=f(z)$, если известна ее действительная часть $u=u(x, y)$ или мнимая часть $v=v(x, y)$ и, кроме того, задано значение $f(z_0)$ функции в некоторой точке z_0.

Пусть, например, $u=e^x\cos y$, $f(0)=1$. Определить аналитическую функцию $f(z)$.

В силу условий (2) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y, \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=e^x\sin y. \tag{4}$$

Интегрируя уравнение (4) по переменной x, находим мнимую часть

$$v=e^x\sin y+C(y). \tag{5}$$

Слагаемое $C(y)$ представляет собой постоянную (относительно x) интегрирования. Дифференцируя (5) по y и сопоставляя результат с (3), получаем $C'(y)=0$, откуда $C(y)=C$. Таким образом, имеем

$$v=e^x\sin y+C \text{ и } f(z)=u+iv=e^x(\cos y+i\sin y)+C;$$

с учетом формулы (1)— $f(z)=e^z+C$. Учтем дополнительное условие $f(0)=1$, откуда $C=0$; итак, $f(z)=e^z$.

1.5. Интегрирование функций комплексного переменного. Пусть однозначная функция $w=f(z)$ определена и непрерывна в области G, а Γ — кусочно-гладкая кривая, лежащая в G; $z=x+iy$, $f(z)=u+iv$, где $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ — действительные функции переменных x и y. Вычисление интеграла от функции $w=f(z)$ комплексного переменного z сводится к вычислению криволинейных интегралов по координатам:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz=\int\limits_{\Gamma} u\,dx-v\,dy+i\int\limits_{\Gamma} v\,dx+u\,dy.$$

Если кривая Γ задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, а начальная и конечная точки дуги соответствуют значениям $t=\alpha$ и $t=\beta$, то

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]\,z'(t)\,dt, \text{ где } z(t)=x(t)+iy(t).$$

Если $w=f(z)$ — аналитическая функция в односвязной области G, то интеграл не зависит от пути интегрирования (зависит только от начальной и конечной точек). В этом случае для вычисления интеграла применяется *формула Ньютона — Лейбница*

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz=\Phi(z_2)-\Phi(z_1),$$

где $\Phi(z)$ — какая-либо первообразная для функции $f(z)$, т. е. $\Phi'(z)=f(z)$ в области G.

Если функция $w=f(z)$ является аналитической в области G, ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром Γ, и на самом контуре, то

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz=0 \qquad \text{(теорема Коши)}$$

и для любой внутренней точки $z_0 \in G$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z \qquad \text{(интегральная формула Коши).}$$

1.6. Ряд Лорана. Функция $w = f(z)$, однозначная и аналитическая в кольце $\rho < |z - z_0| < R$, разлагается в этом кольце в *ряд Лорана*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z - z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k (z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k, \tag{6}$$

коэффициенты находятся по формулам

$$C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)\, \mathrm{d}z}{(z - z_0)^{k+1}}, \quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \tag{7}$$

Здесь Γ — произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри заданного кольца. Разложение в ряд Лорана единственно.

В формуле (6) ряды

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} C_k (z - z_0)^k \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$$

называются соответственно *главной частью ряда Лорана* и *правильной частью ряда Лорана*.

На практике для нахождения коэффициентов C_k, если это возможно, используют готовые разложения элементарных функций в ряд Тейлора.

Для примера разложим в ряд Лорана с центром в точке $z_0 = 0$ функцию $f(z) = z^3 e^{1/z}$.

Функция $z^3 e^{1/z}$ аналитична в кольце $0 < |z| < \infty$, следовательно, разложима в нем в ряд Лорана. Воспользуемся разложением показательной функции в ряд Тейлора в окрестности точки $\zeta_0 = 0$:

$$e^{\zeta} = 1 + \zeta + \frac{\zeta^2}{2!} + \ldots + \frac{\zeta^k}{k!} + \ldots$$

и положим $\zeta = 1/z$, тогда

$$f(z) = z^3 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \ldots + \frac{1}{z^k k!} + \ldots\right) =$$

$$= z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{z 4!} + \ldots + \frac{1}{z^{k-3} k!} + \ldots$$

В силу единственности ряда Лорана полученное разложение функции $f(z)$ по степеням z является рядом Лорана для функции $f(z) = z^3 e^{1/z}$ в кольце $0 < |z| < \infty$.

1.7. Изолированные особые точки однозначной аналитической функции. *Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $w = f(z)$, если $f(z)$ — однозначная и аналитическая функция в круговом кольце $0 < |z - z_0| < \delta$, кроме самой точки z_0.*

Функцию $w = f(z)$ в окрестности точки z_0 можно разложить в ряд Лорана (6), сходящийся в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$. При этом возможны три различных случая, когда ряд Лорана: 1) не содержит членов с отрицательными степенями разности $z - z_0$, т. е. $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$. В этом случае z_0 называется *устранимой особой точкой* функции $w = f(z)$; 2) содержит конечное число членов с отрицательными степенями разности $(z - z_0)$, т. е. $f(z) =$

$= \sum\limits_{k=-n}^{\infty} C_k (z-z_0)^k$, причем $C_{-n} \neq 0$. В этом случае z_0 называется *полюсом* порядка n функции $w=f(z)$; 3) содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями разности $z-z_0$, т. е. $f(z)= \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-z_0)^k$. В этом случае z_0 называется *существенно особой точкой* функции $w=f(z)$.

При определении характера изолированной особой точки используются следующие утверждения.

1. Для того чтобы точка z_0 являлась устранимой особой точкой аналитической функции $w=f(z)$, необходимо и достаточно существование предела $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)=C_0$, причем $|C_0| < \infty$.

2. Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом аналитической функции $w=f(z)$, необходимо и достаточно существование предела $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)=\infty$.

2′. Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка n аналитической функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде $f(z)=\varphi(z)/(z-z_0)^n$, где $\varphi(z)$ — функция аналитическая в точке z_0, причем $\varphi(z_0) \neq 0$.

2″. Пусть z_0 — изолированная особая точка функции $f(z)=\lambda(z)/\mu(z)$, где $\lambda(z)$ и $\mu(z)$ — функции аналитические в точке z_0.

Если числитель $\lambda(z)$ и все производные до $k-1$ порядка включительно в точке z_0 равны нулю, $\lambda^{(k)}(z_0) \neq 0$, знаменатель $\mu(z)$ и все производные до $l-1$ порядка включительно также равны нулю в точке z_0, $\mu^{(l)}(z_0) \neq 0$, то при $l > k$ точка z_0 является полюсом порядка $n=l-k$ аналитической функции $f(z)$. (Если $l \leqslant k$, то точка z_0 является устранимой особой точкой аналитической функции $f(z)$.) В частном случае, при $k=0$, $l=1$ имеем: если $\lambda(z_0) \neq 0$, $\mu(z_0)=0$, $\mu'(z_0) \neq 0$, то z_0 — полюс первого порядка функции $f(z)$.

3. Пусть при $z \to z_0$ аналитическая функция $w=f(z)$ не имеет пределов ни конечного, ни бесконечного. Это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы точка z_0 была существенно особой точкой функции $w=f(z)$.

1.8. Вычеты. Пусть z_0 — изолированная особая точка функции $w=f(z)$. *Вычетом функции* $f(z)$ *в точке* z_0 называется число, обозначаемое символом $\operatorname{res}_{z_0} f(z)$ и определяемое равенством

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz \tag{8}$$

(другие обозначения: $\operatorname{res} f(z_0)$, $\operatorname{res}[f(z), z_0]$). Замкнутый контур интегрирования γ лежит в области аналитичности функции $f(z)$ и не содержит внутри других особых точек функции $f(z)$, кроме z_0.

Сопоставление формул (7) и (8) показывает, что вычет функции равен коэффициенту при минус первой степени в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки z_0:

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = C_{-1}. \tag{9}$$

Вычет в устранимой особой точке равен нулю.

Вычет функции $f(z)$ в полюсе n-го порядка вычисляется по формуле

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z)(z-z_0)^n];$$

при $n=1$

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} [f(z)(z-z_0)].$$

Если функция $w=f(z)$ в окрестности точки z_0 представляется как частное двух аналитических функций, $f(z)=\lambda(z)/\mu(z)$, причем $\lambda(z_0) \neq 0$, $\mu(z_0)=0$,

$\mu'(z_0) \neq 0$ (в этом случае z_0 — полюс первого порядка функции $f(z)$), то

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lambda(z_0)/\mu'(z_0).$$

Если точка z_0 есть существенно особая точка функции $w = f(z)$, то вычет вычисляется по формуле (9).

Основная теорема Коши о вычетах. *Если функция $w = f(z)$ является аналитической на границе Γ области G и всюду внутри области, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то*

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z_k} f(z). \tag{10}$$

1.9. Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций. Пусть $R(x)$ — рациональная функция, $R(x) = P_k(x)/Q_l(x)$, где $P_k(x)$ и $Q_l(x)$ — многочлены степеней k и l соответственно. Если $R(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $l \geqslant k+2$, т. е. степень знаменателя, по крайней мере, на две единицы больше степени числителя, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{m} \operatorname{res}_{z_m} R(z),$$

здесь сумма вычетов функции $R(z) = P_k(z)/Q_l(z)$ берется по всем полюсам z_m, расположенным в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

1.10. Вычисление несобственных интегралов специального вида. Пусть $R(x)$ — рациональная функция, $R(x) = P_k(x)/Q_l(x)$, где $P_k(x)$ и $Q_l(x)$ — многочлены степеней k и l соответственно. Если $R(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $l \geqslant k+1$ (т. е. $R(x)$ — правильная рациональная дробь), то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x\,dx = \operatorname{Re}\left\{2\pi i \sum_{m} \operatorname{res}_{z_m} R(z)\,e^{i\lambda z}\right\}, \quad \lambda > 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\lambda x\,dx = \operatorname{Im}\left\{2\pi i \sum_{m} \operatorname{res}_{z_m} R(z)\,e^{i\lambda z}\right\}, \quad \lambda > 0,$$

где сумма вычетов функции $R(z)\,e^{i\lambda z}$ берется по всем полюсам z_m, расположенным в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

1.11. Вычисление определенных интегралов специального вида. Пусть R — рациональная функция $\cos t$ и $\sin t$, непрерывная внутри промежутка интегрирования. Полагаем $z = e^{it}$, тогда

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad dt = \frac{dz}{iz};$$

имеем

$$\int_{0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt = \oint_{|z|=1} F(z)\,dz, \tag{11}$$

где путь интегрирования — окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Контурный интеграл в правой части равенства (11) вычисляется по формуле (10), где сумма вычетов функции $F(z)$ берется по всем особым точкам, лежащим в области $|z| < 1$.

1.12. Преобразование Лапласа. *Функцией-оригиналом* называется функция $f(t)$ действительного аргумента t, удовлетворяющая условиям: 1) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале оси t; 2) для всех отрицательных t $f(t) = 0$; 3) $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, т. е. существуют такие постоянные M и σ_0, что для всех t $|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$.

Изображением функции $f(t)$ *по Лапласу* называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p=\sigma+i\tau$, определяемая равенством

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt;$$

обозначение: $f(t) \risingdotseq F(p)$.

Для любой функции-оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p>\sigma_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

Свойства

1°. Линейность: *для любых комплексных постоянных* C_1 *и* C_2

$$C_1 f_1(t)+C_2 f_2(t) \risingdotseq C_1 F_1(p)+C_2 F_2(p).$$

2°. Формула подобия: для любого постоянного $\omega>0$

$$f(\omega t) \risingdotseq \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right).$$

3°. Дифференцирование оригинала: *если функции* $f(t)$, $f'(t)$, $\ldots$, $f^{(n)}(t)$ *являются функциями-оригиналами, то*

$$f'(t) \risingdotseq pF(p)-f(0),$$
$$f''(t) \risingdotseq p^2 F(p)-pf(0)-f'(0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p)-p^{n-1} f(0)-p^{n-2} f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0).$$

Величина $f^{(k)}(0)$, $k=0, 1, \ldots, n-1$, понимается как $\lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t)$.

4°. Дифференцирование изображения: $F'(p) \risingdotseq -tf(t)$.

5°. Интегрирование оригинала: $\displaystyle\int_0^t f(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$.

6°. Интегрирование изображения: *если* $\dfrac{f(t)}{t}$ *является функцией-оригиналом, то*

$$\int_p^\infty F(p)\, dp \risingdotseq \frac{f(t)}{t}.$$

7°. Формула смещения: *для любого комплексного* λ

$$f(t)\, e^{-\lambda t} \risingdotseq F(p+\lambda).$$

8°. Формула запаздывания: $f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p)$, $\tau>0$.

9°. Формула умножения изображений:

$$F_1(p)\, F_2(p) \risingdotseq \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau. \qquad (12)$$

Интеграл в (12) называется *сверткой функций* $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и обозначается символом $f_1 * f_2$.

Отыскание оригинала по изображению

Для нахождения оригинала $f(t)$ по известному изображению $F(p)$ наиболее широко применяются следующие приемы:

1) если $F(p)$ есть правильная рациональная дробь, то ее разлагают на сумму простых дробей и находят оригиналы для каждой простой дроби, используя свойства 1^0—9^0 преобразования Лапласа;

2) используют *формулу разложения*, согласно которой при некоторых достаточно общих условиях оригиналом для $F(p)$ служит функция

$$f(t)=\sum_k \operatorname{res}_{p_k}[F(p)\ e^{pt}],$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$.

1.13. Формулы соответствия. Широко применяются следующие табличные соотношения:

$$1 \risingdotseq 1/p;\ e^{at} \risingdotseq 1/(p-a);\ \sin\omega t \risingdotseq \omega/(p^2+\omega^2);\ \cos\omega t \risingdotseq p/(p^2+\omega^2);$$
$$\operatorname{sh}\omega t \risingdotseq \omega/(p^2-\omega^2);\ \operatorname{ch}\omega t \risingdotseq p/(p^2-\omega^2);\ t^n \risingdotseq n!/p^{n+1}.$$

Левые части операционных соотношений предполагаются домноженными на функцию $\eta(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$ которая для сокращения записи, как правило, опускается.

1.14. Изображение кусочно-линейной функции. Примерный вид графика кусочно-линейной (полигональной) функции представлен на рис. 1. Введем следующие обозначения:

τ_k — точки разрыва функций $f(t)$ или $f'(t)$;

$\alpha_k=a_k-b_k$ — скачки функций в узлах «стыка»;

$\beta_k=\operatorname{tg}\gamma_k-\operatorname{tg}\delta_k$ — скачки производной $f'(t)$ в узлах «стыка».

Изображение полигональной функции имеет вид

$$F(p)=\sum_k e^{-p\tau_k}\left(\frac{\alpha_k}{p}+\frac{\beta_k}{p^2}\right).$$

1.15. Задача Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Решение линейных дифференциальных уравнений *операционным методом* предполагает три этапа: 1) переход от исходных функций к их изображениям по Лапласу, при этом дифференциальное уравнение преобразуется в алгебраическое относительно изображения искомой функции; 2) решение полученного алгебраического уравнения; 3) получение искомого решения по его изображению.

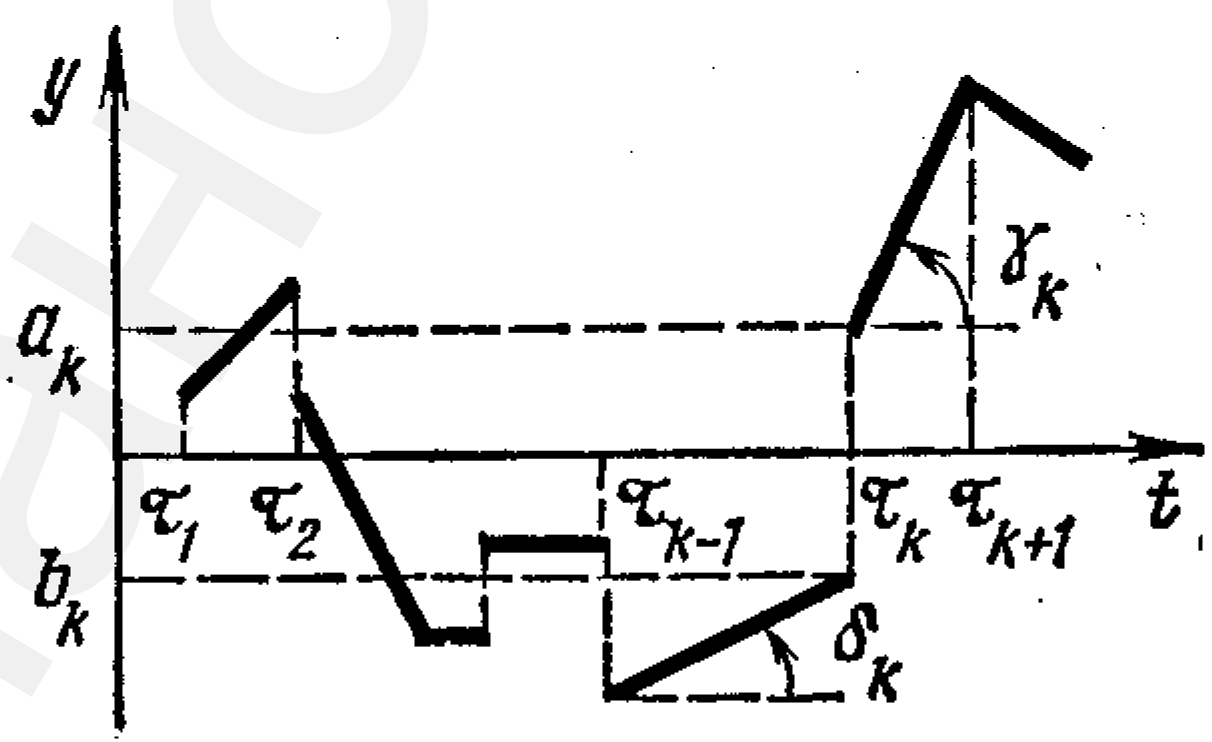


рис. 1.

Решим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$x'-x=1 \tag{13}$$

при начальном условии $x(0)=1$.

Операционный метод решения такой задачи состоит в том, что искомую функцию и правую часть дифференциального уравнения считаем оригиналами и переходим от уравнения, связывающего оригиналы, к уравнению, связывающему их изображения. Для этого воспользуемся формулой дифференцирования оригинала

$$x'(t) \doteqdot pX(p) - x(0) = pX(p) - 1.$$

Применяя свойство линейности, перейдем в уравнении (13) от оригиналов к изображениям:

$$[pX(p) - 1] - X(p) = 1/p.$$

Решим полученное уже не дифференциальное, а алгебраическое уравнение относительно неизвестного изображения $X(p)$:

$$X(p) = 2/(p-1) - 1/p.$$

Осталось по известному изображению $X(p)$ найти соответствующий ему оригинал $x(t)$. Используя свойство линейности преобразования Лапласа и табличные операционные соотношения (см. п. 1.13), получаем $x(t) = 2e^t - 1$. Это и есть искомое решение задачи Коши.

Аналогично решаются системы линейных дифференциальных уравнений.

1.16. Формула Дюамеля. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$L\{x(t)\} = a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) = f(t) \tag{14}$$

при нулевых начальных условиях

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0. \tag{15}$$

(Заменой искомой функции задачу с ненулевыми начальными условиями можно свести к задаче с нулевыми условиями.)

Допустим, что известно решение уравнения $L\{x(t)\} = 1$ (с той же левой частью и правой частью, равной единице) при условиях (15). Обозначим его $x_1(t)$. Тогда решение $x(t)$ задачи (14)—(15) можно выразить через $x_1(t)$ и $f(t)$ с помощью одной из формул:

$$x(t) = \int_0^t x_1'(\tau) f(t-\tau)\, d\tau, \quad x(t) = \int_0^t x_1'(t-\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

$$x(t) = f(0)\, x_1(t) + \int_0^t f'(\tau)\, x_1(t-\tau)\, d\tau, \quad x(t) = f(0)\, x_1(t) + \int_0^t f'(t-\tau)\, x_1(\tau)\, d\tau.$$

Каждое из этих выражений называют *формулой* (или *интегралом*) *Дюамеля*.

Метод решения дифференциальных уравнений, основанный на формуле Дюамеля, применяют, как правило, в тех случаях, когда возникают трудности при нахождении изображения $F(p)$ правой части $f(t)$ уравнения (14), а также при необходимости многократного решения задачи (14)—(15) для различных функций $f(t)$.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Комплексные числа, действия над ними.

2. Показательная и логарифмическая функции комплексного переменного. Формулы Эйлера.

3. Степенная функция. Тригонометрические и гиперболические функции.

4. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши — Римана. Понятие аналитической функции.

5. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексного переменного. Понятие о конформном отображении.

6. Интеграл от функции комплексного переменного, его свойства.

7. Теорема Коши для одно- и многосвязных областей. Формула Ньютона — Лейбница.

8. Интегральная формула Коши.

9. Существование производных всех порядков у аналитической функции.

10. Ряд Тейлора. Теорема о разложимости аналитической функции в ряд Тейлора.

11. Ряд Лорана. Кольцо сходимости. Теорема Лорана.

12. Классификация изолированных особых точек.

13. Вычеты. Вычисление вычетов.

14. Основная теорема Коши о вычетах. Вычисление контурных интегралов.

15. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.

16. Преобразование Лапласа. Функция-оригинал. Существование и аналитичность преобразования Лапласа. Поведение изображения в бесконечности.

17. Свойства преобразования Лапласа: свойство линейности, теорема подобия, теорема затухания (смещения), теорема запаздывания.

18. Дифференцирование оригинала и изображения.

19. Интегрирование оригинала и изображения.

20. Методы отыскания оригинала по заданному изображению.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать равенство

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin n\theta=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}},\quad \theta\neq 2\pi n,\ n=0,\pm 1,\ldots$$

Указание. Рассмотреть геометрическую прогрессию $e^{i\theta}$, $e^{i2\theta}$, ..., $e^{in\theta}$.

2. Доказать, что в полярных координатах r, φ условия Коши — Римана имеют вид $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}$; $\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}$.

3. Доказать, что функция $w=|z|$ нигде не дифференцируема.

4. Пусть функция $u(x, y)$ гармоническая в некоторой области G, т. е. $\Delta u=0$ в любой точке $(x, y)\in G$. Для каких «f» сложная функция $f[u(x, y)]$ будет также гармонической в области G?

5. Пусть функция $f(z)$ — аналитическая в круге $|z|\leqslant R$ и $M=\max\limits_{|z|=R}|f(z)|$. Для всех внутренних точек круга $|z|<R$ доказать неравенство

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right|\leqslant\frac{MR}{(R-|z|)^{n+1}},\quad n=1,2,\ldots$$

6. Числа A_n, определяемые условиями $A_0=1$, $A_1=1$, $A_{n+2}=A_n+A_{n+1}$, $n=0, 1, \ldots$, называются числами Фибоначчи. Доказать, что в некоторой области $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \frac{1}{1-z-z^2}$. Определить область сходимости ряда.

7. Доказать, что для четной функции $f(z)$ имеет место равенство $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = -\operatorname{res}_{-z_0} f(z)$, а для нечетной функции — равенство $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \operatorname{res}_{-z_0} f(z)$.

8. Функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ в точке $z=z_0$ имеют полюс соответственно порядка m и n. Что можно сказать о характере особой точки $z=z_0$ для функций: а) $f(z)\varphi(z)$; б) $f(z)/\varphi(z)$; в) $f(z)+\varphi(z)$?

9. Функции $f(z)$ и $g(z)$ — аналитические в точке z_0, причем $f(z_0)\neq 0$, $g(z_0)=g'(z_0)=0$, $g''(z_0)\neq 0$. Найти вычет функции $\varphi(z)=f(z)/g(z)$ в точке z_0.

10. Являются ли оригиналами функция $f(t)=\eta(t)\sin e^{t^2}$ и ее производная $f'(t)$? Здесь

$$\eta(t)=\begin{cases} 1, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

11. Используя теорему умножения изображений, найти решение интегрального уравнения $\int\limits_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau = 1-\cos t$.

РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Найти все значения корня (см. п. 1.1).

1.1. $\sqrt[4]{-1}$. 1.2. $\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$. 1.3. $\sqrt[3]{1}$.

1.4. $\sqrt[3]{i}$. 1.5. $\sqrt[4]{1}$. 1.6. $\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$.

1.7. $\sqrt[3]{-1}$. 1.8. $\sqrt[3]{-i}$. 1.9. $\sqrt[4]{-16}$.

1.10. $\sqrt[4]{\frac{1+i\sqrt{3}}{32}}$. 1.11. $\sqrt[3]{8}$. 1.12. $\sqrt[3]{8i}$.

1.13. $\sqrt[4]{16}$. 1.14. $\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{32}}$. 1.15. $\sqrt[3]{-8}$.

1.16. $\sqrt[3]{-8i}$. 1.17. $\sqrt[4]{-1/16}$. 1.18. $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$.

1.19. $\sqrt[3]{1/8}$. 1.20. $\sqrt[3]{i/8}$. 1.21. $\sqrt[4]{1/16}$.

1.22. $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$. 1.23. $\sqrt[3]{-1/8}$. 1.24. $\sqrt[3]{-1/8}$.

1.25. $\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}$. 1.26. $\sqrt[3]{27}$. 1.27. $\sqrt[4]{1/256}$.

1.28. $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$. 1.29. $\sqrt[3]{i/27}$. 1.30. $\sqrt[4]{256}$.

1.31. $\sqrt[3]{-i27}$.

Задача 2. Представить в алгебраической форме (см. п. 1,2).

2.1. $\sin(\pi/4+2i)$. 2.2. $\cos(\pi/6+2i)$. 2.3. $\mathrm{Ln}\,6$.

2.4. $\mathrm{sh}(2+\pi i/4)$. 2.5. $\mathrm{ch}(2+\pi i/2)$. 2.6. $\mathrm{Ln}(1+i)$.

2.7. $\sin(\pi/3+i)$. 2.8. $\cos(\pi/4+i)$. 2.9. $\mathrm{Ln}(\sqrt{3}+i)$.

2.10. $\mathrm{sh}(1+\pi i/2)$. 2.11. $\mathrm{ch}(1-\pi i)$. 2.12. $\mathrm{Ln}(1+\sqrt{3}i)$.

2.13. $\mathrm{Ln}(-1+i)$. 2.14. $\cos(\pi/4-2i)$. 2.15. $\sin(\pi/2-5i)$.

2.16. $\mathrm{sh}(3+\pi i/6)$. 2.17. $\mathrm{ch}(1+\pi i/3)$. 2.18. $\mathrm{Ln}(-1-i)$.

2.19. $\sin(\pi/6-3i)$. 2.20. $\cos(\pi/3+3i)$. 2.21. $\mathrm{Ln}(1-i)$.

2.22. $\mathrm{sh}(1-\pi i/3)$. 2.23. $\mathrm{ch}(2-\pi i/6)$. 2.24. 1^{2i}.

2.25. $\sin(\pi/3-2i)$. 2.26. $\cos(\pi/6-i)$. 2.27. i^{3i}.

2.28. $\mathrm{sh}(2-\pi i)$. 2.29. $(-i)^{5i}$. 2.30. $(-1)^{4i}$.

2.31. $\mathrm{ch}(3+\pi i/4)$.

Задача 3. Представить в алгебраической форме (см. п. 1.2).

3.1. $(-1+i\sqrt{3})^{-3i}$. 3.2. $\mathrm{Arcsin}\,4$. 3.3. $\mathrm{Arch}(-2)$.

3.4. $\mathrm{Arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\right)$. 3.5. $\mathrm{Arcth}\left(\frac{3-4i}{5}\right)$. 3.6. $\mathrm{Arcctg}\left(\frac{4+3i}{5}\right)$.

3.7. $\mathrm{Arth}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{3}\right)$. 3.8. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-i\right)$. 3.9. $\mathrm{sh}\left(1-\frac{\pi}{2}i\right)$.

3.10. $(-1-i)^{4i}$. 3.11. $\sin(\pi/4+i)$. 3.12. $\mathrm{Arch}(3i)$.

3.13. $\mathrm{Arctg}\left(\frac{3+4i}{5}\right)$. 3.14. $\mathrm{Arcth}\left(\frac{8+i3\sqrt{3}}{7}\right)$. 3.15. $\mathrm{Arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}-8i}{7}\right)$.

3.16. $\mathrm{Arth}\left(\frac{4-3i}{5}\right)$. 3.17. $\mathrm{Arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{7}\right)$. 3.18. $\mathrm{Arcth}\left(\frac{3-i2\sqrt{3}}{7}\right)$.

3.19. $\mathrm{Arccos}(-5)$. 3.20. $\mathrm{Arsh}(-4i)$. 3.21. $(-\sqrt{3}+i)^{-6i}$.

3.22. $\omega=\sin\frac{i}{z}$ при $z=\frac{8+2\pi i}{\pi^2+16}$. 3.23. $w=e^{\frac{1}{z}}$ при $z=\frac{4+2\pi i}{\pi^2+4}$. 3.24. $\mathrm{Arcctg}\left(\frac{2\sqrt{3}+3i}{7}\right)$.

3.25. $\mathrm{Arth}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{7}\right)$. 3.26. $\mathrm{Arcth}\left(\frac{4+3i}{5}\right)$. 3.27. $w=\mathrm{ch}\,iz$ при $z=\pi/4+2i$.

3.28. $\mathrm{Arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}+8i}{7}\right)$. 3.29. $\mathrm{Arccos}(-3i)$. 3.30. $(4-3i)^{i}$.

3.31. $(-12+5i)^{-i}$.

Задача 4. Вычертить область, заданную неравенствами.

4.1. $|z-1|\leqslant 1,\ |z+1|>2$. 4.2. $|z+i|\geqslant 1,\ |z|<2$.

4.3. $|z-i|\leqslant 2,\ \mathrm{Re}\,z>1$. 4.4. $|z+1|\geqslant 1,\ |z+i|<1$.

4.5. $|z+1|<1,\ |z-i|\leqslant 1$. 4.6. $|z+i|\leqslant 2,\ |z-i|>2$.

4.7. $|z-1-i|\leqslant 1,\ \mathrm{Im}\,z>1,\ \mathrm{Re}\,z\geqslant 1$.

4.8. $|z-1+i|\geqslant 1,\ \mathrm{Re}\,z<1,\ \mathrm{Im}\,z\leqslant -1$.

4.9. $|z-2-i|\leqslant 2,\ \mathrm{Re}\,z\geqslant 3,\ \mathrm{Im}\,z<1$.

4.10. $|z-1-i|\geqslant 1,\ 0\leqslant \mathrm{Re}\,z<2,\ 0<\mathrm{Im}\,z\leqslant 2$.

4.11. $|z+i|<2,\ 0<\operatorname{Re} z\leqslant 1.$

4.12. $|z-i|\leqslant 1,\ 0<\arg z<\pi/4.$

4.13. $|z-i|\leqslant 2,\ 0<\operatorname{Im} z<2.$

4.14. $|z+i|>1,\ -\pi/4\leqslant \arg z<0.$

4.15. $|z-1-i|<1,\ |\arg z|\leqslant \pi/4.$

4.16. $|z|<2,\ -\pi/4\leqslant \arg(z-1)\leqslant \pi/4.$

4.17. $|z|\leqslant 1,\ \arg(z+i)>\pi/4.$

4.18. $1<|z-1|\leqslant 2,\ \operatorname{Im} z\geqslant 0,\ \operatorname{Re} z<1.$

4.19. $1\leqslant |z-i|<2,\ \operatorname{Re} z\leqslant 0,\ \operatorname{Im} z>1.$

4.20. $|z|<2,\ \operatorname{Re} z\geqslant 1,\ \arg z<\pi/4.$

4.21. $|z|>1,\ -1<\operatorname{Im} z\leqslant 1,\ 0<\operatorname{Re} z\leqslant 2.$

4.22. $|z-1|>1,\ -1\leqslant \operatorname{Im} z<0,\ 0\leqslant \operatorname{Re} z<3.$

4.23. $|z+i|<1,\ -3\pi/4\leqslant \arg z\leqslant -\pi/4.$

4.24. $|z-i|\leqslant 1,\ -\pi/2<\arg(z-i)<\pi/4.$

4.25. $z\bar{z}<2,\ \operatorname{Re} z\leqslant 1,\ \operatorname{Im} z>-1.$

4.26. $z\bar{z}\leqslant 2,\ \operatorname{Re} z<1,\ \operatorname{Im} z>-1.$

4.27. $1<z\bar{z}<2,\ \operatorname{Re} z>0,\ 0\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant 1.$

4.28. $|z-1|<1,\ \arg z\leqslant \pi/4,\ \arg(z-1)>\pi/4.$

4.29. $|z-i|<1,\ \arg z\geqslant \pi/4,\ \arg(z+1-i)\leqslant \pi/4.$

4.30. $|z-2-i|\geqslant 1,\ 1\leqslant \operatorname{Re} z<3,\ 0<\operatorname{Im} z\leqslant 3.$

4.31. $|\operatorname{Re} z|\leqslant 1,\ |\operatorname{Im} z|<2.$

Задача 5. Определить вид кривой (см. п. 1.3)

5.1. $z=3\sec t+i2\operatorname{tg} t.$

5.2. $z=2\sec t-i3\operatorname{tg} t.$

5.3. $z=-\sec t+i3\operatorname{tg} t.$

5.4. $z=4\operatorname{tg} t-i3\sec t.$

5.5. $z=3\operatorname{tg} t+i4\sec t.$

5.6. $z=-4\operatorname{tg} t-i2\sec t.$

5.7. $z=3\operatorname{cosec} t+i3\operatorname{ctg} t.$

5.8. $z=4\operatorname{cosec} t-i2\operatorname{ctg} t.$

5.9. $z=\operatorname{ctg} t-i2\operatorname{cosec} t.$

5.10. $z=-\operatorname{ctg} t+i3\operatorname{cosec} t.$

5.11. $z=3\operatorname{ch} 2t+i2\operatorname{sh} 2t.$

5.12. $z=2\operatorname{ch} 3t-i3\operatorname{sh} 3t.$

5.13. $z=5\operatorname{sh} 4t+i4\operatorname{ch} 4t.$

5.14. $z=-4\operatorname{sh} 5t-i5\operatorname{ch} 5t.$

5.15. $z=\dfrac{2}{\operatorname{ch} 2t}+i4\operatorname{th} 2t.$

5.16. $z=\dfrac{4}{\operatorname{ch} 4t}+i2\operatorname{th} 4t.$

5.17. $z=\operatorname{th} 5t+\dfrac{5i}{\operatorname{ch} 5t}.$

5.18. $z=\dfrac{1}{\operatorname{sh} t}-i\operatorname{cth} t.$

5.19. $z=2e^{it}+\dfrac{1}{2e^{it}}.$

5.20. $z=3e^{it}-\dfrac{1}{2e^{it}}.$

5.21. $z=-2e^{it}+\dfrac{1}{e^{it}}.$

5.22. $z=2e^{2it}-\dfrac{1}{e^{2it}}.$

5.23. $z=\dfrac{1+t}{1-t}+i\dfrac{2+t}{2-t}.$

5.24. $z=\dfrac{t-1+it}{t(t-1)}.$

5.25. $z=\dfrac{1+i}{1-t}+\dfrac{t}{1-t}(2-4i).$

5.26. $z=\dfrac{2+t}{2-t}+i\dfrac{1+t}{1-t}.$

5.27. $z=t^2+4t+20-i(t^2+4t+4).$

5.28. $z=t^2+2t+5+i(t^2+2t+1).$

5.29. $z=2t^2+2t+1-i(t^2+t+4).$

5.30. $z=t-2+i(t^2-4t+5).$

5.31. $z=t^2-2t+3+i(t^2-2t+1).$

Задача 6. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ и значению $f(z_0)$ (см. п. 1.4).

6.1. $u=x^2-y^2+x$, $f(0)=0$.

6.2. $u=x^3-3xy+1$, $f(0)=1$.

6.3. $v=e^x(y\cos y+x\sin y)$, $f(0)=0$.

6.4. $u=x^2-y^2-2y$, $f(0)=0$.

6.5. $u=\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}\cos y$, $f(0)=2$.

6.6. $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $f(1)=1+i$.

6.7. $v=e^{-y}\sin x+y$, $f(0)=1$.

6.8. $v=e^x\cos y$, $f(0)=1+i$.

6.9. $v=-\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$, $f(0)=1$.

6.10. $v=y-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f(1)=2$.

6.11. $u=e^{-y}\cos x$, $f(0)=1$.

6.12. $u=y-2xy$, $f(0)=0$.

6.13. $v=x^2-y^2+2x+1$, $f(0)=i$.

6.14. $u=x^2-y^2-2x+1$, $f(0)=1$.

6.15. $v=3x^2y-y^3-y$, $f(0)=0$.

6.16. $v=2xy+y$, $f(0)=0$.

6.17. $v=3x^2y-y^3$, $f(0)=1$.

6.18. $u=e^x(x\cos y-y\sin y)$, $f(0)=0$.

6.19. $v=2xy+2x$, $f(0)=0$.

6.20. $u=1-\sin y\cdot e^x$, $f(0)=1+i$.

6.21. $v=\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}\sin y$, $f(0)=2$.

6.22. $v=1-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f(1)=1+i$.

6.23. $u=e^{-y}\cos x+x$, $f(0)=1$.

6.24. $v=e^{-y}\sin x$, $f(0)=1$.

6.25. $u=\dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$, $f(0)=1$.

6.26. $u=x/(x^2+y^2)+x$, $f(1)=2$.

6.27. $v=x^2-y^2-x$, $f(0)=0$.

6.28. $u=-2xy-2y$, $f(0)=i$.

6.29. $v=2xy-2y$, $f(0)=1$.

6.30. $u=x^3-3xy^2-x$, $f(0)=0$.

6.31. $v=2xy+x$, $f(0)=0$.

Задача 7. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой (см. п. 1.5)

7.1. $\int\limits_{AB}\bar{z}^2\,dz$; $AB:\{y=x^2;\ z_A=0,\ z_B=1+i\}$.

7.2. $\int\limits_{L}(z+1)e^z\,dz$; $L:\{|z|=1,\ \operatorname{Re}z\geqslant 0\}$.

7.3. $\int\limits_{AB}\operatorname{Im}z^3\,dz$; AB — отрезок прямой, $z_A=0$, $z_B=2+2i$.

7.4. $\int\limits_{AB}(z^2+7z+1)\,dz$; AB — отрезок прямой, $z_A=1$, $z_B=1-i$.

7.5. $\int\limits_{ABC}|z|\,dz$; ABC — ломаная, $z_A=0$, $z_B=-1+i$, $z_C=1+i$.

7.6. $\int\limits_{AB}(12z^5+4z^3+1)\,dz$; AB — отрезок прямой, $z_A=1$, $z_B=i$.

7.7. $\int\limits_{AB}\bar{z}^2\,dz$; AB — отрезок прямой, $z_A=0$, $z_B=1+i$.

7.8. $\int\limits_{ABC}z^3e^{z^4}\,dz$; ABC — ломаная, $z_A=i$, $z_B=1$, $z_C=0$.

7.9. $\int\limits_{ABC} \operatorname{Re}\frac{\bar z}{z}\,dz$; AB: $\{|z|=1,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, BC — отрезок, $z_B=1$, $z_C=2$.

7.10. $\int\limits_{ABC} (z^2+\cos z)\,dz$; ABC — ломаная, $z_A=0$, $z_B=1$, $z_C=i$.

7.11. $\int\limits_{L} \frac{\bar z}{z}\,dz$; L — граница области: $\{1<|z|<2,\ \operatorname{Re} z>0\}$.

7.12. $\int\limits_{ABC} (\operatorname{ch} z+\cos iz)$; ABC — ломаная, $z_A=0$, $z_B=-1$, $z_C=i$.

7.13. $\int\limits_{L} |z|\,\bar z\,dz$; $L:\{|z|=4,\ \operatorname{Re} z\geqslant 0\}$.

7.14. $\int\limits_{L} (\operatorname{ch} z+z)\,dz$; $L:\{|z|=1,\ \operatorname{Im} z\leqslant 0\}$.

7.15. $\int\limits_{L} |z|\operatorname{Re} z^2\,dz$; $L:\{|z|=R,\ \operatorname{Im} z\geqslant 0\}$.

7.16. $\int\limits_{AB} (3z^2+2z)\,dz$; $AB:\{y=x^2,\ z_A=0,\ z_B=1+i\}$.

7.17. $\int\limits_{L} z\operatorname{Re} z^2\,dz$; $L:\{|z|=R;\ \operatorname{Im} z\geqslant 0\}$.

7.18. $\int\limits_{ABC} (z^2+1)\,dz$; ABC — ломаная, $z_A=0$, $z_B=-1+i$, $z_C=i$.

7.19. $\int\limits_{AB} e^{|z|^2}\operatorname{Im} z\,dz$; AB — отрезок прямой, $z_A=1+i$, $z_B=0$.

7.20. $\int\limits_{L} (\sin iz+z)\,dz$; $L:\{|z|=1,\ \operatorname{Re} z\geqslant 0\}$.

7.21. $\int\limits_{AB} z\operatorname{Re} z^2\,dz$; AB — отрезок прямой, $z_A=0$, $z_B=1+2i$.

7.22. $\int\limits_{AB} (2z+1)\,dz$; $AB:\{y=x^3,\ z_A=0,\ z_B=1+i\}$.

7.23. $\int\limits_{ABC} z\bar z\,dz$; $AB:\{|z|=1,\ \operatorname{Re} z\geqslant 0,\ \operatorname{Im} z\geqslant 0\}$,

BC — отрезок, $z_B=1$, $z_C=0$.

7.24. $\int\limits_{L} (\cos iz+3z^2)\,dz$; $L:\{|z|=1,\ \operatorname{Im} z\geqslant 0\}$.

7.25. $\int\limits_{L} |z|\,dz$; $L:\{|z|=\sqrt{2},\ 3\pi/4\leqslant \arg z\leqslant 5\pi/4\}$.

7.26. $\int\limits_{ABC} (z^9+1)\,dz$; ABC — ломаная, $z_A=0$, $z_B=1+i$, $z_C=i$.

7.27. $\frac{1}{2i}\int\limits_{|z|=R} \bar z\,dz$.

7.28. $\int\limits_{ABC} (\sin z+z^5)\,dz$; ABC — ломаная, $z_A=0$, $z_B=1$, $z_C=2i$.

7.29. $\int\limits_{AB} z\operatorname{Im} z^2\,dz$; AB — отрезок прямой, $z_A=0$, $z_B=1+i$.

7.30. $\int\limits_{L} (z^3+\sin z)\,dz$; $L:\{|z|=1,\ \operatorname{Re} z\geqslant 0\}$.

7.31. $\int\limits_{L} z|z|\,dz$; $L:\{|z|=1,\ \operatorname{Im} z\geqslant 0\}$.

Задача 8. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z (см. п. 1.6).

8.1. $\dfrac{z-2}{2z^3+z^2-z}$. 8.2. $\dfrac{z-4}{z^4+z^3-2z^2}$. 8.3. $\dfrac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}$.

8.4. $\dfrac{2z-16}{z^4+2z^3-8z^2}$. 8.5. $\dfrac{5z-50}{2z^3+5z^2-25z}$. 8.6. $\dfrac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}$.

8.7. $\dfrac{7z-98}{2z^3+7z^2-49z}$. 8.8. $\dfrac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2}$. 8.9. $\dfrac{9z-162}{2z^3+9z^2-81z}$.

8.10. $\dfrac{5z-100}{z^4+5z^3-50z^2}$. 8.11. $\dfrac{11z-242}{2z^3+11z^2-121z}$. 8.12. $\dfrac{6z-144}{z^4+6z^3-72z^2}$.

8.13. $\dfrac{13z-338}{2z^3+12z^2-169z}$. 8.14. $\dfrac{7z-196}{z^4+7z^3-98z^2}$. 8.15. $\dfrac{15z-450}{2z^3+15z^2-225z}$.

8.16. $\dfrac{8z-256}{z^4+8z^3-128z^2}$. 8.17. $\dfrac{z+2}{z+z^2-2z^3}$. 8.18. $\dfrac{z+4}{2z^2+z^3-z^4}$.

8.19. $\dfrac{3z+18}{9z+3z^2-2z^3}$. 8.20. $\dfrac{2z+16}{8z^2+2z^3-z^4}$. 8.21. $\dfrac{5z+50}{25z+5z^2-2z^3}$.

8.22. $\dfrac{3z+36}{18z^2+3z^3-z^4}$. 8.23. $\dfrac{7z+98}{49z+7z^2-2z^3}$. 8.24. $\dfrac{4z+64}{32z^2+4z^3-z^4}$.

8.25. $\dfrac{9z+162}{81z+9z^2-2z^3}$. 8.26. $\dfrac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}$. 8.27. $\dfrac{11z+242}{121z+11z^2-2z^3}$.

8.28. $\dfrac{6z+144}{72z^2+6z^3-z^4}$. 8.29. $\dfrac{13z+338}{169z+13z^2-2z^3}$. 8.30. $\dfrac{7z+196}{98z^2+7z^3-z^4}$.

8.31. $\dfrac{15z+450}{225z+15z^2-2z^3}$.

Задача 9. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z-z_0$ (см. п. 1.6).

9.1. $\dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=1+2i$. 9.2. $\dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=2-3i$.

9.3. $\dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=-3-2i$. 9.4. $\dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=-2+i$.

9.5. $\dfrac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0=1+3i$. 9.6. $\dfrac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0=2-i$.

9.7. $\dfrac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0=-1+2i$. 9.8. $\dfrac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0=-2-3i$.

9.9. $\dfrac{z+3}{z^2-1}$, $z_0=2+i$. 9.10. $\dfrac{z+3}{z^2-1}$, $z_0=3-i$.

9.11. $\dfrac{z+3}{z^2-1}$, $z_0=-2+3i$. 9.12. $\dfrac{z+3}{z^2-1}$, $z_0=-2-2i$.

9.13. $\dfrac{z}{z^2+1}$, $z_0=2+i$. 9.14. $\dfrac{z}{z^2+1}$, $z_0=1-2i$.

9.15. $\dfrac{z}{z^2+1}$, $z_0=-3+i$. 9.16. $\dfrac{z}{z^2+1}$, $z_0=-3-2i$.

9.17. $4\cdot\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=-2+2i$. 9.18. $4\cdot\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=1-3i$.

9.19. $4\cdot\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=-3-i$.

9.20. $4\cdot\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=-2+1$.

9.21. $4\cdot\dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=-1-2i$.

9.22. $4\cdot\dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=3+i$.

9.23. $4\cdot\dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=2-2i$.

9.24. $4\cdot\dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=-2-i$.

9.25. $\dfrac{2z}{z^2+4}$, $z_0=-1-3i$.

9.26. $\dfrac{2z}{z^2+4}$, $z_0=-3+2i$.

9.27. $\dfrac{2z}{z^2+4}$, $z_0=2+3i$.

9.28. $\dfrac{2z}{z^2+4}$, $z_0=3+2i$.

9.29. $\dfrac{2z}{z^2-4}$, $z_0=-1+3i$.

9.30. $\dfrac{2z}{z^2-4}$, $z_0=2+2i$.

9.31. $\dfrac{2z}{z^2-4}$, $z_0=3-2i$.

Задача 10. Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0 (см. п. 1.6).

10.1. $z\cos\dfrac{1}{z-2}$, $z_0=2$.

10.2. $\sin\dfrac{z}{z-1}$, $z_0=1$.

10.3. $ze^{z/(z-5)}$, $z_0=5$.

10.4. $\sin\dfrac{2z-z}{z+2}$, $z_0=-2$.

10.5. $\cos\dfrac{3z}{z-i}$, $z_0=i$.

10.6. $\sin\dfrac{5z}{z-2i}$, $z_0=2i$.

10.7. $\sin\dfrac{3z-i}{3z+i}$, $z_0=-\dfrac{i}{3}$.

10.8. $z\cos\dfrac{3z}{z-1}$, $z_0=1$.

10.9. $z\sin\dfrac{z}{z-1}$, $z_0=1$.

10.10. $(z-3)\cos\pi\dfrac{z-3}{z}$, $z_0=0$.

10.11. $z^2\sin\pi\dfrac{z+1}{z}$, $z_0=0$.

10.12. $z\cos\dfrac{z}{z+2i}$, $z_0=-2i$.

10.13. $\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $z_0=2$.

10.14. $\sin\dfrac{z+i}{z-i}$, $z_0=i$.

10.15. $\sin\dfrac{z}{z-3}$, $z_0=3$.

10.16. $ze^{\frac{1}{z-2}}$, $z_0=2$.

10.17. $e^{\frac{z}{z-3}}$, $z_0=3$.

10.18. $\sin\dfrac{2z}{z-4}$, $z_0=4$.

10.19. $\sin\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $z_0=2$.

10.20. $e^{\frac{4z-2z^2}{(z-1)^2}}$, $z_0=1$.

10.21. $ze^{\frac{\pi}{(z-a)^2}}$, $z_0=a$.

10.22. $ze^{\frac{\pi z}{z-\pi}}$, $z_0=\pi$.

10.23. $z\sin\pi\dfrac{z+2}{z}$, $z=0$.

10.24. $z\cos\pi\dfrac{z+3}{z-1}$, $z_0=1$.

10.25. $z^2\sin\dfrac{z+3}{z}$, $z_0=0$.

10.26. $z\sin\dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2}$, $z_0=1$.

10.27. $z\cos\frac{z}{z-3}$, $z_0=3$.

10.28. $z\sin\pi\frac{z-1}{z-2}$, $z_0=2$.

10.29. $z\cos\frac{z}{z-5}$, $z_0=5$.

10.30. $ze^{\frac{z}{z-4}}$, $z_0=4$.

10.31. $z\sin\frac{\pi z}{z-a}$, $z_0=a$.

Задача 11. Определить тип особой точки $z=0$ для данной функции (см. п. 1.7).

11.1. $\frac{e^{9z}-1}{\sin z-z+z^3/6}$.

11.2. z^3e^{7/z^2}.

11.3. $\frac{\sin 8z-6z}{\cos z-1+z^2/2}$.

11.4. $\frac{\cos 7z-1}{\operatorname{sh} z-z-z^3/6}$.

11.5. $\frac{\operatorname{sh} 6z-6z}{\operatorname{ch} z-1-z^2/2}$.

11.6. $\frac{\operatorname{ch} 5z-1}{e^z-1-z}$.

11.7. $z\sin\frac{6}{z^2}$.

11.8. $\frac{e^z-1}{\sin z-z+z^3/6}$.

11.9. $\frac{\sin z^2-z^2}{\cos z-1+z^2/2}$.

11.10. $\frac{\cos z^2-1}{\operatorname{sh} z-z-z^3/6}$.

11.11. $\frac{e^{5z}-1}{\operatorname{ch} z-1-z^2/2}$.

11.12. $\frac{\sin 4z-4z}{e^z-1-z}$.

11.13. $z^4\cos\frac{5}{z^2}$.

11.14. $\frac{\cos 3z-1}{\sin z-z+z^3/6}$.

11.15. $\frac{\operatorname{sh} 2z-2z}{\cos z-1+z^2/2}$.

11.16. $\frac{\operatorname{ch} 2z-1}{\operatorname{sh} z-z-z^3/6}$.

11.17. $\frac{e^{z^3}}{\operatorname{ch} z-1-z^2/2}$.

11.18. ze^{4/z^3}.

11.19. $\frac{\sin z^3-z^3}{e^z-1-z}$.

11.20. $\frac{\cos z^3-1}{\sin z-z+z^3/6}$.

11.21. $\frac{e^{7z}-1}{\cos z-1+z^2/2}$.

11.22. $\frac{\sin 6z-6z}{\operatorname{sh} z-z-z^3/6}$.

11.23. $z\sin\frac{3}{z^3}$.

11.24. $\frac{\cos 5z-1}{\operatorname{ch} z-1-z^2/2}$.

11.25. $\frac{\operatorname{sh} 4z-4z}{e^z-1-z}$.

11.26. $\frac{\operatorname{ch} 3z-1}{\sin z-z+z^3/6}$.

11.27. $\frac{e^{z^4}-1}{\cos z-1+z^2/2}$.

11.28. $\frac{\sin z^4-z^4}{\operatorname{sh} z-z-z^3/6}$.

11.29. $z\cos\frac{2}{z^3}$.

11.30. $\frac{\cos z^4/2}{\operatorname{ch} z-1-z^2/2}$.

11.31. $(e^{z^5}-1)/(e^z-1-z)$.

Задача 12. Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип (см. п. 1.7).

12.1. $e^{1/z}/\sin(1/z)$.

12.2. $1/\cos z$.

12.3. $\operatorname{tg}^2 z$.

12.4. $z\operatorname{tg} ze^{1/z}$.

12.5. $\frac{e^z-1}{z^3(z+1)^2}$.

12.6. $\frac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)}$.

12.7. $\frac{(z+\pi)\sin\frac{\pi}{2}z}{z\sin^2 z}$.

12.8. $\operatorname{tg}\frac{1}{z}$.

12.9. $\operatorname{ctg}\frac{1}{z}$.

12.10. $\frac{1}{e^z+1}$.

12.11. $\operatorname{ctg}\pi z$.

12.12. $\frac{\sin\pi z}{(z-1)^3}$.

12.13. $\frac{1}{\sin z^2}$.

12.14. $\frac{\sin 3z-3\sin z}{z(\sin z-z)}$.

12.15. $\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$.

12.16. $\dfrac{e^z-1}{\sin \pi z}$.

12.17. $\operatorname{th} z$.

12.18. $\dfrac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$.

12.19. $\dfrac{e^{1/z}}{(e^z-1)(1-z)^3}$.

12.20. $\dfrac{1}{z^2}+\sin\dfrac{1}{z^2}$.

12.21. $\dfrac{z^2}{(z^2-4)^2\cos\dfrac{1}{z-2}}$.

12.22. $z^2\sin\dfrac{1}{z}$.

12.23. $\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2}z}{z^4-1}$.

12.24. $\dfrac{\sin \pi z}{(z^3-1)^2}$.

12.25. $\dfrac{\sin^3 z}{z(1-\cos z)}$.

12.26. $\operatorname{ctg}\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}$.

12.27. $\dfrac{\sin 3z^2}{z(z^3+1)}e^{1/z}$.

12.28. $\dfrac{\cos \pi z}{(4z^2-1)(z^2+1)}$.

12.29. $\dfrac{\sin 3z}{z(1-\cos z)}$.

12.30. $\dfrac{2z-\sin 2z}{z^2(z^2+1)}$.

12.31. $\dfrac{\sin \pi z}{z^4-1}e^{1/z}$.

Задача 13. Вычислить интеграл (см. п. 1.7; 1.8).

13.1. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/2}\frac{dz}{z(z^2+1)}$.

13.2. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1-i|=5/4}\frac{2dz}{z^2(z-1)}$.

13.3. $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=3/2}\frac{dz}{z(z^2+4)}$.

13.4. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{2+\sin z}{z(z+2i)}\,dz$.

13.5. $\displaystyle\oint\limits_{|z-3|=1/2}\frac{e^z\,dz}{\sin z}$.

13.6. $\displaystyle\oint\limits_{|z-3/2|=2}\frac{z(\sin z+2)}{\sin z}\,dz$.

13.7. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=3}\frac{ze^z}{\sin z}\,dz$.

13.8. $\displaystyle\oint\limits_{|z-3/2|=2}\frac{2z\,|z-1|}{\sin z}\,dz$.

13.9. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1/4|=1/3}\frac{z(z+1)^2}{\sin 2\pi z}\,dz$.

13.10. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1/2|=1}\frac{iz(z-i)}{\sin \pi z}\,dz$.

13.11. $\displaystyle\oint\limits_{|z-3|=1}\frac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)}\,dz$.

13.12. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1/2|=1}\frac{e^z+1}{z(z-1)}\,dz$.

13.13. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^{zi}+2}{\sin 3zi}\,dz$.

13.14. $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=3}\frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2}\,dz$.

13.15. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=3/2}\frac{\ln(z+2)}{\sin z}\,dz$.

13.16. $\displaystyle\oint\limits_{|z-6|=1}\frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}\,dz$.

13.17. $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=1/2}\frac{\operatorname{tg} z+2}{4z^2+\pi z}\,dz$.

13.18. $\displaystyle\oint\limits_{|z+3/2|=1}\frac{\cos^2 z+3}{2z^2+\pi z}\,dz$.

13.19. $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=2}\frac{\sin^2 z-3}{z^2+2\pi z}\,dz$.

13.20. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/4}\frac{\ln(e+z)}{z\sin\left(z+\dfrac{\pi}{4}\right)}\,dz$.

13.21. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\pi/2}\frac{z^2+z+3}{\sin z(\pi+z)}\,dz$.

13.22. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{z^3-i}{\sin 2z(z-\pi)}\,dz$.

13.23. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z(z+\pi)}{\sin 2z}\,dz.$

13.24. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2+\sin z+2}{z^2+\pi z}\,dz.$

13.25. $\displaystyle\oint\limits_{|z-3/2|=1} \frac{z(z+\pi)}{\sin 3z\,(z-\pi)}\,dz.$

13.26. $\displaystyle\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{\sin z}{z(z-\pi)\left(z+\frac{\pi}{3}\right)}\,dz.$

13.27. $\displaystyle\oint\limits_{|z-\pi|=1} \frac{(z^2+\pi)^2}{i\sin z}\,dz.$

13.28. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z\cos z}\,dz.$

13.29. $\displaystyle\oint\limits_{|z-\pi|=2} \frac{\cos^2 z}{z\sin z}\,dz.$

13.30. $\displaystyle\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{z^3+\sin 2z}{\sin\frac{z}{2}\,(z-\pi)}\,dz.$

13.31. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}\,dz.$

Задача 14. Вычислить интеграл (см. п. 1.7; 1.8).

14.1. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z^2-1}{z^3}\,dz.$

14.2. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{2-z^2+3z^3}{4z^3}\,dz.$

14.3. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{1/z}+1}{z}\,dz.$

14.4. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z^3}{1-\cos z}\,dz.$

14.5. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-2z+3z^2+4z^3}{2z^2}\,dz.$

14.6. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{1-\cos z^2}{z^2}\,dz.$

14.7. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{3z^4-2z^3+5}{z^4}\,dz.$

14.8. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{1-\sin\frac{1}{z}}{z}\,dz.$

14.9. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{e^{2z^2}-1}{z^3}\,dz.$

14.10. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{3-2z+4z^4}{z^3}\,dz.$

14.11. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{2z^4}\,dz.$

14.12. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3-3z^2+1}{2z^4}\,dz.$

14.13. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{4z^5-3z^3+1}{z^6}\,dz.$

14.14. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2}\,dz.$

14.15. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz-1}{z^3}\,dz.$

14.16. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz-1}{z^3}\,dz.$

14.17. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-2z^4+3z^5}{z^4}\,dz.$

14.18. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2+\cos z}{z^3}\,dz.$

14.19. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{z^5-3z^3+5z}{z^4}\,dz.$

14.20. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{z^4}\,dz.$

14.21. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z^2-1}{z^4}\,dz.$

14.22. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{2+3z^3-5z^4}{z^5}\,dz.$

14.23. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{ze^{\frac{1}{z}} - z - 1}{z^3}\,dz.$

14.24. $\oint\limits_{|z|=2} z^2 \sin\frac{i}{z^2}\,dz.$

14.25. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{z^4 + 2z^2 + 3}{2z^6}\,dz.$

14.26. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{iz} - 1}{z^3}\,dz.$

14.27. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1 - z^4 + 3z^6}{2z^3}\,dz.$

14.28. $\oint\limits_{|z|=2} z^3 \cos\frac{2i}{z}\,dz.$

14.29. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{e^z - \sin z}{z^2}\,dz.$

14.30. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{2z^3 + 3z^2 - 2}{2z^5}\,dz.$

14.31. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2 e^{1/z^2} - 1}{z}\,dz.$

Задача 15. Вычислить интеграл (см. п. 1.7; 1.8).

15.1. $\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{3\pi z - \sin 3\pi z}{z^2 - \mathrm{sh}^2 \pi^2 z}\,dz.$

15.2. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos 3z - 1 + 9z^2/2}{z^4\,\mathrm{sh}\,\frac{9}{4}z}\,dz.$

15.3. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{\mathrm{sh}\,2\pi z - 2\pi z}{z^2 \sin^2\frac{\pi^2 z}{3}}\,dz.$

15.4. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch}\,3z - 1 - 9z^2/2}{z^4 \sin\frac{9z}{8}}\,dz.$

15.5. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{2z} - 1 - 2z}{z\,\mathrm{sh}^2\,4iz}\,dz.$

15.6. $\oint\limits_{|z|=0,4} \frac{e^{4z} - \cos 7z}{z\,\mathrm{sh}\,2\pi z}\,dz.$

15.7. $\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{e^{8z}\,\mathrm{ch}\,4z}{z \sin 4\pi z}\,dz.$

15.8. $\oint\limits_{|z|=0,1} \frac{\mathrm{ch}\,z - \cos 3z}{z^2 \sin 5\pi z}\,dz.$

15.9. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{sh}\,3z - \sin 3z}{z^3\,\mathrm{sh}\,2z}\,dz.$

15.10. $\oint\limits_{|z|=0,05} \frac{e^{4z} - 1 - \sin 4z}{z^3\,\mathrm{sh}\,16\pi z}\,dz.$

15.11. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{6z - \sin 6z}{z^2\,\mathrm{sh}^2\,2z}\,dz.$

15.12. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 4z - 1 + 8z^2}{z^4\,\mathrm{sh}\,\frac{4z}{3}}\,dz.$

15.13. $\oint\limits_{|z|=6} \frac{\mathrm{sh}\,\pi z - \pi z}{z^2 \sin^2\frac{\pi z}{6}}\,dz.$

15.14. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{ch}\,4z - 8z^2 - 1}{z^3 \sin\frac{8z}{3}}\,dz.$

15.15. $\oint\limits_{|z|=0,9} \frac{e^{3z} - 1 - 3z}{\mathrm{sh}^2\,\pi z}\,dz.$

15.16. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{6z} - \cos 8z}{z\,\mathrm{sh}\,4z.}\,dz.$

15.17. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{iz} - \mathrm{ch}\,5z}{z \sin 2iz}\,dz.$

15.18. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{\mathrm{ch}\,3z - \cos 4iz}{z^2 \sin 5z}\,dz.$

15.19. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{sh}\,3z - \sin 3z}{z^3\,\mathrm{sh} - iz}\,dz.$

15.20. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{5z} - 1 - \sin 5z}{z^2\,\mathrm{sh}\,5z}\,dz.$

15.21. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin 3z-3z}{z^3 \operatorname{sh}^2 iz}\,dz.$

15.22. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 2z-1+2z^2}{z^4 \operatorname{sh}\frac{\pi z}{3}}\,dz.$

15.23. $\oint\limits_{|z|=5} \frac{\operatorname{sh} 2z-2z}{z^2 \sin^2\frac{z}{3}}\,dz.$

15.24. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch} 2z-1-2z^2}{z^4 \sin\frac{2\pi z}{3}}\,dz.$

15.25. $\oint\limits_{|z|=0,4} \frac{e^{2z}-1-2z}{z \operatorname{sh}^2 2\pi z}\,dz.$

15.26. $\oint\limits_{|z|=0,3} \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2 \operatorname{sh} 8iz}\,dz.$

15.27. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{5z}-\operatorname{ch} 6z}{z \sin \pi z}\,dz.$

15.28. $\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{\operatorname{ch} 2z-\cos 2z}{z^2 \sin 8z}\,dz.$

15.29. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\operatorname{sh} iz-\sin iz}{z^3 \operatorname{sh}\frac{z}{3}}\,dz.$

15.30. $\oint\limits_{|z|=0,3} \frac{e^{3z}-1-\sin 3z}{z^2 \operatorname{sh} 3\pi z}\,dz.$

15.31. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{2z}-\cos 9z}{z \operatorname{sh} \pi iz}\,dz.$

Задача 16. Вычислить интеграл (см. п. 1.7; 1.8).

16.1. $\oint\limits_{|z+i|=3} \left(\frac{4 \sin \frac{\pi z}{4-2i}}{(z-2+i)^2 (z-4+i)} + \frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i} \right) dz.$

16.2. $\oint\limits_{|z+6|=2} \left(z e^{\frac{1}{z+6}} + \frac{2 \cos \pi z/5}{(z+5)^2 (z+3)} \right) dz.$

16.3. $\oint\limits_{|z-i|=3} \left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i} - \frac{2 \operatorname{sh} \frac{\pi i z}{4+2i}}{(z-2-i)^2 (z-4-i)} \right) dz.$

16.4. $\oint\limits_{|z+2|=2} \left(z \operatorname{ch} \frac{1}{z+2} - \frac{2 \sin (\pi z/2)}{(z+1)^2 (z-1)} \right) dz.$

16.5. $\oint\limits_{|z-2i|=2} \left(\frac{2 \cos \frac{\pi z}{2+2i}}{(z-2-2i)^2 (z-4-2i)} + \frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1} \right) dz.$

16.6. $\oint\limits_{|z+3|=2} \left(z \operatorname{sh} \frac{i}{z+3} - \frac{4 \operatorname{sh} (\pi i z/4)}{(z+2)^2 z} \right) dz.$

16.7. $\oint\limits_{|z+5i|=2} \left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i} + \frac{8 \operatorname{ch} \frac{\pi i z}{1-5i}}{(z-1+5i)^2 (z-3+5i)} \right) dz.$

16.8. $\oint\limits_{|z+4|=2} \left(z \cos \frac{1}{z+4} + \frac{2 \sin (\pi z/6)}{(z+3)^2 (z+1)} \right) dz.$

16.9. $$\oint\limits_{|z-7i|=2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi iz}{2+14i}}{(z-1-7i)^2(z-3-7i)}+\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz.$$

16.10. $$\oint\limits_{|z+5|=2}\left(z\sin\frac{1}{z+5}+\frac{2\operatorname{ch}(\pi iz/4)}{(z+4)^2(z+2)}\right)dz.$$

16.11. $$\oint\limits_{|z-3i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}+\frac{2\cos\frac{\pi z}{1+3i}}{(z-1-3i)^2(z-3-3i)}\right)dz.$$

16.12. $$\oint\limits_{|z-1|=2}\left(ze^{\frac{2}{z-1}}+\frac{2\cos\pi z/2}{(z-2)^2(z-4)}\right)dz.$$

16.13. $$\oint\limits_{|z+i|=2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)}-\frac{3\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz.$$

16.14. $$\oint\limits_{|z-2|=2}\left(z\operatorname{ch}\frac{3}{z-2}+\frac{2\cos\pi z/3}{(z-3)^2(z-5)}\right)dz.$$

16.15. $$\oint\limits_{|z+7i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}-\frac{8\operatorname{ch}\frac{\pi iz}{1-7i}}{(z-1+7i)^2(z-3+7i)}\right)dz.$$

16.16. $$\oint\limits_{|z-3|=2}\left(z\operatorname{sh}\frac{1}{z-3}-\frac{2\sin\pi z/8}{(z-4)^2(z-6)}\right)dz.$$

16.17. $$\oint\limits_{|z+3i|=2}\left(\frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{2-6i}}{(z-1+3i)^2(z-3+3i)}-\frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i}\right)dz.$$

16.18. $$\oint\limits_{|z-4|=2}\left(z\cos\frac{1}{z-4}+\frac{10\operatorname{ch}\pi iz/5}{(z-5)^2(z-7)}\right)dz.$$

16.19. $$\oint\limits_{|z-5i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}+\frac{2\cos\frac{\pi z}{1+5i}}{(z-1-5i)^2(z-3-5i)}\right)dz.$$

16.20. $$\oint\limits_{|z-5|=2}\left(z\sin\frac{i}{z-5}+\frac{2\operatorname{sh}\pi iz/12}{(z-6)^2(z-8)}\right)dz.$$

16.21. $$\oint\limits_{|z-i|=2}\left(\frac{4\sin\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-1-i)^2(z-3-i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}\right)dz.$$

16.22. $$\oint\limits_{|z-6|=2}\left(ze^{\frac{1}{z-6}}-\frac{2\operatorname{ch}\pi iz/5}{(z-5)^2(z-3)}\right)dz.$$

16.23. $$\oint\limits_{|z-6i|=2}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}-\frac{2\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi i z}{1+6i}}{(z-1-6i)^2\,(z-3-6i)}\right)dz.$$

16.24. $$\oint\limits_{|z-5|=2}\left(z\,\mathrm{ch}\,\frac{2}{z-5}+\frac{4\cos \pi z/4}{(z-4)^2\,(z-2)}\right)dz.$$

16.25. $$\oint\limits_{|z+6i|=2}\left(\frac{2\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi i z}{2-12i}}{(z-1+6i)^2\,(z-3+6i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz.$$

16.26. $$\oint\limits_{|z-4|=2}\left(z\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{z-4}+\frac{2\sin \pi z/6}{(z-3)^2\,(z-1)}\right)dz.$$

16.27. $$\oint\limits_{|z+2i|=2}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}+\frac{4\cos\frac{\pi z}{1-2i}}{(z-1+2i)^2\,(z-3+2i)}\right)dz.$$

16.28. $$\oint\limits_{|z-3|=2}\left(z\cos\frac{1}{z-3}+\frac{4\,\mathrm{ch}\,\pi i z/2}{z\,(z-2)^2}\right)dz.$$

16.29. $$\oint\limits_{|z-2i|=2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2\,(z-3-2i)}-\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz.$$

16.30. $$\oint\limits_{|z-2|=2}\left(z\sin\frac{i}{z-2}-\frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi i z/2}{(z-1)^2\,(z+1)}\right)dz.$$

16.31. $$\oint\limits_{|z+2i|=3}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}+\frac{6\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi i z}{2-2i}}{(z-2+2i)^2\,(z-4-2i)}\right)dz.$$

Задача 17. Вычислить интеграл (см. п. 1.7; 1.8; 1.11).

17.1. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2+\sqrt{3}\sin t}$. 17.2. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4+\sqrt{15}\sin t}$.

17.3. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5+2\sqrt{6}\sin t}$. 17.4. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{6+\sqrt{35}\sin t}$.

17.5. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{7+4\sqrt{3}\sin t}$. 17.6. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-4\sin t}$.

17.7. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-3\sin t}$. 17.8. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{8-3\sqrt{7}\sin t}$.

17.9. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{9-4\sqrt{5}\sin t}$. 17.10. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4-\sqrt{7}\sin t}$.

17.11. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}$.

17.12. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3-2\sqrt{2}\sin t}$.

17.13. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4-2\sqrt{3}\sin t}$.

17.14. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{5-\sqrt{21}\sin t}$.

17.15. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{6-4\sqrt{2}\sin t}$.

17.16. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{8-2\sqrt{15}\sin t}$.

17.17. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{3}\sin t-2}$.

17.18. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{15}\sin t-4}$.

17.19. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{6}\sin t-5}$.

17.20. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{35}\sin t-6}$.

17.21. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{3}\sin t-7}$.

17.22. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sin t+5}$.

17.23. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3\sin t+5}$.

17.24. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3\sqrt{7}\sin t+8}$.

17.25. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{5}\sin t+9}$.

17.26. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{7}\sin t+4}$.

17.27. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5}\sin t+3}$.

17.28. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{2}\sin t+3}$.

17.29. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{3}\sin t+4}$.

17.30. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{21}\sin t+5}$.

17.31. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t+6}$.

Задача 18. Вычислить интеграл (см. п. 1.7; 1.8; 1.11).

18.1. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(1+\sqrt{10/11}\cos t)^2}$.

18.2. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+\cos t)^2}$.

18.3. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(1+\sqrt{6/7}\cos t)^2}$.

18.4. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(2\sqrt{3}+\sqrt{11}\cos t)^2}$.

18.5. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.6. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(4+\cos t)^2}$.

18.7. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(4+3\cos t)^2}$.

18.8. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.9. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+2\cos t)^2}$.

18.10. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(4+\sqrt{7}\cos t)^2}$.

18.11. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+\sqrt{5}\cos t)^2}$.

18.12. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+2\sqrt{2}\cos t)^2}$.

18.13. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\cos t)^2}$.

18.14. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{6}+\cos t)^2}$.

18.15. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{6}+\sqrt{5}\cos t)^2}$.

18.16. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{5}\cos t)^2}$.

18.17. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{2}+\cos t)^2}$.

18.18. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+2\cos t)^2}$.

18.19. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+\cos t)^2}$.

18.20. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{2}\cos t)^2}$.

18.21. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{3}+\cos t)^2}$.

18.22. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.23. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{13}+2\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.24. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2}$.

18.25. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+2\cos t)^2}$.

18.26. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2}$.

18.27. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{10}+3\cos t)^2}$.

18.28. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos t)^2}$.

18.29. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.30. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+\cos t)^2}$.

18.31. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos t)^2}$.

Задача 19. Вычислить интеграл (см. п. 1.7; 1.8; 1.9).

19.1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx$.

19.2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)^2}\,dx$.

19.3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2}$.

19.4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2 (x^2+16)}$.

19.5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-x+1)^2}$.

19.6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2}$.

19.7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+10x^2+9}$.

19.8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$.

19.9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+3)^2}$.

19.10. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)^2}$.

19.11. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)^2}$.

19.12. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$.

19.13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+4x+13)^2}\,dx$.

19.14. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+5)^2}\,dx$.

19.15. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2 (x^2+4)}$.

19.16. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6}\,dx$.

19.17. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$.

19.18. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2-10x+29)^2}\,dx$.

19.19. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2 (x^2+5)^2}$.

19.20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+7x^2+12}$.

19.21. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+9)^2}\,dx$.

19.22. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^5}$.

19.23. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^2 (x^2+10)^2}$.

19.24. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2}\,dx$.

19.25. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+10}{(x^2+4)^2}\,dx$.

19.26. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

19.27. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+3)^2 (x^2+15)^2}$.

19.28. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}\,dx$.

19.29. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-10x+29)^2}$.

19.30. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+11)^2}\,dx$.

19.31. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2 (x^2+16)}$.

Задача 20. Вычислить интеграл (см. п. 1.7; 1.8; 1.10).

20.1. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \sin 3x}{(x^2+4)^2}\,dx$.

20.2. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2}\,dx$.

20.3. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

20.4. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

20.5. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^4+5x^2+6}\,dx$.

20.6. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \frac{x}{2}\,dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

20.7. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+3)\cos 2x}{x^4+3x^2+2}\,dx$.

20.8. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3-2)\cos \frac{x}{2}}{(x^2+1)^2}\,dx$.

20.9. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-x)\sin x}{x^4+9x^2+20}\,dx$.

20.10. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2-2x+17}\,dx$.

20.11. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x - \sin x}{(x^2+4)^2}\,dx$.

20.12. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x\,dx}{(x^2+1)^2 (x^2+4)}$.

20.13. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+5x^2+4}\,dx$.

20.14. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\,dx$.

20.15. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

20.16. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}\,dx$.

20.17. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+1)^3}$.

20.18. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+16)(x^2+9)}$.

20.19. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x\,dx}{x^2-2x+10}$.

20.20. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x\,dx}{x^2-2x+10}$.

20.21. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \sin \frac{x}{2}}{x^2+4}\,dx$.

20.22. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2}\,dx$.

20.23. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x\,dx}{(x^2-x+1)^2}$.

20.24. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}\,dx$.

20.25. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x \, dx}{x^4+10x^2+9}$.

20.26. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+1)\cos x}{x^4+5x^2+4}\,dx$.

20.27. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+1)\sin x}{x^4+5x^2+4}\,dx$.

20.28. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x-\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

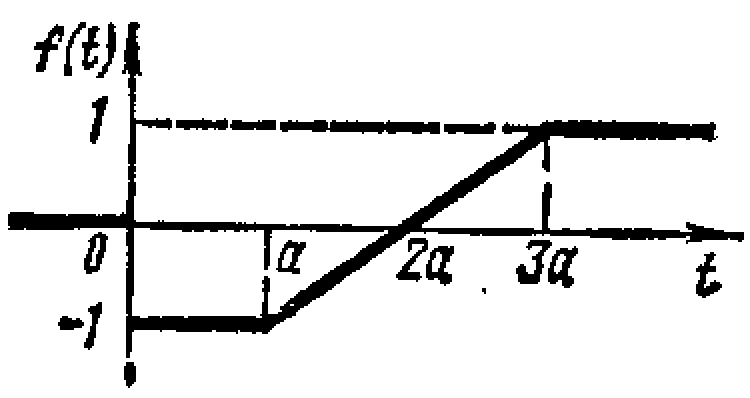
20.29. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+x)\sin x}{x^4+13x^2+36}\,dx$.

20.30. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+x)\cos x}{x^4+13x^2+36}\,dx$.

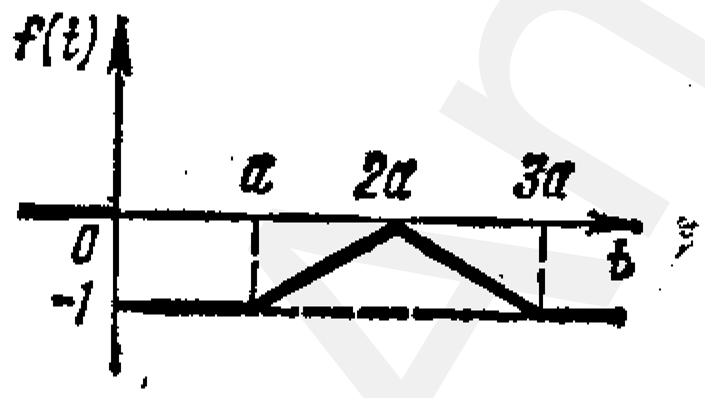
20.31. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x-\cos 2x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

Задача 21. По данному графику оригинала найти изображение (см. п. 1.12; 1.14).

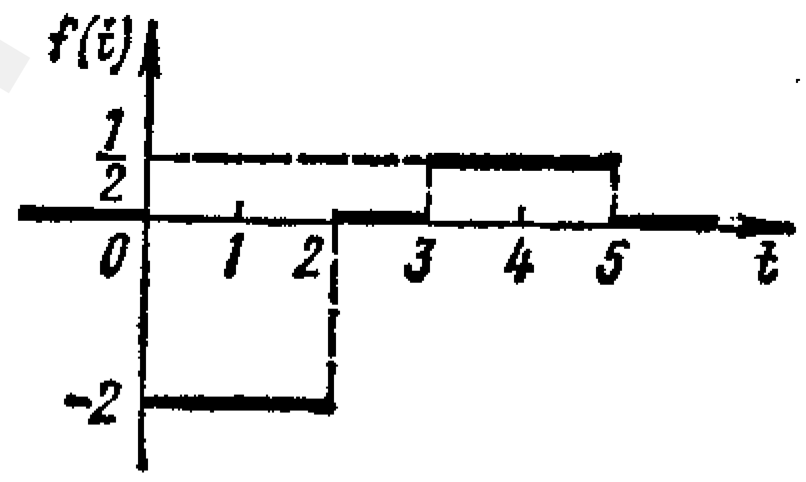
21.1.



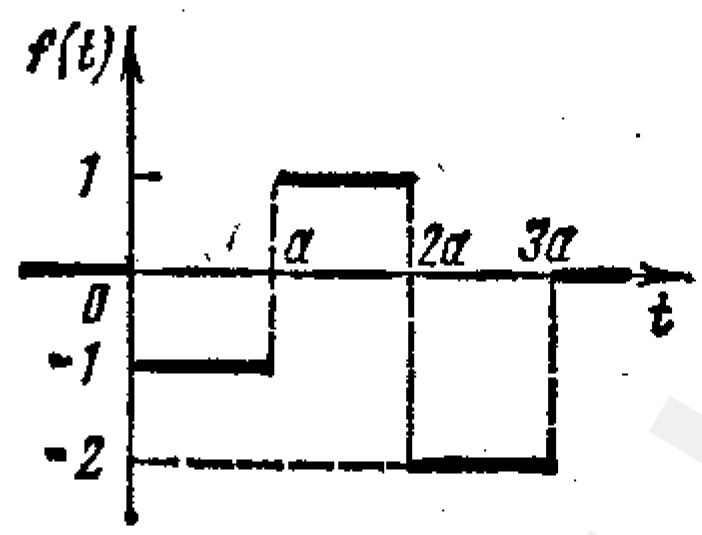
21.2.



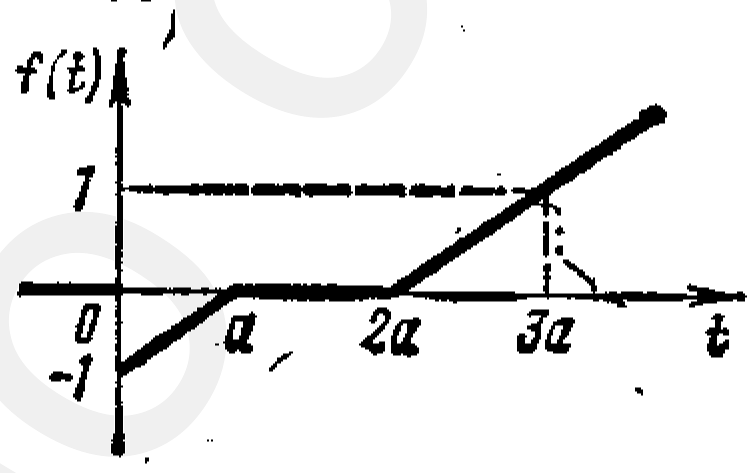
21.3.



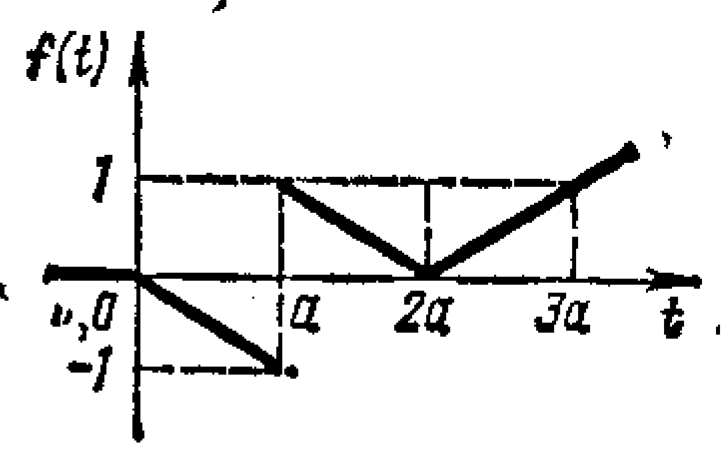
21.4.



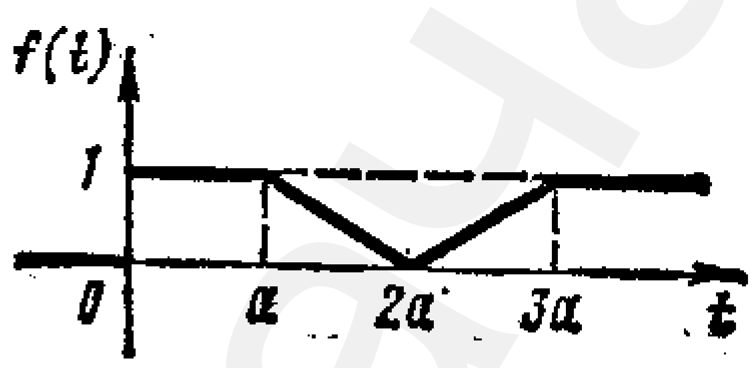
21.5.



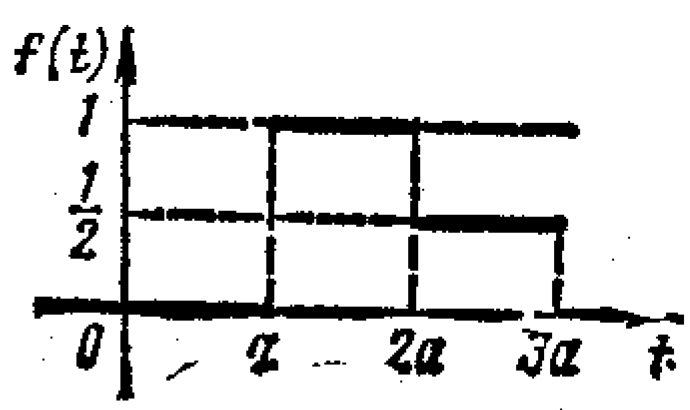
21.6.



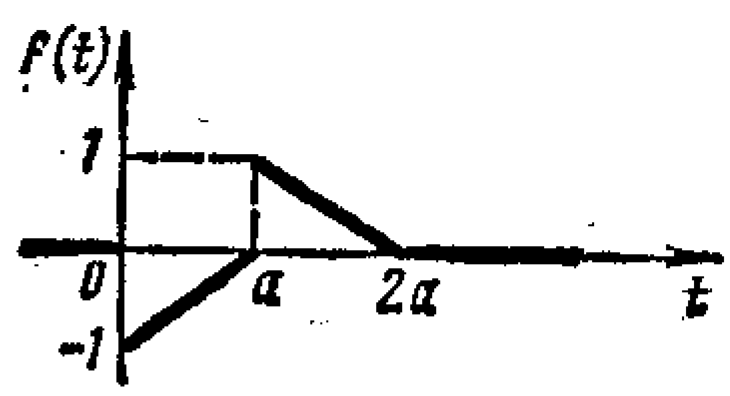
21.7.



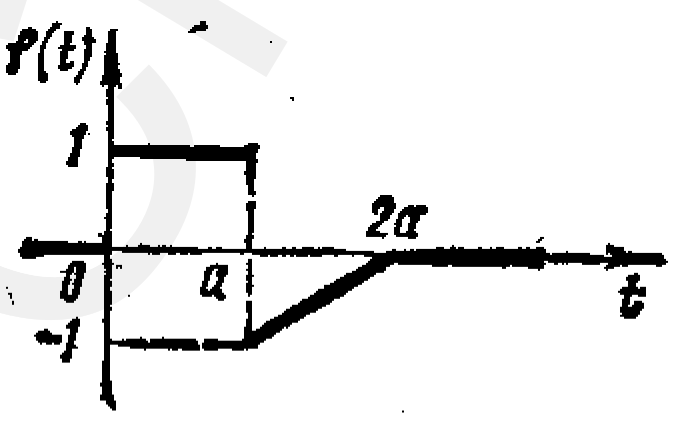
21.8.



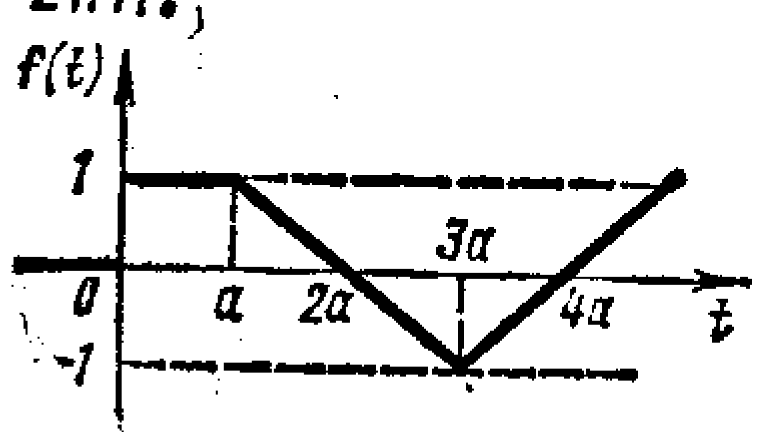
21.9.



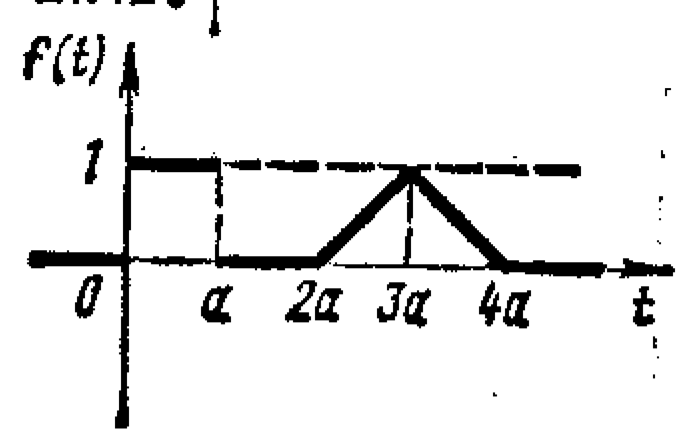
21.10.



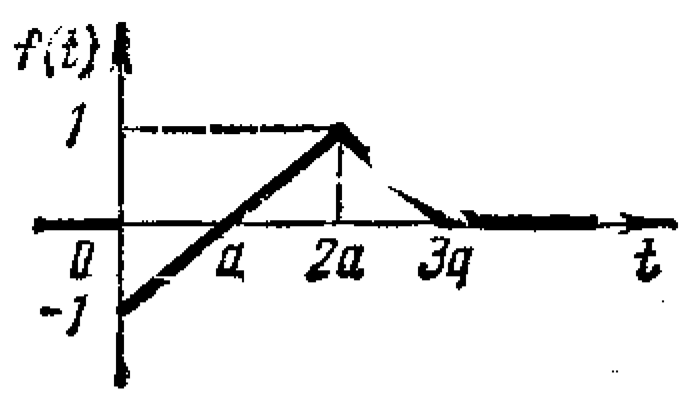
21.11.



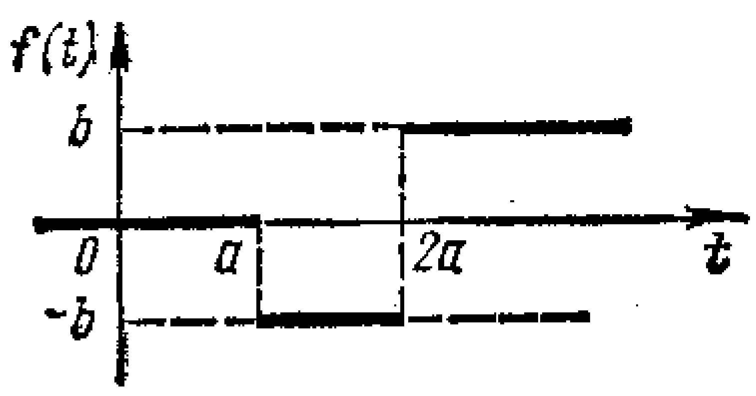
21.12.



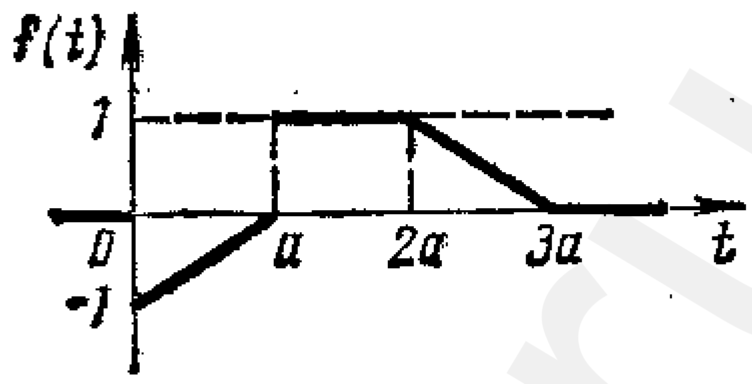
21.13.



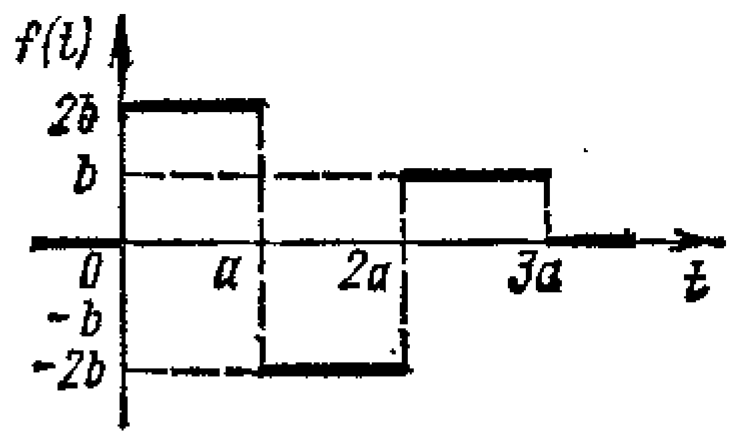
21.14.



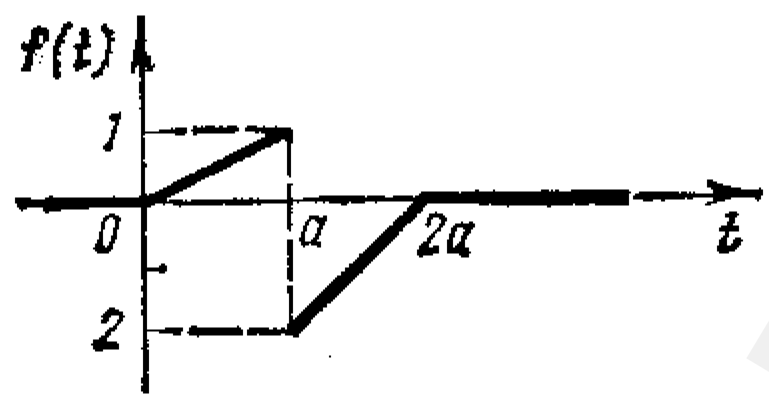
21.15.



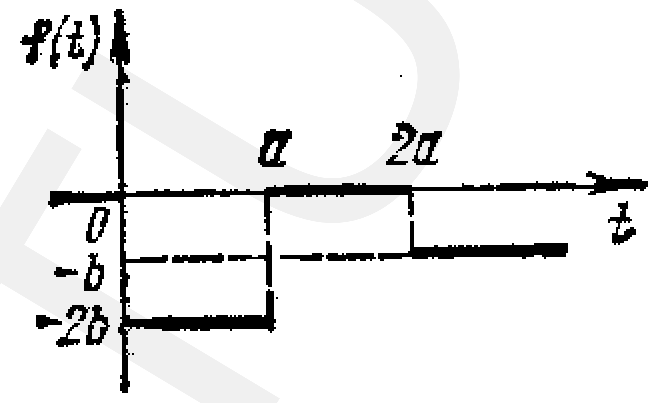
21.16.



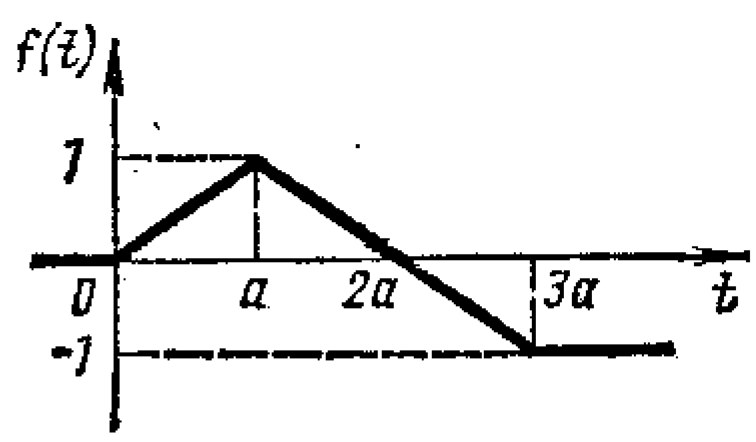
21.17.



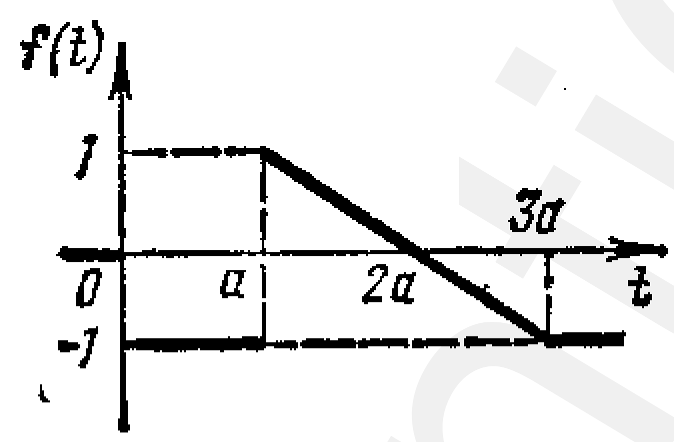
21.18.



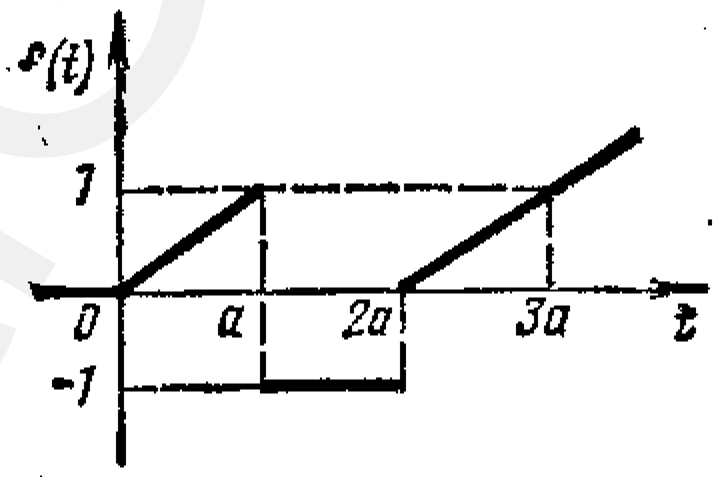
21.19.



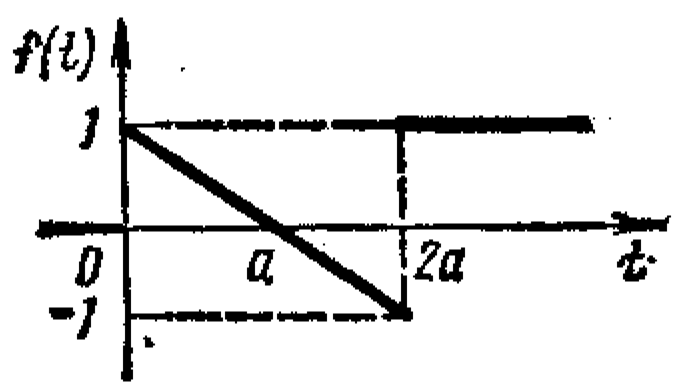
21.20.



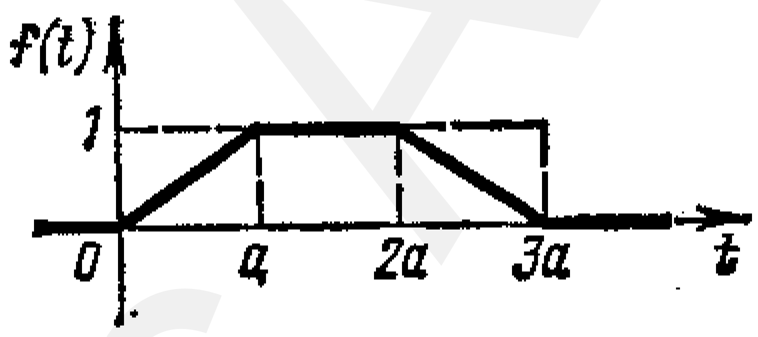
21.21.



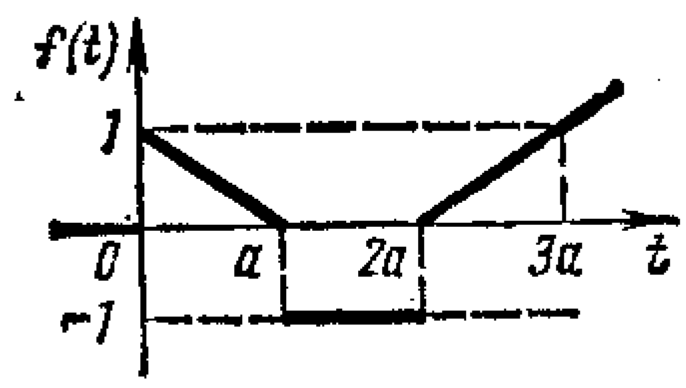
21.22.



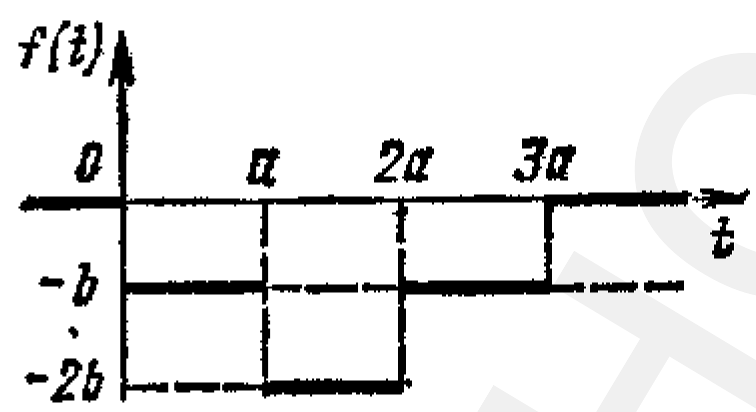
21.23.



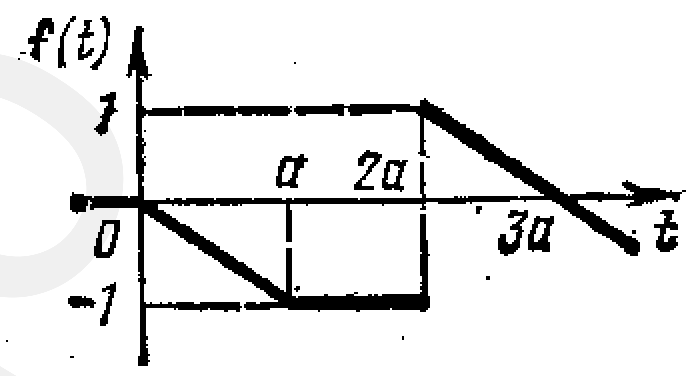
21.24.



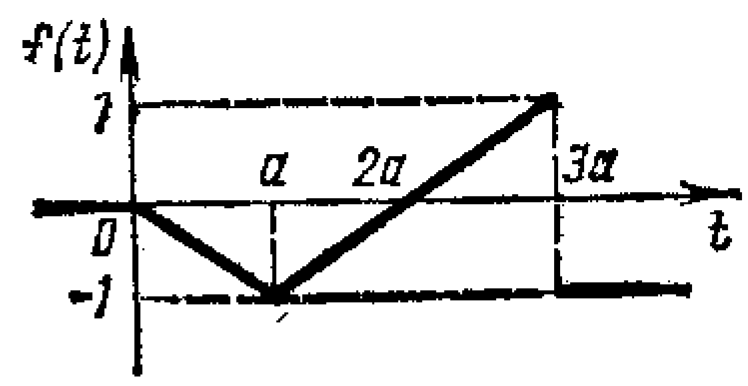
21.25.



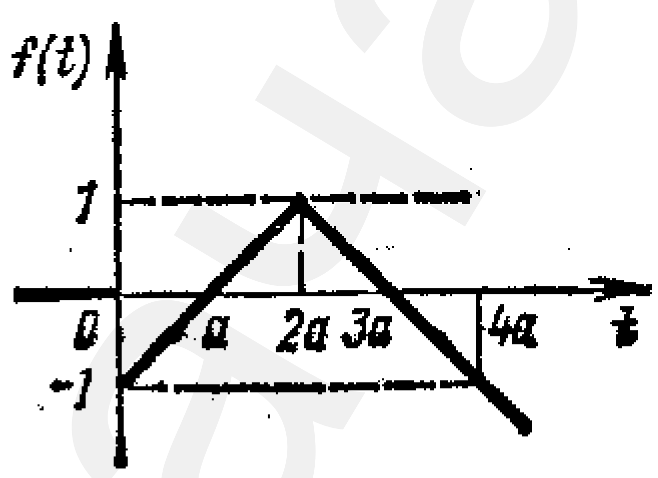
21.26.



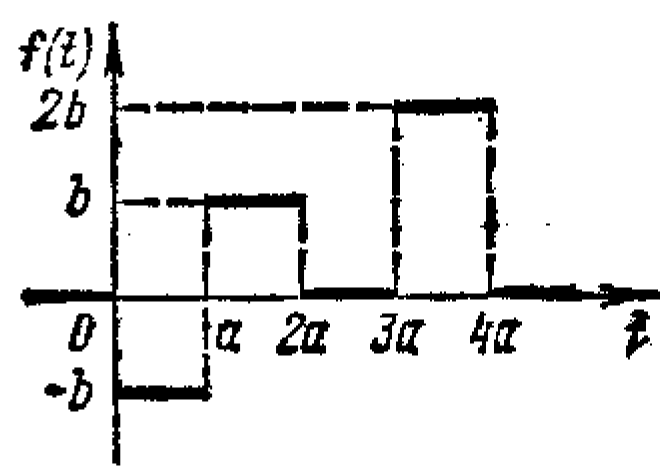
21.27



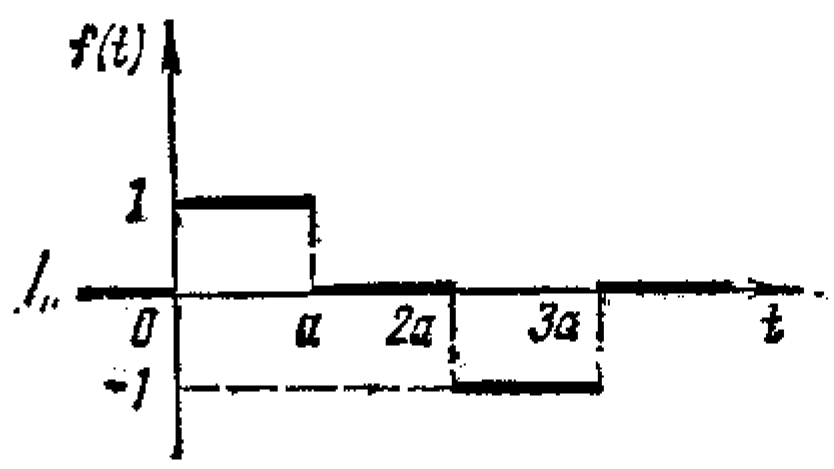
21.28.



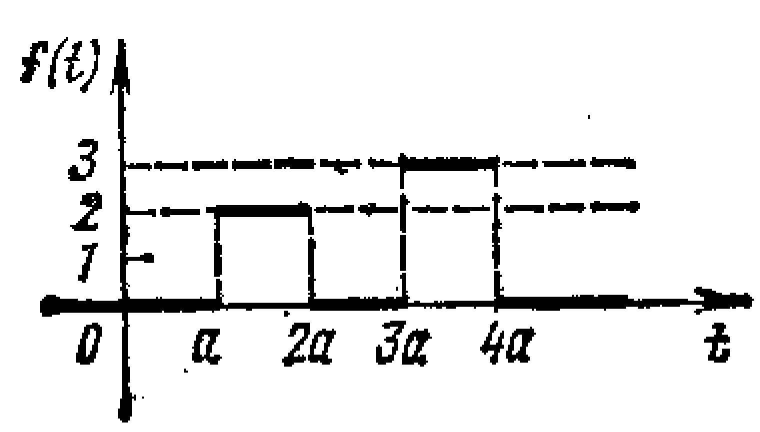
21.29.



21.30.



21.31.



Задача 22. Найти оригинал по заданному изображению (см. п. 1.12).

22.1. $\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$.

22.2. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}$.

22.3. $\dfrac{2p}{(p^2+4p+8)^2}$.

22.4. $\dfrac{1}{p(p^2+1)^2}$.

22.5. $\dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$.

22.6. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

22.7. $\dfrac{6}{p^3-8}$.

22.8. $\dfrac{4}{p^3+8}$.

22.9. $\dfrac{1}{p^5+p^3}$.

22.10. $\dfrac{p+4}{p^2+4p+5}$.

22.11. $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

22.12. $\dfrac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}$.

22.13. $\dfrac{1}{p^3+p^2+p}$.

22.14. $\dfrac{3p+2}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

22.15. $\dfrac{1}{p(p^3+1)}$.

22.16. $\dfrac{1}{p^3(p^2-4)}$.

22.17. $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}$.

22.18. $\dfrac{1}{p^3-1}$.

22.19. $\dfrac{e^{-p/2}}{(p^2+1)(p^2+2)}$.

22.20. $\dfrac{5}{(p-1)(p^2+4p+5)}$.

22.21. $\dfrac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)}$.

22.22. $\dfrac{1}{(p-2)(p^2+2p+3)}$.

22.23. $\dfrac{p}{(p^2+4p+8)^2}$.

22.24. $\dfrac{1-p}{p(p^2+3p+3)}$.

22.25. $\dfrac{2p+1}{(p+1)(p^2+2p+3)}$.

22.26. $\dfrac{2-3p}{(p-2)(p^2-4p+5)}$.

22.27. $\dfrac{2p+3}{(p-1)(p^2-p+1)}$.

22.28. $\dfrac{2-p}{p^3-2p^2+5p}$.

22.29. $\dfrac{2}{(p+1)(p^2+2p+2)}$.

22.30. $\dfrac{2-p}{(p-1)(p^2-4p+5)}$.

22.31. $\dfrac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$.

Задача 23. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее условиям $y(0)=0$, $y'(0)=0$ (см. п. 1.12; 1.15; 1.16).

23.1. $y''-y=\operatorname{th} t$.

23.2. $y''-y'=\dfrac{1}{1+e^t}$.

23.3. $y''-2y'+y=\dfrac{e^t}{1+t^2}$.

23.4. $y''-2y'+2y=2e^t\cos t$.

23.5. $y''-y=\operatorname{th}^2 t$.

23.6. $y''-y=\dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$.

23.7. $y''-y'=\dfrac{e^t}{1+e^t}$.

23.8. $y''-2y'+y=\dfrac{e^t}{t+1}$.

23.9. $y''+y'=\dfrac{e^{2t}}{3+e^t}$.

23.10. $y''-2y'=\dfrac{e^t}{\operatorname{ch} t}$.

23.11. $y''-y=\dfrac{1}{1+\operatorname{ch} t}$.

23.12. $y''+y'=\dfrac{1}{1+e^t}$.

23.13. $y''-4y'+4y=\dfrac{2e^{2t}}{\operatorname{ch}^2 2t}$.

23.14. $y''-4y=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^3 2t}$.

23.15. $y''-y=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$.

23.16. $y''+y'=\dfrac{e^t}{1+e^t}$.

23.17. $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-t}}{(t+1)^2}$.

23.18. $2y''-y'=\dfrac{e^t}{(1+e^{t/2})^2}$.

23.19. $y''-y=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^3 t}$.

23.20. $y''-y'=\dfrac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}$.

23.21. $y''+2y'+y=\dfrac{te^{-t}}{t+1}$.

23.22. $y''-y'=\dfrac{e^{2t}}{2+e^t}$.

23.23. $y''-y=\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}$.

23.24. $y''+y'=\dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}$.

23.25. $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-t}}{1+t^2}$.

23.26. $y''-2y'+y=\dfrac{e^t}{\operatorname{ch}^2 t}$.

23.27. $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-t}}{\operatorname{ch}^2 t}$.

23.28. $y''-4y=\operatorname{th}^2 2t$.

23.29. $y''+2y'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$.

23.30. $y''+y'=\dfrac{1}{(1+e^t)^2}$.

23.31. $y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}$.

Задача 24. Операционным методом решить задачу Коши (см. п. 1.12; 1.15).

24.1. $y''+y=6e^{-t}$, $y(0)=3$, $y'(0)=1$.

24.2. $y''-y'=t^2$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

24.3. $y''+y'=t^2+2t$, $y(0)=0$, $y'(0)=-2$.

24.4. $y''-y=\cos 3t$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

24.5. $y''+y'+y=7e^{2t}$, $y(0)=1$, $y'(0)=4$.

24.6. $y''+y'-2y=-2(t+1)$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

24.7. $y''-9y=\sin t-\cos t$, $y(0)=-3$, $y'(0)=2$.

24.8. $y''+2y'=2+e^t$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

24.9. $2y''-y'=\sin 3t$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$.

24.10. $y''+2y'=\sin t/2$, $y(0)=-2$, $y'(0)=4$.

24.11. $y''+y=\operatorname{sh} t$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$.

24.12. $y''+4y'+29y=e^{-2t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

24.13. $y''-3y'+2y=e^t$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

24.14. $2y''+3y'+y=3e^t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

24.15. $y'' - 2y' - 3y = 2t,$
$y(0) = 1, \ y'(0) = 1.$

24.16. $y'' + 4y = \sin 2t,$
$y(0) = 0, \ y'(0) = 1.$

24.17. $2y'' + 5y' = 29 \cos t,$
$y(0) = -1, \ y'(0) = 0.$

24.18. $y'' + y' + y = t^2 + t,$
$y(0) = 1, \ y'(0) = -3.$

24.19. $y'' + 4y = 8 \sin 2t,$
$y(0) = 3, \ y'(0) = -1.$

24.20. $y'' - y' - 6y = 2,$
$y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$

24.21. $y'' + 4y = 4e^{2t} + 4t^2,$
$y(0) = 1, \ y'(0) = 2.$

24.22. $y'' + 4y' + 4y = t^3 e^{2t},$
$y(0) = 1, \ y'(0) = 2.$

24.23. $y'' - 3y'' + 2y = 12e^{3t},$
$y(0) = 2, \ y'(0) = 6.$

24.24 $y'' + 4y = 3 \sin t + 10 \cos 3t,$
$y(0) = -2, \ y'(0) = 3.$

24.25. $y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t} \cos 3t,$
$y(0) = 5, \ y'(0) = 1.$

24.26. $y'' + 3y' - 10y = 47 \cos 3t - \sin 3t,$
$y(0) = 3, \ y'(0) = -1.$

24.27. $y'' + y' - 2y = e^{-t},$
$y(0) = -1, \ y'(0) = 0.$

24.28. $y'' - 2y' = e^t (t^2 + t - 3),$
$y(0) = 2, \ y'(0) = 2.$

24.29. $y'' + y = 2 \cos t,$
$y(0) = 0, \ y'(0) = 1.$

24.30. $y'' - y = 4 \sin t + 5 \cos 2t,$
$y(0) = -1, \ y'(0) = -2.$

24.31. $y'' - 3y' + 2y = 2e^t \cos \dfrac{t}{2},$

$y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$

Задача 25. (см. п. 1.12; 1.15).

Варианты 1—8

Частица массы m движется прямолинейно под действием восстанавливающей силы $F = -kx$, пропорциональной смещению x и направленной в противоположную сторону, и силы сопротивления $R = rv$. В момент $t = 0$ частица находится на расстоянии x_0 от положения равновесия и обладает скоростью v_0. Найти закон движения $x = x(t)$ частицы.

25.1. $k = m, \ r = 2m, \ x_0 = 1$ м, $v_0 = 0.$
25.2. $k = m, \ r = 2m, \ x_0 = 1$ м, $v_0 = 1$ м/с.
25.3. $k = 5m, \ r = 2m, \ x_0 = 1$ м, $v_0 = 0.$
25.4. $k = 5m, \ r = 2m, \ x_0 = 1$ м, $v_0 = 1$ м/с.
25.5. $k = 5m, \ r = 4m, \ x_0 = 2$ м, $v_0 = 1$ м/с.
25.6. $k = 5m, \ r = 4m, \ x_0 = 1$ м, $v_0 = 0.$
25.7. $k = 3m, \ r = 2m, \ x_0 = 1$ м, $v_0 = 0.$
25.8. $k = 3m, \ r = 2m, \ x_0 = 1$ м, $v_0 = 1$ м/с.

Варианты 9—16

Материальная точка массы m движется прямолинейно, отталкиваясь от начала координат с силой $F = kx$, пропорциональной расстоянию. На точку действует сила сопротивления среды $R = rv$, пропорциональная скорости v. При $t = 0$ расстояние точки от начала координат x_0, а скорость v_0. Найти закон движения $x = x(t)$ материальной точки.

25.9. $k=2m$, $r=m$, $x_0=1$ м, $v_0=0$.

25.10. $k=2m$, $r=m$, $x_0=1$ м, $v_0=1$ м/с.

25.11. $k=3m$, $r=2m$, $x_0=1$ м, $v_0=1$ м/с.

25.12. $k=3m$, $r=2m$, $x_0=1$ м, $v_0=2$ м/с.

25.13. $k=4m$, $r=3m$, $x_0=2$ м, $v_0=0$.

25.14. $k=4m$, $r=3m$, $x_0=1$ м, $v_0=1$ м/с.

25.15. $k=5m$, $r=4m$, $x_0=1$ м, $v_0=1$ м/с.

25.16. $k=5m$, $r=4m$, $x_0=1$ м, $v_0=2$м/с.

Варианты 17—24

Материальная точка массы m совершает прямолинейное колебание по оси Ox под действием восстанавливающей силы $F=-kx$, пропорциональной расстоянию x от начала координат и направленной к началу координат, и возмущающей силы $f=A\cos t$. Найти закон движения $x=x(t)$ точки, если в начальный момент времени $x(0)=x_0$, $v(0)=v_0$.

25.17. $k=m$, $A=2m$, $x_0=0$, $v_0=0$.

25.18. $k=m$, $A=m$, $x_0=0$, $v_0=1$ м/с.

25.19. $k=m$, $A=2m$, $x_0=1$ м, $v_0=0$.

25.20. $k=m$, $A=m$, $x_0=1$ м, $v_0=0{,}5$ м/с.

25.21. $k=9m$, $A=8m$, $x_0=1$ м, $v_0=0$.

25.22. $k=9m$, $A=4m$, $x_0=0$, $v_0=0$.

25.23. $k=9m$, $A=8m$, $x_0=0$, $v_0=3$ м/с.

25.24. $k=9m$, $A=m$, $x_0=1/8$ м, $v_0=3$м/с.

Варианты 25—31

На материальную точку массы m действует сила сопротивления $R=kv$, пропорциональная скорости v. Какое расстояние пройдет точка за неограниченное время, если ей сообщена начальная скорость v_0?

25.25. $k=2m$, $v_0=10$ м/с. 25.26. $k=\frac{m}{3}$, $v_0=5$ м/с.

25.27. $k=3m$, $v_0=6$ м/с. 25.28. $k=m$, $v_0=7$ м/с.

25.29. $k=m/2$, $v_0=6$ м/с. 25.30. $k=0{,}1m$, $v_0=1$ м/с.

25.31. $k=10m$, $v_0=1$ м/с.

Задача 26. Решить систему дифференциальных уравнений (см. п. 1.12; 1.15).

26.1. $\begin{cases} \dot{x}=x+3y+2, \\ \dot{y}=x-y+1; \end{cases}$ $x(0)=-1$, $y(0)=2$.

26.2. $\begin{cases} \dot{x}=-x+3y+1, \\ \dot{y}=x+y; \end{cases}$ $x(0)=1$, $y(0)=2$.

26.3. $\begin{cases} \dot{x}=x+4y, \\ \dot{y}=2x-y+9; \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0.$

26.4. $\begin{cases} \dot{x}=x+2y+1, \\ \dot{y}=4x-y; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1.$

26.5. $\begin{cases} \dot{x}=2x+5y, \\ \dot{y}=x-2y+2; \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=1.$

26.6. $\begin{cases} \dot{x}=-2x+5y+1, \\ \dot{y}=x+2y+1; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=2.$

26.7. $\begin{cases} \dot{x}=3x+y, \\ \dot{y}=-5x-3y+2; \end{cases}$ $x(0)=2,\ y(0)=0.$

26.8. $\begin{cases} \dot{x}=-3x-4y+1, \\ \dot{y}=2x+3y; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=2.$

26.9. $\begin{cases} \dot{x}=-2x+6y+1, \\ \dot{y}=2x+2 \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1.$

26.10. $\begin{cases} \dot{x}=2x+3y+1, \\ \dot{y}=4x-2y; \end{cases}$ $x(0)=-1,\ y(0)=0$

26.11. $\begin{cases} \dot{x}=x+2y, \\ \dot{y}=2x+y+1; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=5.$

26.12. $\begin{cases} \dot{x}=2x-2y, \\ \dot{y}=-4x; \end{cases}$ $x(0)=3,\ y(0)=1.$

26.13. $\begin{cases} \dot{x}=-x-2y+1, \\ \dot{y}=-\dfrac{3}{2}x+y; \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0.$

26.14. $\begin{cases} \dot{x}=3x+5y+2, \\ \dot{y}=3x+y+1; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=2.$

26.15. $\begin{cases} \dot{x}=3x+2y, \\ \dot{y}=\dfrac{5}{2}x-y+2; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1.$

26.16. $\begin{cases} \dot{x}=2y+1, \\ \dot{y}=2x+3; \end{cases}$ $x(0)=-1,\ y(0)=0.$

26.17. $\begin{cases} \dot{x}=2x+8y+1, \\ \dot{y}=3x+4y; \end{cases}$ $x(0)=2,\ y(0)=1.$

26.18. $\begin{cases} \dot{x}=2x+2y+2, \\ \dot{y}=4y+1; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1.$

26.19. $\begin{cases} \dot{x}=x+y, \\ \dot{y}=4x+y+1; \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0.$

26.20. $\begin{cases} \dot{x}=x-2y+1, \\ \dot{y}=-3x; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1.$

26.21. $\begin{cases} \dot{x}=3y+2, \\ \dot{y}=x+2y; \end{cases}$ $x(0)=-1,\ y(0)=1.$

26.22. $\begin{cases} \dot{x}=x+4y+1, \\ \dot{y}=2x+3y; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1.$

26.23. $\begin{cases} \dot{x}=2y, \\ \dot{y}=2x+3y+1; \end{cases}$ $x(0)=2,\ y(0)=1.$

26.24. $\begin{cases} \dot{x}=-2x+y+2, \\ \dot{y}=3x; \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0.$

26.25. $\begin{cases} \dot{x}=4x+3, \\ \dot{y}=x+2y; \end{cases}$ $x(0)=-1,\ y(0)=0.$

26.26. $\begin{cases} \dot{x}=y+3, \\ \dot{y}=x+2; \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0.$

26.27. $\begin{cases} \dot{x}=x+3y+3, \\ \dot{y}=x-y+1; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1.$

26.28. $\begin{cases} \dot{x}=-x+3y+2, \\ \dot{y}=x+y+1; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1.$

26.29. $\begin{cases} \dot{x}=3y, \\ \dot{y}=3x+1; \end{cases}$ $x(0)=2,\ y(0)=0.$

26.30. $\begin{cases} \dot{x}=x+3y, \\ \dot{y}=x-y; \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0.$

26.31. $\begin{cases} \dot{x}=-2x+y, \\ \dot{y}=3x; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1.$

Задача 27. Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

27.1. $w = e^z$; прямые $x = C$, $y = C$.

27.2. $w = e^z$; полоса $\alpha < y < \beta$, $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi$.

27.3. $w = e^z$; прямые $y = kx + b$.

27.4. $w = e^z$; полоса между $y = x$ и $y = x + 2\pi$.

27.5. $w = e^z$; полуполоса $x < 0$, $0 < y < \alpha \leqslant 2\pi$.

27.6. $w = e^z$; полуполоса $x > 0$, $0 < y < \alpha \leqslant 2\pi$.

27.7. $w = \dfrac{1 - z}{1 + z}$; область $D: \{|z| < 1, \ \operatorname{Im} z > 0\}$.

27.8. $w = \ln z$; полярная сетка $|z| = R$, $\arg z = \theta$.

27.9. $w = \ln z$; угол $0 < \arg z < \alpha \leqslant 2\pi$.

27.10. $w = \ln z$; сектор $|z| < 1$, $0 < \arg z < \alpha \leqslant 2\pi$.

27.11. $w = \ln z$; кольцо $r_1 < |z| < r_2$ с разрезом по отрезку $[r_1, r_2]$.

27.12. $w = \cos z$; прямоугольная сетка $x = C$, $y = C$.

27.13. $w = \cos z$; полуполоса $0 < x < \pi$, $y < 0$.

27.14. $w = \cos z$; полуполоса $0 < x < \pi/2$, $y > 0$.

27.15. $w = \cos z$; полуполоса $-\pi/2 < x < \pi/2$, $y > 0$.

27.16. $w = \cos z$; полоса $0 < x < \pi$.

27.17. $w = \cos z$; прямоугольник $0 < x < \pi$, $-h < y < h$, $h > 0$.

27.18. $w = \arcsin z$; верхняя полуплоскость.

27.19. $w = \arcsin z$; первый квадрант.

27.20. $w = \operatorname{ch} z$; прямоугольная сетка $x = C$, $y = C$.

27.21. $w = \operatorname{ch} z$; полоса $0 < y < \pi$.

27.22. $w = \operatorname{ch} z$; полуполоса $x > 0$, $0 < y < \pi$.

27.23. $w = \operatorname{Arsh} z$ первый квадрант.

27.24. $w = \operatorname{tg} z$; полуполоса $0 < x < \pi$, $y > 0$.

27.25. $w = \operatorname{tg} z$; полоса $0 < x < \pi$.

27.26. $w = \operatorname{tg} z$; полоса $0 < x < \pi/4$.

27.27. $w = \operatorname{tg} z$; полоса $-\pi/4 < x < \pi/4$.

27.28. $w = \operatorname{cth} z$; полуполоса $0 < y < \pi$ $x > 0$.

27.29. $w = \operatorname{cth} z$; полоса $0 < y < \pi$.

27.30. $w = \dfrac{z - 3 + i}{z + 1 + i}$; полуплоскость $\operatorname{Re} z < 1$.

27.31. $w = \dfrac{2}{z - 1}$; область $D: \{1 < |z| < 2\}$.