Содержание

Основные понятия теории управления. Управление и информатика.

Теории управлении техническими системами (ТУ ТС), или традиционная теория автоматического управления (ТАУ), - научная дисциплина, предметом изучения которой являются информационные процессы, протекающие в системах управления техническими и технологическими объектами.

ТУ ТС при изучении процессов управления абстрагируется от физических и конструктивных особенностей систем н вместо реальных систем рассматривает их адекватные математические модели. Основными методами исследования в ТУ ТС являются математическое моделирование, теория обыкновенных дифференциальных уравнений, операционное исчисление и гармонический анализ. Охарактеризуем кратко каждый из них.

Метод математического моделировании, можно схематично определить графическим изображением простого объекта, имеющего один входной сигнал *x(t)* и один выходной сигнал *y(i),* в виде прямоугольника (рис. В. 1,я). Символ *А* внутри прямоугольника означает некоторый математический оператор (функцию, интеграл и т.п), который связывает входной и выходной сигналы, меняющиеся во времени.

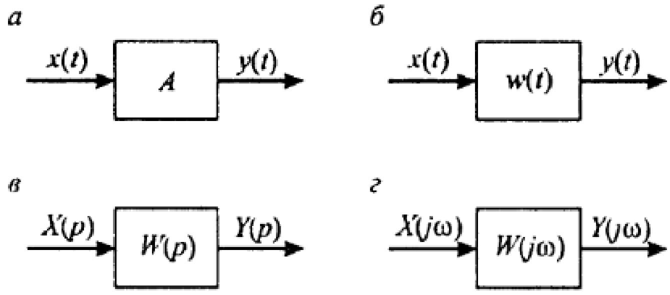


Рис. В.1. Схематичное представление математических методов, используемых в ТУ ТС

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, акцентирующая свое внимание на физические аспекты и приложения получаемых решений, служит главной методологической основой ТУ ТС, а сами обыкновенные дифференциальные уравнения наиболее обшей и полной формой математического описания систем управления. Дифференциальные уравнения связывают меняющиеся во времени входные и выходные переменные и их производные. В простейшем случае дифференциальное уравнение имеет вид:

$$dy(t)/dt = f\left[x(t), y(t)\right]. \qquad \text{(В.3)}$$

Из дифференциального уравнения получают его общее решение и так называемую импульсную переходную функцию *w(t).*

Метод операционного исчисления, в основе которого лежит преобразование Лапласа

$$W(p) = Y(p)/X(p). \qquad (В.6)$$

позволяет алгебраизировать дифференциальные уравнения - перейти к так называемым операторным уравнениям, связывающим изображения *X(p)* и *Y(p)* входного и выходного сигналов через передаточную функцию *W(p)*

Сама передаточная функция связана с импульсной переходной также преобразованием Лапласа:

$$W(p) = \int_0^\infty w(t) e^{-pt} dt. \qquad (В.7)$$

Метод гармонического анализа основан на известном из курса математики преобразовании Фурье, имеющем вид

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \qquad (В.8)$$

С помощью преобразования Фурье (В.8) находят изображения

X(jω) и Y(jω) входного и выходного сигналов *x(t)* и *y(t),* характеризующие частотные спектры этих сигналов. Изображения сигналов по Фурье связаны (рис. В.2,г) частотной передаточной функцией

$$W(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega), \qquad (В.9)$$

которая также является изображением функции времени *w(t)* по Фурье:

$$W(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) e^{-j\omega t} dt. \qquad (В.10)$$

ТУ ТС (или традиционная ТАУ) вместе с теорией построения и функционирования элементов систем управления (датчиков, регуляторов, исполнительных устройств) образует более широкую отрасль науки - *автоматику (от* греческого слова «аутоматос» - самодвижущийся). Автоматика в свою очередь является одним из разделов технической кибернетики.

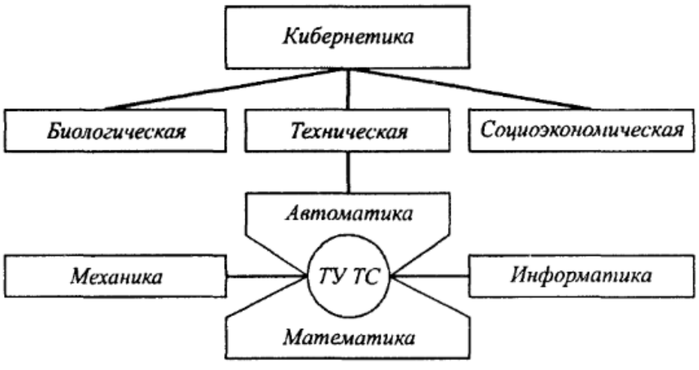


Рис. В.3. Связь ТУ ТС с другими науками

Одним из исходных, базовых понятий теории управления является понятие «система». *Система* - это множество связанных друг с другом элементов, образующее определенную целостность При этом целостность определяется тем, что связи элементов системы между собой проявляются сильнее, чем их связи с другими элементами, с окружающей средой. Системы можно классифицировать по различным признакам (основаниям). При наиболее общем подходе все системы можно разделить на абстрактные и материальные

Абстрактные системы являются продуктом человеческого мышления К ним относятся, например, различные научные теории, гипотезы, методы, системы математических уравнений.

Материальные системы, представляющие собой целостные совокупности материальных объектов.

По характеру взаимодействия с внешней окружающей средой материальные системы делятся на закрытые (замкнутые) и открытые (незамкнутые) В открытой системе постоянно происходят ввод и вывод энергии и/или вещества.

Открытую систему, находящуюся в динамическом равновесии, в теории управления называют *динамической системой.*

Техническая система (ТС) - совокупность машин и аппаратов, осуществляющих преобразование, транспортирование и накопление энергии, вещества или информации Примерами ТС являются генератор электрической энергии, химический реактор, компьютер (рис 1 1)

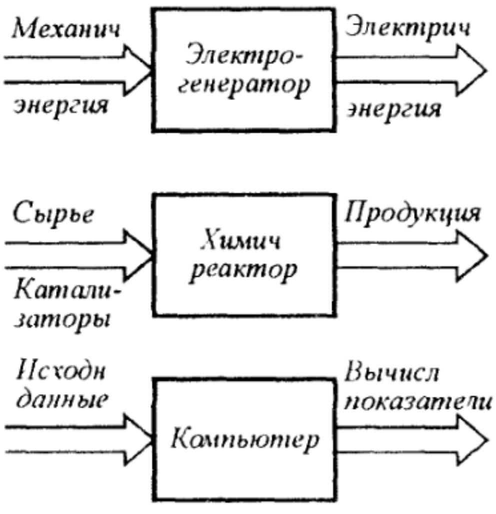


Рис 1.1 Виды
техничсских систем (ТС)

Всякая ТС. как и любая другая открытая система, взаимодействует с внешней средой (рис 1 2) Причем, внешняя среда всегда оказывает на ТС мешающее влияние, т с воздействие, нарушающее нормальное функционирование ТС Поэтому факторы влияния внешней среды на ТС называются *вошущающими воздействиями,* или *возмущениями.*

Из-за постоянного воздействия на ТС различных возмущении приходится предпринимать специальные воздействия, направленные на компенсацию нежелательного влияния среды или на желательное изменение ее работы Процесс осуществления целенаправленных воздействий на ТС, обеспечивающих се нормальное функционирование, называют *управлением* А саму ТС. нуждающуюся в этих специально организованных воздействиях, называют *объектом управления (ОУ)* Целенаправленные воздействия на ОУ являются *управляющими* Их обычно обозначают символом v. а возмущение – z.

Для рассматриваемых трех примеров ТС управляющими воздействиями соответственно могут служить, например, частота вращения (об/с) ротора электрогенератора, расход катализатора (кг/с), подаваемого в реактор, и команды ввода данных («enter», «input» и тп).

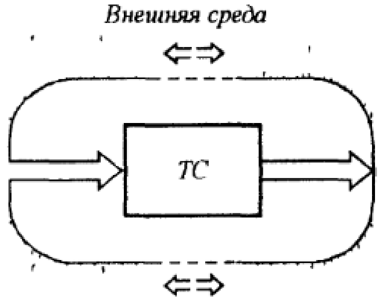


Рис 1 2 Взаимодействие ТС
с внешней средой

Поскольку в теории управления при математическом анализе любой системы, наряд) с количественными характеристиками энергетических и материальных потоков, рассматривается информационный аспект обмена, то каждое воздействие при этом выступает одновременно как материальный носитель информации, ТС как сигнал *Сигналом* называют изменение во времени физической величины.

Выходной сигнал *x(t)* объекта правления, который с помощью управляющего воздействия y(t) поддерживается на заданном уровне или изменяется по желаемому законл, называется *управляемой координатой, или управляемой величиной.*

Устройство, осуществляющее целенаправленн ыс управляющие воздействия на ОУ, называют *управляющий устройством (УУ)* Совокупность ОУ и УУ. взаимодействующих между собой, называют *системой управления (СУ).*

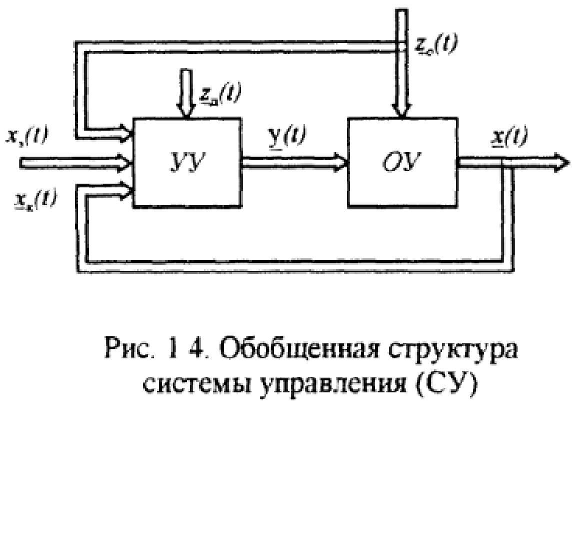


Рис. 1 4. Обобщенная структура
системы управления (СУ)

Управляемая величина является выходной величиной объекта и зависит от двух входных воздействий, возмущающего *z(t)* и управляющего y(t) В общем случае эти воздействия также могут быть векторными величинами.

Зависимость управляемой величины от входных воздействий для одномерного объекта можно выразить при помощи некоторого

$$x(t) = A_{\text{o}}\left[y(t), z(t)\right] \qquad (1\ 1)$$

алгебраического алгоритма или математического оператора $A_{o,}$ характеризующий объект как преобразователь сигналов:

Символом *Ao* в выражении (11) обозначена некоторая совокупность математических операций, которые необходимо выполнить, чтобы по функциим времени *y(t)* и z(t) найти функцию *x(t).*

Принципы построения и классификация СУ.

Классификация систем управления может быть осуществлена по самым различным принципам и признакам. Классификация систем по различным основаниям показана на рис 1.8

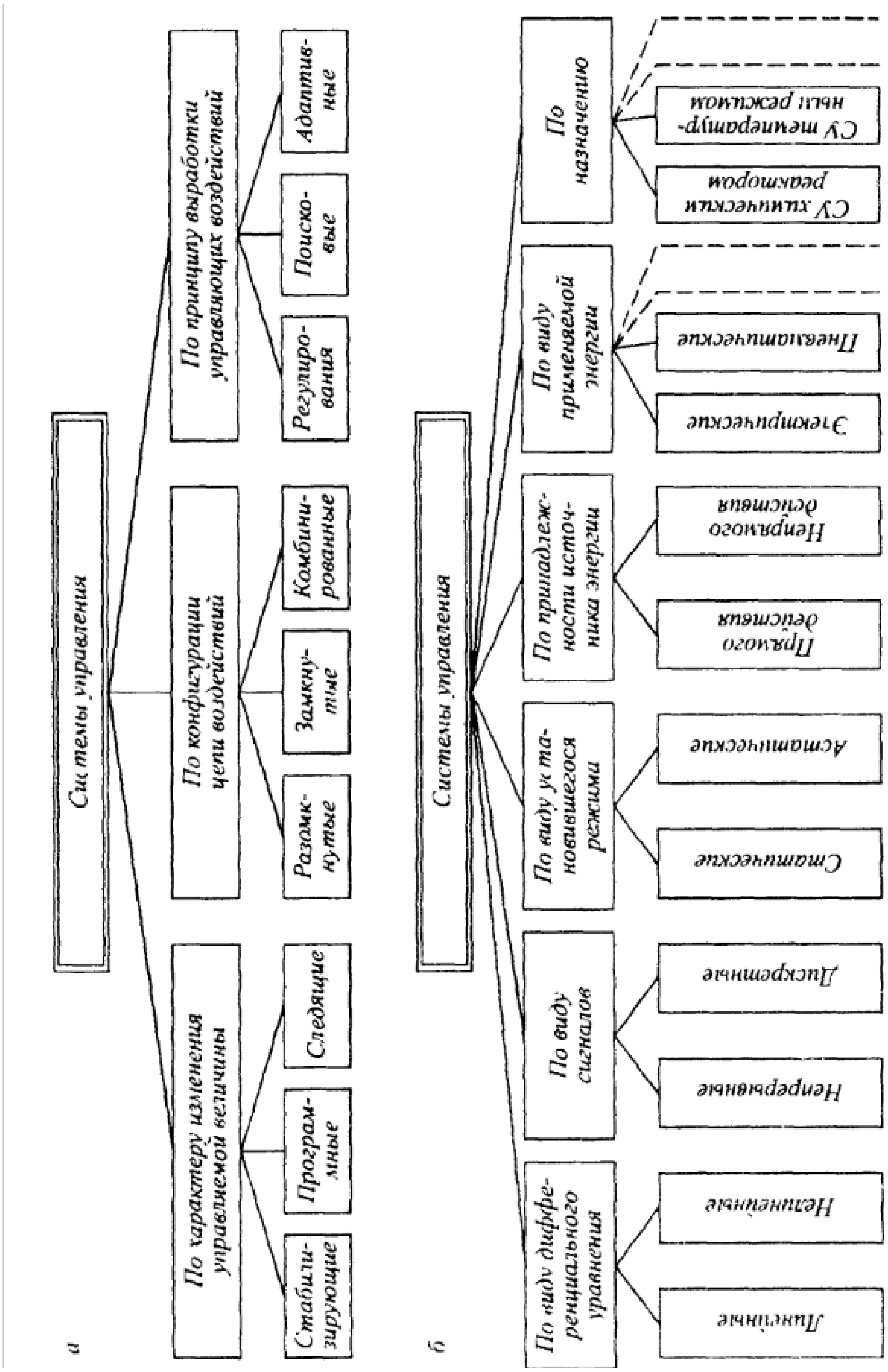


Рис. 1.8. Классификация систем управления:
а - по алгоритмическим признакам; б – по неалгоритмическим признакам

Рассмотрим вначале классификацию систем по наиболее важным для теории управления признакам - признакам, которые характеризуют алгоритм функционирования и алгоритм управления системы. Этими признаками являются: 1) цель управления и связанный с ней характер изменения задающего воздействия (и соответственно управляемой величины). 2) конфигурация цепи воздействий и 3) способ выработки управляющих воздействий.

В зависимости от **характера изменении задающего воздействия** во времени системы управления делят на три класса стабилизирующие, программные и следящие системы.

Стабилизирующая система управления (система стабилизации) - это система, алгоритм функционирования которой содержит предписание поддерживать значение управляемой величины постоянным.

$$x(t) \approx x_з = \text{const}. \qquad (1.3)$$

Знак $\approx$ означает, что управляемая величина поддерживается на заданном уровне с некоторой ошибкой

Стабилизирующие системы - самые распространенные. Их применяют для стабилизации различных физических величин, характеризующих состояние технологических объектов.

Алгоритм функционирования *программной СУ* содержит предписание изменять управляемую величину в соответствии с заранее заданной функцией времени $f_п(t)$

$$x(t) \approx x_з(t) = f_п(t). \qquad (1.4)$$

Следящая система управления предназначена для изменения управляемой величины в соответствии с изменениями другой величины, которая действует на входе системы и закон изменения которой заранее неизвестен:

$$x(t) \approx x_з(t) = f_c(t), \qquad (1.5)$$

где $f_c(t)$ произвольная функция времени.

В стабилизирующих, программных и следящих системах цель управления заключается в обеспечении равенства или близости управляемой величины *x(t)* к ее заданному значению $x_з(t)$. Такое управление, осуществляемое с целью поддержания равенства называется *регулированием*.

$$x(t) \approx x_з(t), \qquad (1.6)$$

Управляющее устройство, осуществляющее регулирование, называют *регулятором,* а саму систему - *системой регулировании.*

В зависимости от **конфигурации цепи воздействий** , различают три вида систем управления: с разомкнутой цепью воздействий, с замкнутой цепью и комбинированные.

В *системе управления с разомкнутой цепью воздействий* (кратко - *разомкнутая система)* входными воздействиями управляющего устройства являются только внешние (задающие и возмущающие) воздействия, т.е. в них не осуществляется контроль управляемой величины.

Разомкнутые системы можно разделить, в свою очередь, на два класса: системы, осуществляющие управление в соответствии с изменением только задающего воздействия (рис 1.9,а), и системы, управляющие при изменении возмущения (рис. 1.9,б)

Алгоритм управления разомкнутой системы первого типа имеет вид:

$$y(t) = A_у[x_з(t)]. \qquad (1.7)$$

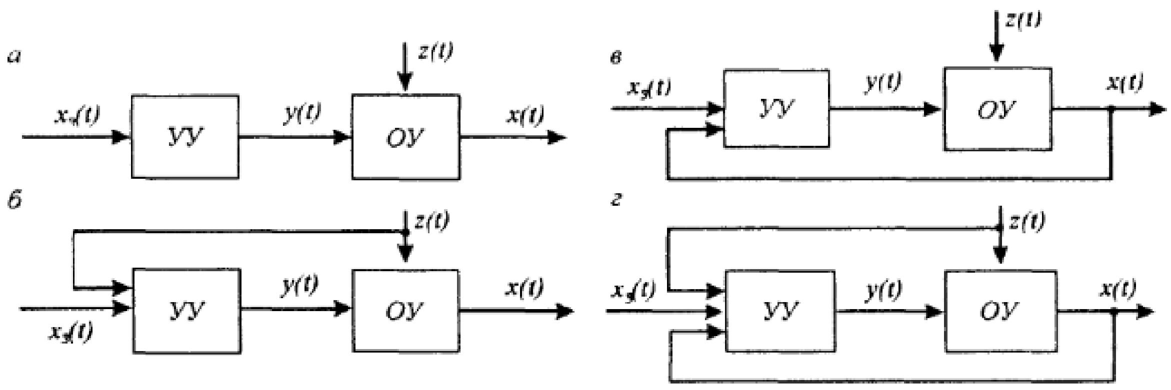


Рис. 1.9. Функциональные структуры систем управления с разомкнутой (*а*, *б*), замкнутой (*в*) и комбинированной (*г*) цепью воздействий

Разомкнутые системы, действующие по заданию, называют также *циклическими системами.* Характерными представителями циклических систем являются различные автоматы, выполняющие по жесткой программе, без свободы выбора действий, одноразовые или многоразовые операции К этой группе относятся, например, различные системы управления пуском электродвигателей, включением в работу конвейерных линий и т д.

В *системе управления с замкнутой цепью воздействии* (кратко - *замкнутая система,* или *система с обратной связью)* на вход управляющего устройства поступают как внутреннее воздействие, так и внешнее (задающее) Обобщенная функциональная структура замкнутой системы изображена на рис 1.9.в.

Управляющее воздействие в замкнутой системе формируется в большинстве случаев в зависимости от величины и знака отклонения истинного значения управляемой величины от ее заданного значения:

$$y(t) = A_v[\varepsilon(t)], \qquad (1.10)$$

где $\varepsilon(t) = x_з(t) - x(t)$, *сигнал ошибки* (называемый также сигналом рассогласования). Замкнутые системы называют часто системами управления по отклонению.

В замкнутой системе контролируется непосредственно управляемая величина и тем самым при выработке управляющих воздействий учитывается действие всех возмущении, влияющих на управляемую величину. В том заключается преимущество замкнутых систем.

В *комбинированных системах* (рис 1.9*,г)* создают две цепи воздействий - по заданию и по возмущению, и управляющее воздействие формируется согласно оператору:

$$y(t) = A_з\left[\varepsilon(t)\right] + A_в\left[z(t)\right]. \qquad (1.11)$$

Эффективность работы комбинированной системы управления всегда больше, чем у порознь функционирующих замкнутой или разомкнутой систем.

В зависимости от **способа выработки управляющих воздействий**, замкнутые системы делятся на беспоисковые и поисковые

В *беспоисковых системах* управляющие воздействия вырабатываются в результате сравнения истинного значения управляемой величины с ее заданным значением.

В *поисковой системе* основные управляющие воздействия формируются с помощью пробных управляющих воздействий и путем анализа результатов пробных воздействий.

В зависимости от **принадлежности источника энергии**, при помощи которого создастся управляющее воздействие, системы могут быть прямого и непрямого действия.

В *системах прямого действия* используется энергия управляемого объекта. К ним относятся простейшие системы стабилизации (уровня, расхода, давления и т.п.).

В *системах непрямого действия* управляющее воздействие создастся за счет энергии дополнительного источника.

По виду сигналов, действующих в системах, системы управления делят на *непрерывные* и *дискретные.*

Системы управления, у которых управляемая величина в установившемся режиме зависит от величины возмущающего воздействия, называются *статическими,* а системы, у которых не зависит, - *астатическими.*

По виду дифференциальных уравнений, описывающих элементы систем, последние делят на линейные и нелинейные. В *линейной системе* все элементы описываются линейными алгебраическими и дифференциальными уравнениями. Если хотя бы один элемент системы имеет нелинейную зависимость выходной величины от входной, то вся система является *нелинейной.*

Виды воздействий и режимов в СУ.

Рассмотрим основные разновидности сигналов и воздействий. В зависимости от характера изменения сигнала во времени и от формы его математического представления, различают регулярные и нерегулярные сигналы

Регулярный (детерминированный) сигнал изменяется по определенному закону и может быть описан конкретной математической функцией времени. К классу регулярных сигналов относятся различные периодические сигналы. На рис2.5,а в качестве примера регулярного сигнала показан импульс, описываемый экспонентой.

Нерегулярный (случайный) сигнал изменяется во времени случайным образом и не может быть представлен в виде конкретной математической функции. Характер изменения случайного сигнала во времени показан на рис.2.5.б

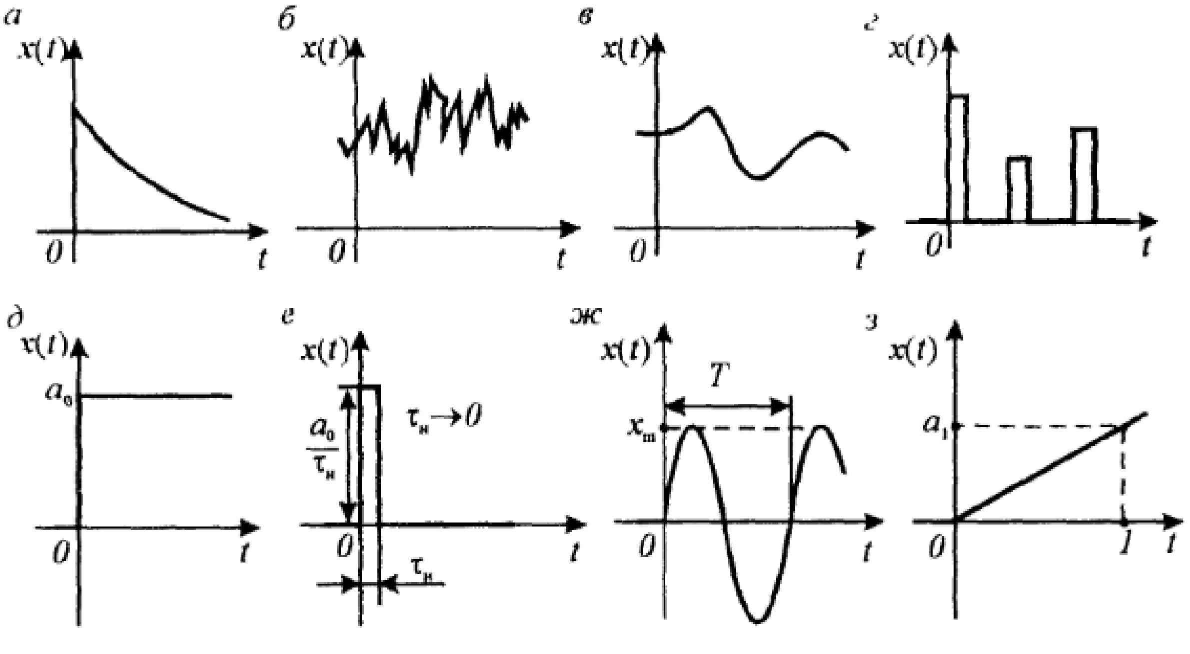


Рис 2 5. Виды сигналов (*а, б, в, г*) и типовых воздействий (*д, е, ж, з*)

Если значение регулярного или случайного сигнала определено в каждый момент времени (рис. 2 5,в), то сигнал называют *непрерывным,* или *аналоговым.* Если же значения сигнала заданы лишь в некоторые моменты времени (рис. 2.5,г), то его называют *дискретным.*

При экспериментальном н теоретическом исследовании СУ и их элементов используют ряд стандартных сигналов, называемых *типовыми воздействиями.*

Наибольшее применение в теории и практике автоматического управления находят следующие четыре типовых воздействия: ступенчатое, импульсное, гармоническое и линейное

Ступенчатое воздействие - это воздействие, которое мгновенно возрастает от нуля до некоторого значения и далее остается постоянным (рис.2.5, д). Ступенчатому воздействию соответствует функция:

$$x_c(t) \overset{\Delta}{=} \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0; \\ a_0 \text{ при } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

При анализе и расчете систем удобно использовать ступенчатое воздействие, у которого величина a_0=1. Его называют *единичным ступенчатым воздействием* (единичным скачком) и обозначают ɵ(t) или 1(t). Математическое выражение, описывающее единичный скачок, имеет вид:

$$\sigma(t) = 1(t) \overset{\Delta}{=} \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0; \\ 1 \text{ при } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Импульсное воздействие представляет собой одиночный импульс прямоугольной формы (рис 2.5,е), имеющий достаточно большую высоту и весьма малую продолжительность t→0. Очевидно, что площадь такого импульса всегда равна a_0.

При математическом анализе систем управления используют *единичное импульсное воздействие,* которое описывается так называемой *дельта-функцией:*

$$\delta(t) \overset{\Delta}{=} \begin{cases} 0 \text{ при } t \neq 0; \\ \infty \text{ при } t = 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

В качестве стандартного *гармонического воздействия* используют обычно сигнал синусоидальной формы, описываемый функцией:

$$x(t) \overset{\Delta}{=} x_m \sin \omega t, \quad (-\infty < t < \infty), \quad (2\ 16)$$

где x_m - амплитуда сигнала; $\omega = 2\pi / T$ - круговая частота, рад/с; T - период сигнала, с.

Дтя следящих и программных систем типовым является *линейное воздействие,* начинающееся в момент t = 0 (рис 2.5. з).

$$x(t) \overset{\Delta}{=} \sigma(t) a_1 t, \quad (0 \leq t < \infty). \quad (2.18)$$

где коэффициент a_1 характеризует скорость нарастания воздействия $x(t)$.

Рассмотрим теперь возможные состояния и возможные режимы перехода СУ от одного состояния к другому.

Различают два режима работы СУ и их элементов, статический и динамический.

Статическим режимом называют состояние системы (элемента), при котором управляемая (выходная) величина *у* не изменяется во времени, т.е. *y(t)*= const.

Очевидно, что статический режим (или состояние равновесия) может иметь место лишь тогда, когда входные воздействия постоянны во времени. Связь между входными и выходными величинами в статическом режиме описывают алгебраическими выражениями.

В *динамическом режиме* работы системы (элемента) управляемая (выходная) величина непрерывно изменяется во времени y(t)=var.

Динамические режимы имеют место, когда в системе после нанесения внешних воздействий происходят процессы установления заданного изменения выходной величины. Эти процессы называют *процессами управления.* Они описываются в общем случае дифференциальными уравнениями.

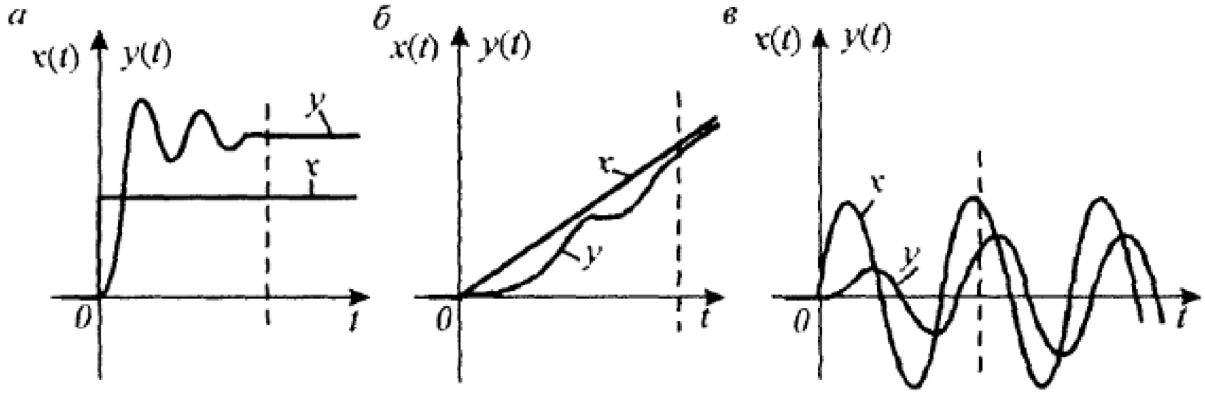


Рис. 2.6. Переходные и установившиеся режимы при типовых воздействиях

Динамические режимы делят: на неустановившиеся и установившиеся. *Неустаноеивишеся,* или *переходные, режимы* имеют место сразу после изменения внешних воздействии.

Статические характеристики элементов СУ.

Передаточные свойства элементов и систем в статическом режиме описывают при помощи статических характеристик. *Статической характеристикой* элемента называют зависимость его выходной величины у от входной величины *x* в установившемся статическом режиме:

$$y = f(x) = y(x) \qquad (2.44)$$

Статическая характеристика конкретного элемента может быть ладана в формульном виде (например, в виде алгебраической функции $y = cx^2$) или в виде графика (рис 2.8,а).

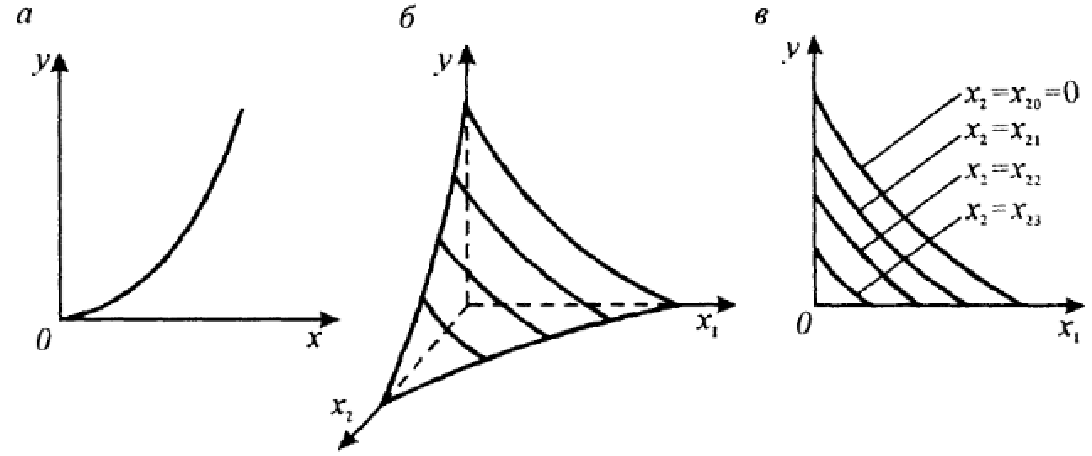


Рис. 2.8 .Статические характеристики элементов с одной (*а*) и двумя (*б*, *в*) входными величинами

В общем случае, когда состояние элемента или системы зависит от нескольких входных воздействий $x_1, x_2, \ldots, x_m$ то статическая характеристика представляет собой функцию нескольких независимых переменных:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (2\ 45)$$

Функция двух переменных x_1 и x_2 может быть, как известно, изображена в виде поверхности в трехмерном пространстве с декартовыми координатами *y*, x_t, $x_:$ (рис 2.8,б) или в виде семейства линий сечений этой поверхности, соответствующих нескольким фиксированным значениям одного из аргументов (рис 2.8,в).

$$\Phi[y, x] = 0. \qquad (2.46)$$

Из уравнения (2.46) можно получить аналитическое выражение статической характеристики в явном виде (2.44).

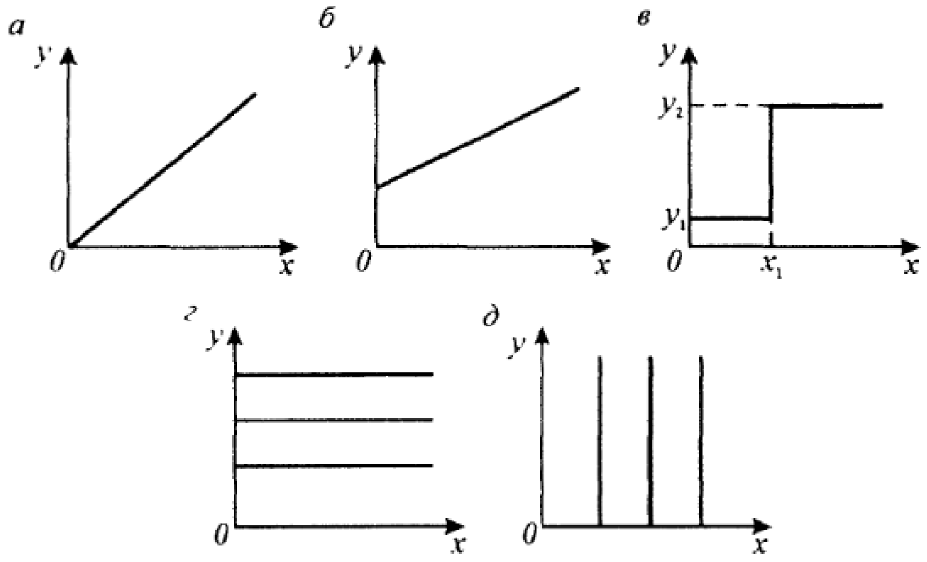


Рис. 2.9. Виды статических характеристик

По виду статических характеристик элементы делят на линейные и нелинейные. Статическая характеристика *линейного элемента* (см рис 2.9,б) описывается линейной функцией $y = b + ax$.

У *нелинейных элементов* связь между входной и выходной величинами выражается обычно в виде степенных функций, степенных полиномов, дробных рациональных и более сложных функций.

Нелинейные элементы, в свою очередь, подразделяют на элементы с существенно нелинейной статической характеристикой и элементы с несущественно нелинейной (линеаризуемой) характеристикой.

Статическая характеристика является *несущественно нелинейной,* если она описывается непрерывной дифференцируемой функцией. Практически это математическое условие означает, что график функции $y = f(x)$ должен иметь гладкую форму (см.рис. 2.9,а). В ограниченном диапазоне изменения входной величины x такая характеристика может быть приближенно заменена линейной функцией. Приближенная замена нелинейной функции линейной называется *линеаризацией.*

Статическая характеристика считается *существенно нелинейной,* если она имеет изломы или разрывы. На (рис 2.9.в) в качестве примера приведена характеристика реле, которое при достижении входного сигнала *x* (ток в обмотке реле) некоторого значения x, изменит выходной сигнал *y* (напряжение в коммутируемой цепи) с уровня y_2 до уровня y_2.

Линейные дифференциальные уравнения.

Наиболее распространенной и самой общей формой описания передаточных свойств систем управления и их элементов являются обыкновенные дифференциальные уравнения. Для элемента, имеющего один входной сигнал x(t) и один выходной сигнал y(t), обыкновенное дифференциальное уравнение записывается в общем случае следующим образом:

$$\Phi\left[y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t), x(t), x'(t), \ldots, x^{(m)}(t), t\right] = 0 \qquad (2\ 1)$$

Для большинства реальных элементов исходное уравнение (2.1), составленное строго в соответствии с законами физики, оказывается нелинейным. Это обстоятельство сильно усложняет все последующие процедуры анализа. Поэтому всегда стремятся перейти от трудно разрешимого нелинейного уравнения (2.1) к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению вида:

$$\begin{aligned} &a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ &= b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \end{aligned} \qquad (2.63a)$$

или в свернутом виде

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}, \qquad (2\ 63б)$$

где *x(t)* и *y(t)* - входная и выходная величины элемента или системы, *a, b,* - коэффициенты уравнения.

Уравнения (2.6 3*а)* и (2.6 3б) устанавливают связь между входной и выходной величинами как в переходных, так и в установившихся режимах.

Приравнивая все производные в уравнениях динамики (2.6 3а) и (2.6 3б) нулю, можно получить уравнение статики элемента (системы) в следующем общем виде:

$$a_0 y(t) = b_0 x(t) \quad \text{или} \quad y(t) = \frac{b_0}{a_0} x(t) = kx(t) \qquad (2.64)$$

Заметим, что аргумент t в уравнениях статики обычно не пишут, так как в установившемся статическом режиме переменные x(t) и y(t) не изменяются во времени.

Коэффициенты дифференциального уравнения называют *параметрами.* Они зависят от различных физических констант, характеризующих скорость протекания процессов в элементах.

Для систем управления, описываемых линейным уравнением (2.63), справедлив принцип наложения, или суперпозиции, согласно которому:

изменение выходной величины $y(t)$, возникающее при действии на систему нескольких входных сигналов $x_i(t)$, равно сулеме изменений $y_i(t)$ величины $y(t)$, вызываемых каждым сигналом в отдельности.

Рассмотрим теперь типовые формы записи линейного дифференциального уравнения (2.6 3), используемые в различных задачах теории управления.

Как и в других областях науки и техники, все физические переменные, входящие в уравнение, могут быть выражены в *относительных единицах*. Для этого каждое слагаемое делят на постоянную величину, имеющую размерность той переменной, которая входит в это слагаемое. Постоянные величины называют *базовыми.* В качестве базовых величин принимают обычно номинальные или установившиеся значения переменных y и x.

Удобной формой записи линейных дифференциальных уравнений является *символическая,* или *операторная*. Переход к этой форме осуществляют введением сокращенного условного обозначения операции дифференцирования, $d.../dt = p$. Соответственно i-ю производную переменной у обозначают:

$$d^i y(t)/dt^i = p^i y(t), \qquad (2\ 65)$$

тогда уравнение (2.63) в символической форме будет иметь вид:

$$\left(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0\right) y(t) =$$
$$= \left(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0\right) x(t). \qquad (2.66)$$

Многочлены от p степени n и $m,$ находящиеся в левой и правой частях уравнения (2.66), называют *дифференциальнылш операторами.* Каждый такой оператор устанавливает соответствие между функцией времени и определенной совокупностью производных этой функции. Многочлен

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = D(p) \qquad (2.67)$$

называют *собственным оператором,* а многочлен

$$b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ ..+ b_1 p + b_0 = K(p) \qquad (2.68)$$

- *входным оператором,* или *оператором воздействия.*

Уравнения элементов невысокого порядка *(n* < 3) в теории управления принято записывать в так называемой стандартной форме. При *стандартной форме* записи уравнение преобразовывают таким образом, чтобы коэффициент при выходной величине был равен единице. При этом коэффициент перед входной величиной в правой части уравнения становится равным передаточному коэффициенту, а коэффициенты при производных выходной величины будут иметь размерность времени в степени, равной порядку соответствующей производной. Например, уравнение второго порядка:

$$\left(a_2 p^2 + a_1 p + a_0\right) y(t) = \left(b_1 p + b_0\right) x(t) \tag{2.69}$$

путем деления всех членов на коэффициент a_0 может быть приведено к стандартной форме:

$$\left(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1\right) y(t) = k\left(Tp + 1\right) x(t), \tag{2.70}$$

где $k = b_0 / \alpha_0$; $T = b_1 / b_0$; $T_1 = \alpha_1 / \alpha_0$; $T_2^2 = \alpha_2 / \alpha_0$.

Коэффициенты T, T_1, T_2 принято называть *постоянными времени.* Они характеризуют динамические свойства элемента или системы.

Применение аппарата операционного исчисления для исследования динамических свойств линейных СУ. Преобразование Лапласа для типовых сигналов.

Наиболее распространенным методом описания и анализа элементов и систем управления является операторный метод (метод операционного исчисления). В основе метода лежит *преобразование Лапласа*

$$X(p) = \mathscr{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt, \qquad (2.100)$$

которое устанавливает соответствие между функциями действительной переменной t и функциями комплексной переменной *p*. Функцию времени x(t), входящую в интеграл Лапласа (2.100), называют *оригиналом,* а результат интегрирования - функцию *X(p)* - *изображением функции x(t) по Лапласу.*

Таблица 2.1

Изображение простейших функций времени по Лапласу

Наименование функций	$x(t)$	$X(p) = \mathscr{L}\{x(t)\}$
Дельта-функция	$\delta(t)$	1
Ступенчатая	$a_0\sigma(t)$	a_0/p
Степенная	$A_q t^q \sigma(t)$ $(q = 0,1,2, \ )$	$q!/p^{q+1}$ $(0! = 1)$
Экспонента	$e^{-\alpha t}\sigma(t)$	$1/(p+\alpha)$
Синусоида	$(\sin \omega t)\sigma(t)$	$\omega/(p^2+\omega^2)$
Косинусоида	$(\cos \omega t)\sigma(t)$	$p/(p^2+\omega^2)$
Периодическая	$x(t) = x(t+T)$	$X(p)/(1-e^{-t} \ )$

Преобразование Лапласа выполнимо, как известно, лишь для таких функции времени, которые равны нулю при *t* < 0. Это условие обеспечивается обычно умножением функции x(t) на единичную ступенчатую функцию σ(t).

В таблице 2.1 приведены изображения простейших функций времени, наиболее часто используемых в расчетах СУ.

Основные свойства преобразования Лапласа, используемые при анализе автоматических систем, указаны в табл.2.2.

Таблица 2.2

Основные свойства преобразования Лапласа

Наименование	Оригинал	Изображение
Линейность	$ax(t)$	$aY(p)$
	$x_1(t) \pm x_2(t)$	$X_1(p) + X_2(p)$
Правило дифференцирования (при нулевых начальных условиях)	$d^i x(t) dt^i$	$X(p)\, p^i$
Правило интегрирования (при нулевых начальных условиях)	$\int_0^t \dots \int_0^t x(\vartheta) d\vartheta^i$	$X(p) / p^i$

Передаточные функции элементов линейных СУ. Основные свойства передаточных функций.

Широкое распространение операторного метода в теории управления обусловлено тем, что с его помощью определяют так называемую передаточную функцию, которая является компактной формой описания динамических свойств элементов и систем.

Применим преобразование Лапласа к линейному дифференциальному уравнению (2.63), полагая, что до приложения внешнего воздействия система находилась в покое и что все начальные условия равны нулю. Используя свойство линейности и правило дифференцирования (см табл.2 2), можно получить алгебраическое уравнение в изображениях:

$$D(p)Y(p) = K(p)X(p), \qquad (2.101)$$

где $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0,$
$K(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0.$

Сравнивая уравнение (2.101) с уравнением в символической форме (2.66), можно заметить полную аналогию их структур. Различие уравнений лишь в значении символа *p:* в первом уравнении он обозначает операцию дифференцирования, во втором - комплексную переменную.

Введем теперь понятие передаточной функции (сокращено – ПФ). *Передаточной функцией W(p)* называют отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях:

$$W(p) \overset{\Delta}{=} Y(p)/X(p) = \mathscr{L}\{y(t)\}/\mathscr{L}\{x(t)\} \qquad (2.102)$$

Для системы, описываемой уравнением (2.63), ПФ равна отношению входного оператора *K(p)* к собственному оператору *D(p):*

$$W(p) = \frac{K(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}. \qquad (2.103)$$

Как следует из определений (2.102) и (2.103), ПФ представляет собой некоторый динамический оператор, характеризующий прохождение сигналов через линейный элемент (рис. 2.16,а).

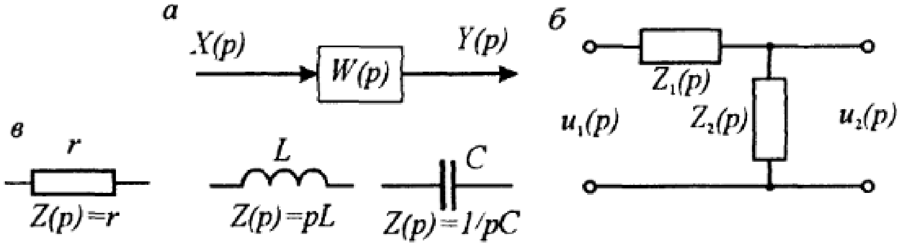


Рис. 2.16. Схемы для определения передаточной функции электрического четырехполюсника

Передаточную функцию формально можно получить из дифференциального уравнения заменой в нем символа кратного дифференцирования на соответствующую степень p и делением образованного таким образом многочлена правой части уравнения на многочлен левой части.

Рассмотрим теперь основные свойства и особенности передаточных функций систем управления и их элементов.

Передаточная функция элемента связана с его импульсной переходной функцией преобразованием Лапласа:

$$W(p) = \mathscr{L}\{w(t)\} = \int_0^\infty w(t)e^{-pt}dt, \qquad (2.105)$$

соответственно и наоборот:

$$w(t) = \mathscr{L}^{-1}[W(p)]. \qquad (2.106)$$

Поскольку переходная характеристика *h(t)* и импульсная переходная функция w(t) связаны друг с другом интегральным соотношением то, учитывая третье свойство преобразования Лапласа (см.табл. 2.2), можно записать следующее равенство:

$$\mathscr{L}\{h(t)\} = W(p)/p. \qquad (2.107)$$

А теперь можно с учетом равенства (2.107) получить следующие соотношения:

$$h(\infty) = W(0) \quad \text{и} \quad h(0) = W(\infty). \qquad (2.108)$$

Использование преобразования Лапласа для построения переходных процессов в линейных СУ.

Частотные характеристики элементов линейных СУ.

Частотные характеристики описывают передаточные свойства элементов и систем в режиме установившихся гармонических колебаний, вызванных внешним гармоническим воздействием. Зная частотную характеристику элемента, можно определить реакцию элемента на гармоническое воздействие любой частоты, а также на сумму гармонических воздействий различной частоты.

Рассмотрим физическую сущность и разновидности частотных характеристик. Пусть на вход линейного элемента (рис. 2.17, а) в момент времени t = 0 подано гармоническое воздействие определенной частоты ω.

$$x(t) = x_m \sin \omega t \qquad (2\ 118)$$

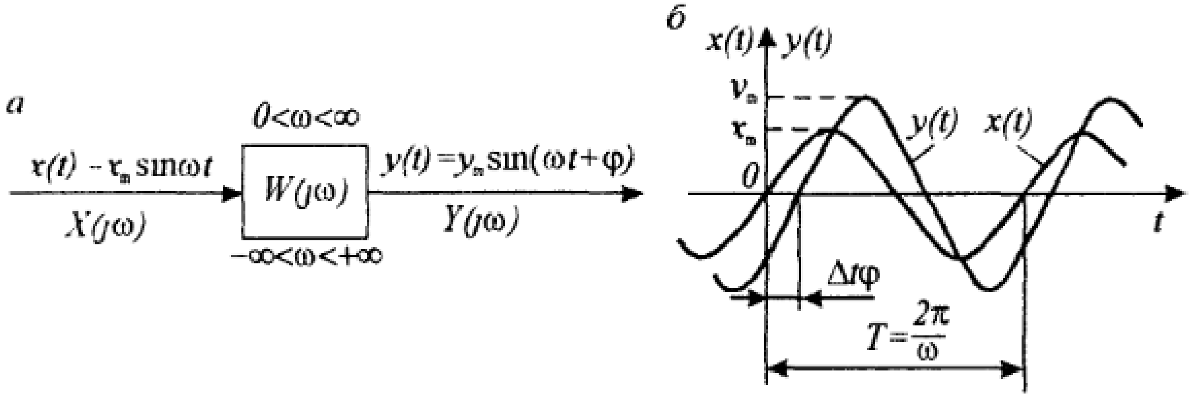


Рис 2 17 Схема для определения понятий частотного метода

Через некоторое время, необходимое для протекания переходного процесса (т.е. для исчезновения свободной составляющей), элемент войдет в режим установившихся вынужденных колебаний, а выходная величина y(t) будет изменяться по гармоническому закону с той же частотой ω, но с отличающейся амплитудой y_m и со сдвигом Δt_φ по оси времени (рис 2 17,б)

$$y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi), \qquad (2\ 119)$$

где $\varphi = (\Delta t_\varphi / T)\cdot 360°$ - фазовый сдвиг между входным и выходным сигналами, °

Так как амплитуда выходного сигнала y_m зависит еще и от амплитуды входного сигнала x_m, то целесообразно при описании передаточных свойств элементов рассматривать отношение амплитуд Y_m/X_m.

Зависимость отношения амплитуд выходного и входного сигналов от частоты называют *амплитудной частотной характеристикой* (сокращенно - *АЧХ)*. Она обозначается *A(ω)*.

Зависимость фазового сдвига между входным и выходным сигналами от частоты называют *фазовой частотной характеристикой (ФЧХ)* φ(ω). Возможный вид этих характеристик показан на рис 2.18,а и б.

Аналитические выражения *A(ω)* и φ(ω) называют соответственно амплитудной и фазовой частотными функциями.

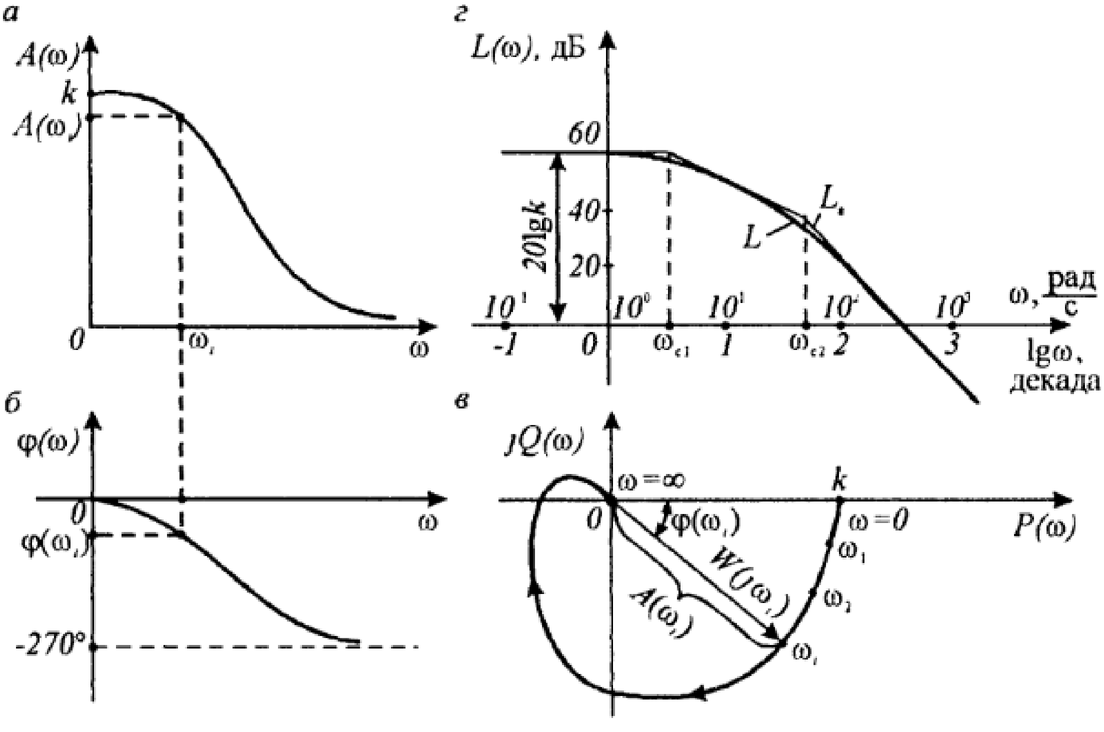


Рис. 2.18. Частотные характеристики:

а – амплитудная, *б* – фазовая, *в* – амплитудно-фазовая, *г* - логарифмическая

АЧХ показывает, как элемент пропускает сигналы различной частоты. Оценка пропускания производится по отношению амплитуд Y_m/X_m. АЧХ имеет размерность, равную отношению размерности выходной величины к размерности входной.

ФЧХ показывает, какое отставание или опережение выходного сигнала по фазе создает элемент при различных частотах.

Графики АЧХ и ФЧХ (см.рис 2.18, а и б), расположенные совместно, друг под другом, в западной литературе называют диаграммой Боде.

Амплитудную и фазовую частотные характеристики можно объединить в одну общую – амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ или АФХ). *Амплитудно-фазовая частотная характеристика* W(ω) представляет собой функцию комплексного переменного jω, модуль которой равен *A(ω),* а аргумент равен φ(ω). Каждому фиксированному значению частоты ω, соответствует комплексное число $W(j\omega_i)$, которое на комплексной плоскости можно изобразить вектором, имеющим длину $A(\omega_i)$ и угол поворота $\varphi(\omega_i)$ (рис 2.18,в). Отрицательные значения φ(ω), соответствующие отставанию выходного сигнала от входного, принято отсчитывать по часовой стрелке от положительного направления действительной оси.

При изменении частоты от нуля до бесконечности вектор *W(jω)* будет поворачиваться вокруг начала координат, одновременно будет увеличиваться или уменьшаться длина вектора. Кривая, которую при этом опишет конец вектора, и есть АФХ. Каждой точке характеристики соответствует определенное значение частоты.

Проекции вектора W(jω) на действительную и мнимую оси называют соответственно действительной частотной характеристикой и мнимой частотной характеристикой. Обозначают их так: P(ω) = R*e* W(jω), Q(ω) = Im W(jω). Отмстим, что действительная частотная характеристика P(ω) - всегда четная функция частоты, а мнимая характеристика *Q(ω)* - всегда нечетная функция.

Аналитическое выражение для АФХ конкретного элемента можно получить из его передаточной функции - *путем подстановки p=jω:*

$$W(j\omega) = W(p)\Big|_{p=j\omega}, \qquad (2.120)$$

поэтому АФЧХ иногда называют частотной передаточной функцией. АФХ W(jω), как и любая комплексная величина, может быть представлена в показательной форме:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \qquad (2.121)$$

алгебраической:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \qquad (2.122)$$

и тригонометрической:

$$W(j\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega) + jA(\omega)\sin\varphi(\omega). \qquad (2.123)$$

Связь между различными частотными функциями следующая:

$$A(\omega) = \left|W(j\omega)\right| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \qquad (2.124)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \operatorname{arctg}\big(Q(\omega)/P(\omega)\big). \qquad (2.125)$$

Поскольку АФХ *W(jω),* так же, представляет собой обычно дробь, то ее модуль может быть найден по известному правилу - как отношение модуля числителя к модулю знаменателя:

$$A(\omega) = \left|W(j\omega)\right| = \left|K(j\omega)\right|/\left|D(j\omega)\right|, \qquad (2.126)$$

а аргумент функции W(jω) - как разность аргументов числителя и знаменателя:

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arg K(j\omega) - \arg D(j\omega). \qquad (2.127)$$

Виды типовых динамических звеньев. Позиционные звенья первого порядка.

Алгоритмические звенья, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого и второго порядков, получили название *типовых динамических звеньев.* Типовые динамические звенья являются основными составными частями алгоритмических структур непрерывных систем управления, и поэтому знание их характеристик существенно облегчает анализ таких систем.

Классификацию типовых звеньев удобно осуществить, рассматривая различные частные формы дифференциального уравнения второго порядка:

$$a_2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0x(t). \qquad (3.1)$$

В табл. 3.1 приведены значения коэффициентов уравнения (3.1) и названия для наиболее часто встречающихся звеньев.

Таблица 3.1

Значения коэффициентов уравнения (3.1) типовых звеньев

Номер звена	Наименование звена	a_2	a_1	a_0	b_1	b_0	Примечание
1	Безынерционное (пропорциональное)	0	0	1	0	k	
2	Инерционное 1-го порядка (апериодическое)	0	T	1	0	k	
3	Инерционное 2-го порядка (апериодическое)	T_2^2	T_1	1	0	k	$T_1>2T_2$
4	Инерционное 2-го порядка (колебательное)	T_2^2	T_1	1	0	k	$T_1<2T_2$
5	Идеальное интегрирующее	0	1	0	0	k	
6	Реальное интегрирующее	T	1	0	0	k	
7	Идеальное дифференцирующее	0	0	1	k	0	
8	Реальное дифференцирующее	0	T	1	k	0	
9	Изодромное (пропорционально-интегрирующее)	0	1	0	k_1	k	
10	Форсирующее (пропорционально-дифференцирующее)	0	0	1	k_1	k	
11	Интегро-дифференцирующее с преобладанием интегрирующих свойств	0	T	1	k_1	k	$(k_1/k)<T$
12	Интегро-дифференцирующее с преобладанием дифференцирующих свойств	0	T	1	k_1	k	$(k_1/k)>T$

Отмстим ряд общих закономерностей. Звенья, у которых коэффициенты $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$, обладают статизмом, т.е. однозначной связью между входом и выходом в статическом режиме. К их названиям поэтому часто добавляют слова *статическое* или *позиционное.* К этим звеньям относятся № 1,2,3,4,10, 11, 12.

Звенья, у которых $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$, обладают *инерционностью (замедлением).* К ним относятся звенья № 2, 3, 4, 6,8, 11, 12.

У звеньев № 1, 5 и 7 только два коэффициента не равны нулю. Они являются простейшими, или элементарными. Все остальные типовые звенья могут быть образованы из элементарных путем последовательного, параллельного и встречно-параллельного соединений.

Безынерционное звено

Безынерционное звено является простейшим среди всех типовых звеньев Оно передаст сигнал со входа на выход мгновенно, без искажений его формы. В звене может происходить только усиление или ослабление мгновенных значении входной величины.

Связь между мгновенными значениями входной величины *x(t)* и выходной величины y(t) описывается алгебраическим уравнением:

$$y(t) = kx(t). \tag{3.2}$$

Передаточные свойства звена определяются лишь одним параметром - передаточным коэффициентом *k.*

При единичном ступенчатом воздействии $x(t)=\sigma(t)$, приложенном в момент t=0, выходная величина мгновенно изменяется и принимает значение *k* (рис. *3.1,а).* Переходная функция звена имеет вид:

$$h(t) = k\sigma(t), \tag{3.3}$$

а импульсная переходная (рис. 3.1,б):

$$w(t) = k\delta(t). \tag{3.4}$$

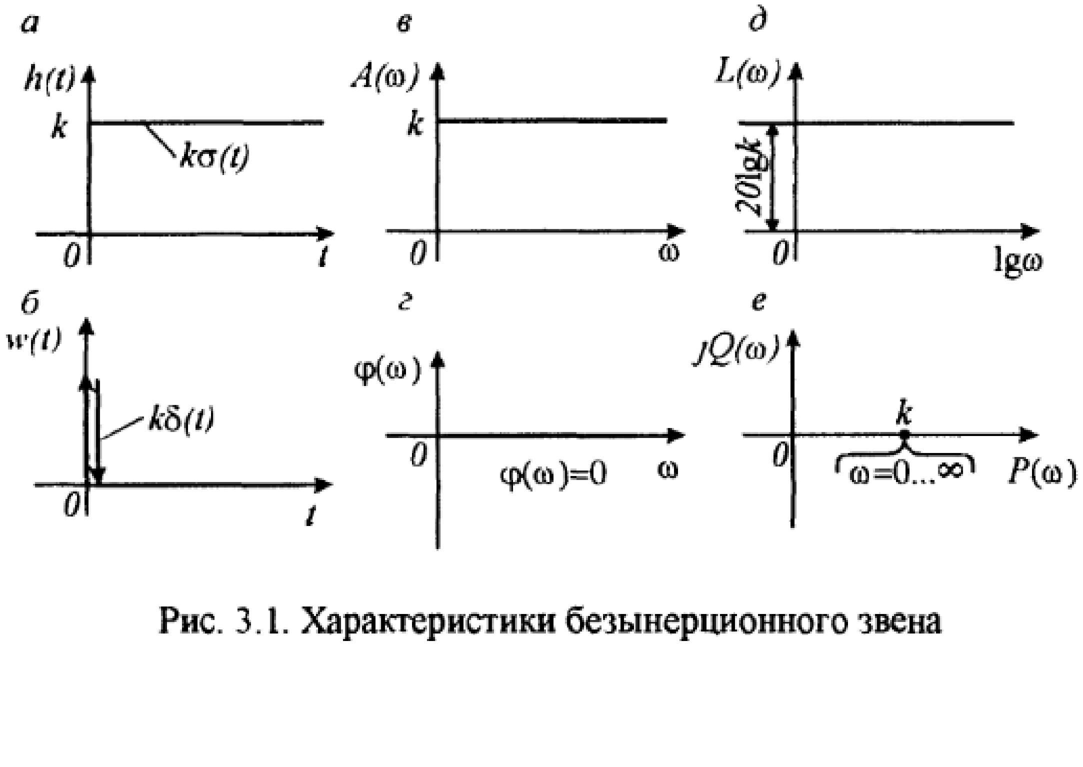


Рис. 3.1. Характеристики безынерционного звена

Уравнение звена в операторной форме:

$$Y(p) = kX(p), \tag{3.5}$$

отсюда ПФ

$$W(p) \stackrel{\Delta}{=} Y(p)/X(p) = k. \tag{3.6}$$

Амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) звена описывается функцией:

$$W(j\omega) = k, \tag{3.7}$$

которой на комплексной плоскости соответствует одна точка на действительной оси (рис. 3.1,е). Амплитудная частотная характеристика (АЧХ):

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = k \tag{3.8}$$

представляет собой прямую, параллельную оси частот (рис. 3.1,в).
Это означает, что сигналы любой частоты (от нуля до бесконечности) проходят через безынерционное звено с одинаковым отношением амплитуд входной и выходной величин, равным К. Выражение для фазовой частотной характеристики (ФЧХ) (рис. 3.1, г).

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \mathrm{arctg}(0/k) = 0 \tag{3.9}$$

Инерционное звено первого порядка

Дифференциальное уравнение звена имеет вид:

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t), \tag{3 14}$$

где *к* - передаточный коэффициент, характеризующий свойства звена в статическом режиме, Т - постоянная времени, характеризующая инерционность звена.

Переходную функцию звена можно найти как сумму общего и частного решений уравнения (3.14), получим следующее выражение для переходной функции:

$$h(t) = k\left(1 - e^{-t/T}\right)\sigma(t). \tag{3.15}$$

График переходной функции изображен на (рис. 3.3,а). Методами аналитической геометрии нетрудно убедиться в том, что касательная к кривой *h(t)* в точке t=0 отсекает на горизонтальной прямой *h*=*k* отрезок, равный постоянной времени *T*. Переходная функция при *t*=*T* равна 0,632*k*, при t=3T функция *h(t)* достигает значения 0.95*K*. В приближенных расчетах обычно считают, что при t=3T переходный процесс практически закончился.

Импульсная переходная функция звена может быть получена, как известно, путем дифференцирования функции *h(t)* Для инерционного звена первого порядка импульсная функция имеет вид (рис. 3.3,б).

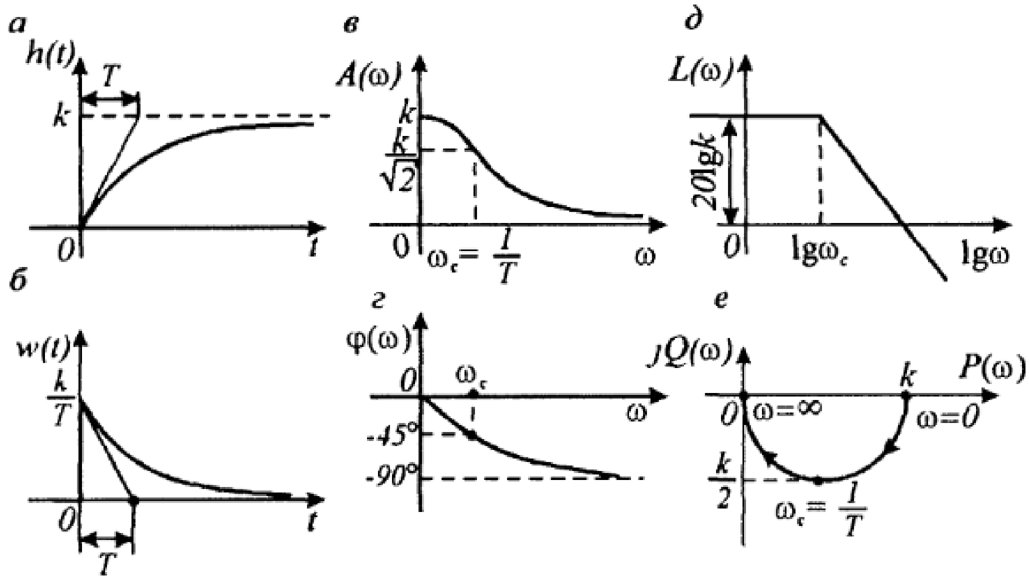


Рис 3 3 Характеристики инерционного звена первого порядка

Применяя к левой и правой частям уравнения (3.14) преобразование Лапласа, получим уравнение динамики звена в операторной форме:

$$[Tp+1]Y(p) = kX(p) \qquad (3\ 17)$$

Из уравнения (3 17) находим передаточную функцию звена:

$$W(p) \overset{\Delta}{=} Y(p)/X(p) = k/(Tp+1) \qquad (3\ 18)$$

Подставляя в передаточную функцию p=jω, получим АФХ:

$$W(j\omega) = k/(Tj\omega+1) \qquad (3\ 19)$$

Умножая числитель и знаменатель функции (3.19) на выражение *(1-jTω),* сопряженное со знаменателем, можно избавиться от величины j в знаменателе и представить АФХ в виде суммы действительной и мнимой частей:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \qquad (3\ 20)$$

$$\text{где}\quad \left.\begin{aligned} P(\omega) &= \mathrm{Re}\,W(j\omega) = k/\left(1+T^2\omega^2\right), \\ Q(\omega) &= \mathrm{Im}\,W(j\omega) = -kT\omega/\left(1+T^2\omega^2\right) \end{aligned}\right\} \qquad (3\ 21)$$

Выражения (3.21) можно рассматривать как уравнение АФХ *W(jω),* заданное в параметрической форме в системе координат P(ω) и *jQ(ω).* Роль третьей переменной (параметра) играет частота ω.

Если выразить мнимую составляющую *Q(ω)* через действительную *P(ω),* то можно убедиться, что АФХ представляет собой полуокружность с центром в точке *(k/2,0)* и с диаметром, равным *к* (рис 3.3,е).

Распределение точек, соответствующих различным значениям ω вдоль кривой W(jω), зависит от величины постоянной времени *T*. На графике показаны характерные точки ω=0, ω=∞ и $\omega_c = 1/T$.

Выражение для АЧХ для рассматриваемого звена:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = |k| / |Tj\omega + 1| = k / \sqrt{1 + T^2\omega^2} \qquad (3\ 22)$$

График функции A(ω) изображен на (рис. 3.3,в).

ФЧХ инерционного звена первого порядка:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left[Q(\omega)/P(\omega)\right] = \operatorname{arctg} \omega T. \qquad (3.23)$$

График функции (3.23) показан на (рис. 3.3,г). Чем больше частота входного сигнала, тем больше отставание по фазе выходной величины от входной.

На алгоритмических схемах инерционное звено первого порядка представляют либо в виде модели "вход-выход" (рис 3.4,а), либо в виде модели в переменных состояния (рис. 3.4,б).

При аналоговом моделировании рассматриваемое звено реализуют при помощи схемы набора, приведенной на (рис.3.4,в). Коэффициенты аналоговой модели (при единичном масштабе времени):

$$\alpha_1 = k/T, \quad \alpha_2 = 1/T \qquad (3\ 31)$$

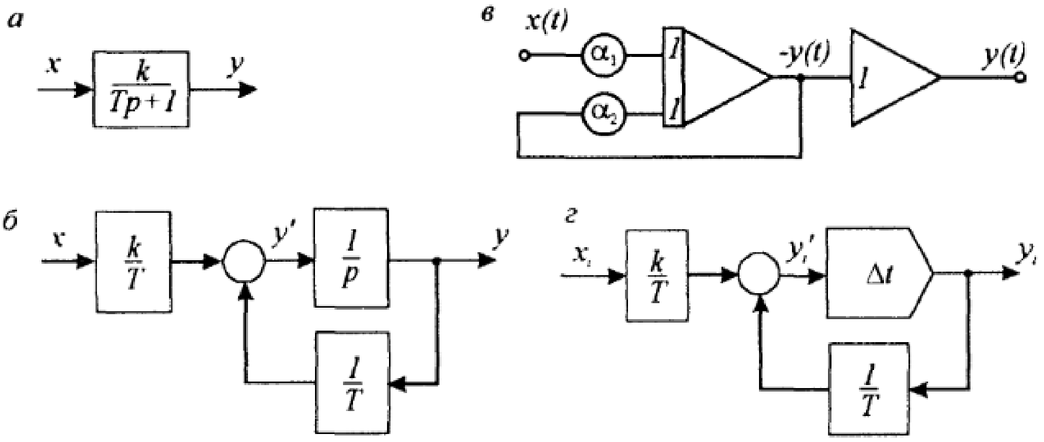


Рис. 3.4. Модели инерционного звена первого порядка

Цифровая модель звена может быть реализована в виде блок-схемы (рис. 3 4,г). соответствующей модели в переменных состояния (см.рис. 3.4,б) и содержащей цифровой интегратор с шагом интегрирования Δt.

Апериодическое звено второго порядка.

Дифференциальное уравнение звена:

$$T_2^2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+T_1\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=kx(t), \qquad (3.35)$$

ему соответствуют уравнение динамики в изображениях по Лапласу (или в операторной форме):

$$\left[T_2^2p^2+T_1p+1\right]Y(p)=kX(p) \qquad (3.36)$$

и передаточная функция:

$$W(p)\overset{\Delta}{=}Y(p)/X(p)=k/\left(T_2^2p^2+T_1p+1\right) \qquad (3.37)$$

Характеристическое уравнение звена:

$$T_2^2p^2+T_1p+1=0 \qquad (3.38)$$

имеет два корня

$$p_{1,2}=\left(-T_1\pm\sqrt{T_1^2-4T_2^2}\right)/2T_2^2 \qquad (3.39)$$

Общее решение дифференциального уравнения, определяющее свободное движение звена, имеет вид:

$$y(t)=C_1e^{p_1t}+C_2e^{p_2t} \qquad (3.40)$$

Характер переходного процесса звена зависит от вида корней (3.39), которые могут быть действительными или комплексными. Если $T_1>2T_2$, то оба корня действительные. Обозначим их:

$$p_1=-1/T_3, \quad p_2=-1/T_4. \qquad (3.41)$$

где T_3 и T_4 – некоторые условные постоянные времени, причем $T_3>T_4$

При $T_1>2T_2$, переходная функция звена имеет монотонный, апериодический характер. Поэтому звено в этом случае называют *апериодическим второго порядка*.

При $T_1>2T_2$ знаменатель передаточной функции (3.37) можно разложить на два множителя и представить ее в следующих двух эквивалентных формах:

$$W(p)=k/\left(T_3p+1\right)\left(T_4p+1\right), \qquad (3.42)$$

$$W(p)=\frac{T_3}{T_3-T_4}\,\frac{k}{T_3p+1}-\frac{T_4}{T_3-T_4}\,\frac{k}{T_4p+1}, \qquad (3.43)$$

согласно которым инерционное звено второго порядка (рис 3.6, а) можно представить либо как последовательное (рис 3.6, б), либо как параллельное (рис 3.6,в) соединение двух инерционных звеньев первого порядка.

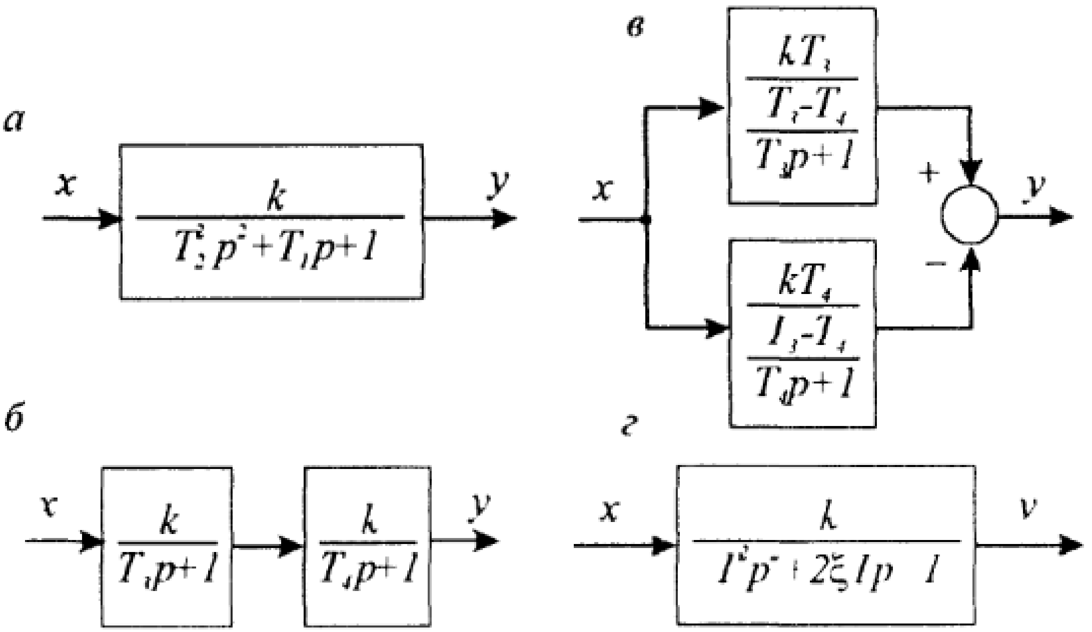


Рис 3 6 Алгоритмические схемы инерционных звеньев второго порядка

Переходная функция апериодического звена второго порядка может быть получена сложением общего решения (3.40) с частным решением, соответствующим вынужденной составляющей при x(t)=σ(t). Переходная функция имеет вид:

$$h(t) = C_1 e^{-t/T_3} + C_2 e^{-t/T_4} + k\sigma(t) \qquad (3.45)$$

Подставляя начальные условия:

$$h(0) = 0 \quad \text{и} \quad h'(0) = 0 \qquad (3.46)$$

в выражение (3.45). Находим:

$$C_1 = -kT_3\sigma(t)/(T_3 - T_4), \quad C_2 = -kT_4\sigma(t)/(T_3 - T_4) \qquad (3.47)$$

Тогда переходная функция:

$$h(t) = k\left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-t/T_3} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-t/T_4}\right)\sigma(t) \qquad (3.48)$$

Временные характеристики *h(t)* и w(t) апериодического десна показаны на рис 3.7,*а* и б. В соответствии с представлением апериодического звена второго порядка в виде последовательного соединения двух инерционных звеньев первого порядка (см рис 3.6, б) все его частотные характеристики (рис 3.7,в, г, *д, е)* могут быть получены по аналогичным характеристикам звеньев первого порядка, приведенным в 3.3.

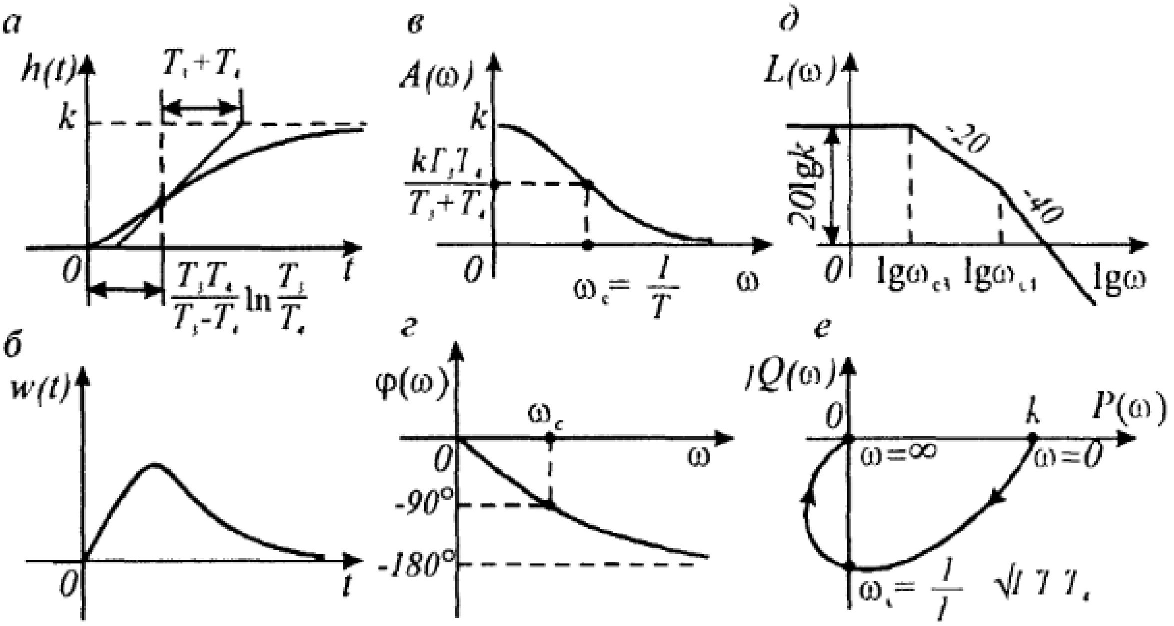


Рис 3 7 Характеристики апериодического звена второго порядка

Колебательное звено.

Если $T_1<2T_2$, то корни уравнения (3.38) комплексные

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta, \qquad (3.44)$$

где $\alpha = T_1/2T_2^2$, $\beta = \sqrt{4T_2^2 - T_1^2}\,/2T_2^2$

Решение (3.40) в этом случае содержит гармонические составляющие, и звено называют *колебательным.*

Наконец, возможен случай, когда $T_1=0$. При этом оба корня будут мнимыми, а переходная функция будет представлять собой незатихающую синусоиду. Инерционное звено второго порядка с $T_1=0$ называется *идеальным колебательным,* или *консервативным*.

Дифференциальное уравнение колебательного звена записывают в следующем виде:

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t), \qquad (3.49)$$

где $T=T_2$ – постоянная времени, характеризующая инерционность звена, $\xi = T_1/2T_2$ – относительный коэффициент демпфирования, характеризующий колебательность звена $(0 \le \xi \le 1)$

Передаточная функция колебательного звена:

$$W(p) \overset{\Delta}{=} Y(p)/X(p) = k/\left(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1\right) \qquad (3.50)$$

Корни соответствующего характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta = -(\xi/T) \pm j\sqrt{1-\xi^2}\,/T, \qquad (3.51)$$

где $\alpha = \xi/T$ – коэффициент затухания, $\beta = \sqrt{1-\xi^2}\,/T$ – круговая частота затухающих колебаний, рад/с

Подставляя в общее решение (3.40) значения комплексных корней (3.51) и складывая его с частным решением *kσ(t),* получим переходную функцию колебательного звена:

$$h(t) = C_1 e^{(-\alpha + j\beta)t} + C_2 e^{(-\alpha - j\beta)t} + k\sigma(t) \qquad (3.52)$$

Функцию (3.52) можно преобразовать к виду:

$$h(t) = Ce^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) + k\sigma(t) \qquad (3.53)$$

Используя начальные условия h(0) и h'(0)=0, найдем:

$$C = -k\sigma(t)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\Big/\beta = -k\sigma(t)\Big/\sqrt{1-\xi^2}\,, \qquad (3\ 54)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}(\beta/\alpha) = \arcsin\beta T = \arccos\xi \qquad (3\ 55)$$

Окончательно переходная функция может быть записана в следующей форме:

$$h(t) = k\left[1 - \frac{1}{\beta T}e^{-\alpha t}\sin(\beta t + \varphi)\right]\sigma(t) \qquad (3\ 56)$$

Свободная составляющая переходной функции (рис 3.8,а) представляет собой синусоиду, амплитуда которой убывает по экспоненциальной огибающей (пунктирная линия).

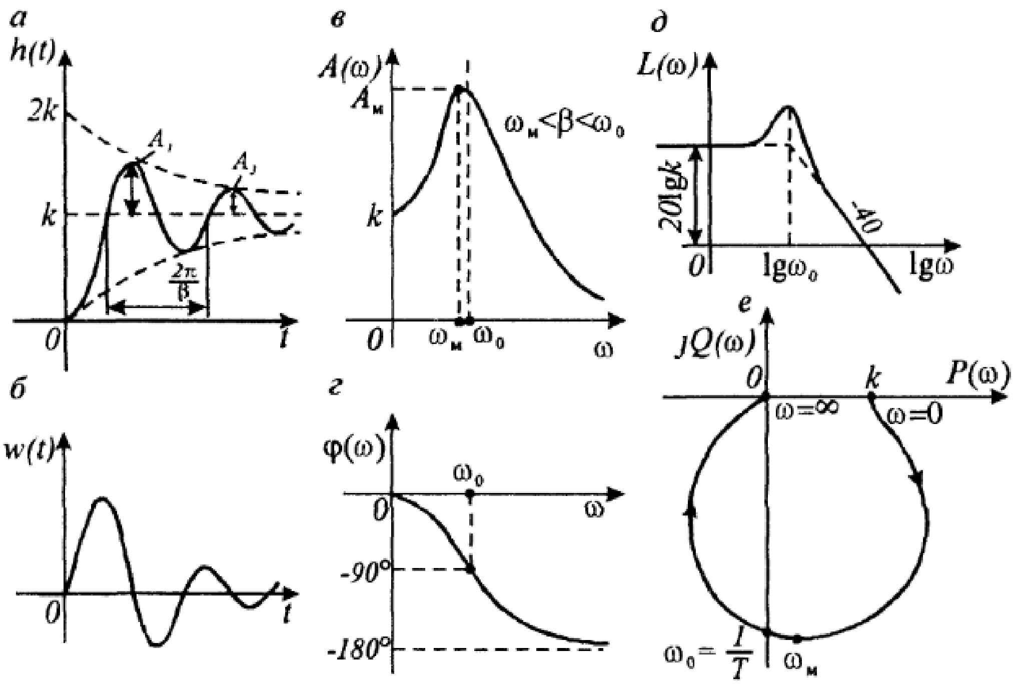


Рис 3 8 Характеристики колебательного звена второго порядка

АФХ колебательного звена (рис. 3.8,е) описывается функцией:

$$W(j\omega) = k\Big/\left[T^2(j\omega)^2 + 2\xi Tj\omega + 1\right], \qquad (3\ 63)$$

ей соответствуют АЧХ (рис. 3.8,в):

$$A(\omega) = k\Big/\sqrt{\left(1-T^2\omega^2\right)^2 + 4\xi^2T^2\omega^2} \qquad (3\ 64)$$

И ФЧХ (рис. 3.8,г):

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\left[2\xi T\omega\Big/\left(1-T^2\omega^2\right)\right] \qquad (3.65)$$

Интегрирующие звенья.

Различают два вида интегрирующих звеньев идеальные и реальные. Общей особенностью интегрирующих звеньев является пропорциональность производной выходной величины мгновенному значению входной величины. Причем, у идеального интегрирующего звена пропорциональность существует в любой момент времени после подачи ступенчатого воздействия, а у реального – только после завершения переходного процесса в звене.

Дифференциальное уравнение идеального интегрирующего звена:

$$\frac{dy(t)}{dt} = kx(t) \qquad (3\ 74)$$

Коэффициент пропорциональности k зависит от конструктивных параметров звена и имеет размерность:

$$[k] = [y]/[x][t] \qquad (3\ 75)$$

Уравнению (3.74) равносильно интегральное соотношение:

$$y(t) = k\int_0^t x(\vartheta)d\vartheta + y(0), \qquad (3\ 76)$$

которое в явной форме выражает зависимость выходной величины от входной и объясняет название звена, звено интегрирует входной сигнал.

Подставляя в соотношение (3.76)

$$x(\vartheta)=\sigma(t)$$

можно получить переходную функцию:

$$h(t) = kt\sigma(t) \qquad (3\ 77)$$

График функции $h(t)$ показан на рис.3.11,*а* (линия I).

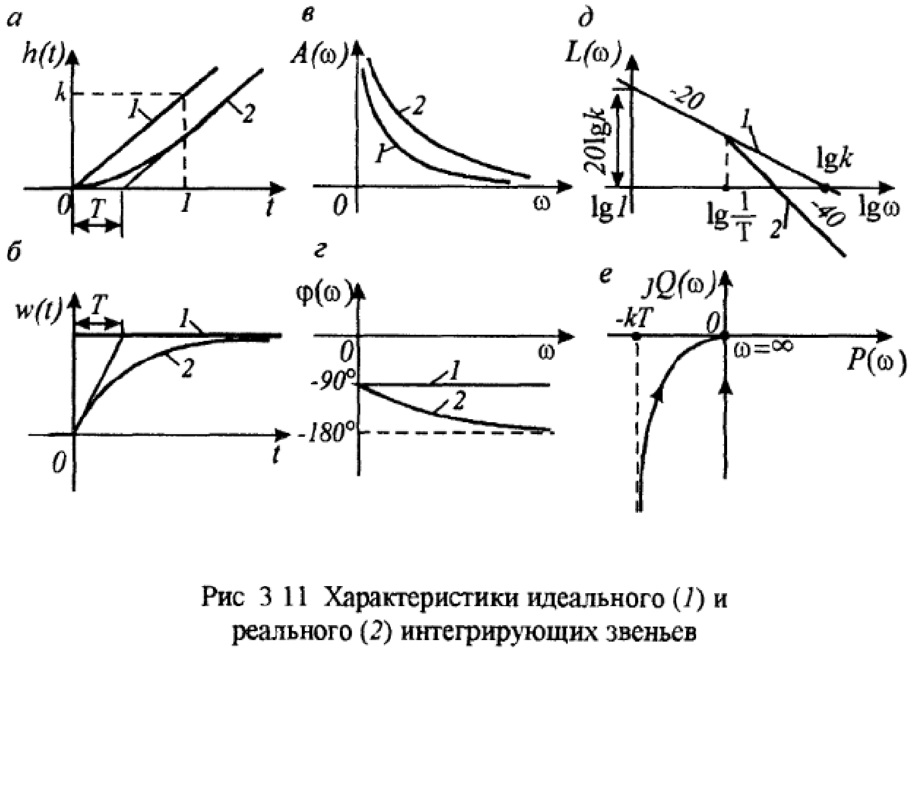


Рис 3 11 Характеристики идеального (*1*) и реального (*2*) интегрирующих звеньев

ПФ идеального интегрирующего звена:

$$W(p) = k/p \qquad (3\ 79)$$

АФХ звена:

$$W(j\omega) = k/j\omega = -jk/\omega \qquad (3\ 80)$$

на комплексной плоскости изображается в виде прямой, совпадающей с мнимой осью (рис 3 11,е - линия *I)/*
АЧХ:

$$A(\omega) = \left|W(j\omega)\right| = k/\omega \qquad (3\ 81)$$

представляет собой гиперболу (рис 3.11,в - линия I), которая при ω=0 стремится к бесконечности.
ФЧХ идеального интегрирующего звена:

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{-k/\omega}{0} = -90^\circ \qquad (3\ 82)$$

показывает, что сдвиг фаз, создаваемый звеном, на всех частотах одинаков и равен -90° (рис 3.11,г - линия I).

Рассмотрим теперь характеристики реального интегрирующего звена. Его дифференциальное уравнение:

$$T\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = kx(t), \qquad (3.84)$$

а передаточная функция:

$$W(p) = k/p(Tp+1). \qquad (3.85)$$

Нетрудно заметить, что звено с передаточной функцией (3.85) может рассматриваться как последовательное соединение двух элементарных звеньев (рис. 3.12,а): идеального интегрирующего с передаточной функцией 1/*p* и статического инерционного звена первого порядка с постоянной времени Т и передаточным коэффициентом k. Поэтому вес частотные характеристики реального интегрирующего звена могут быть получены по характеристикам этих простых звеньев, по соответствующим правилам перемножения комплексных (векторных) величин.

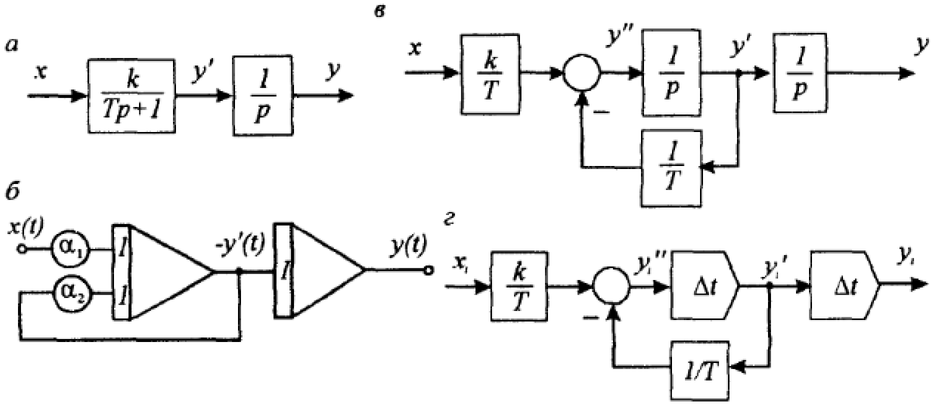


Рис. 3.12. Модели реального интегрирующего звена

Модели "вход - выход" реального интегрирующего звена, изображенной на (рис. 3.12,а), соответствуют модели: в переменных состояния (рис. 3.12,в), аналоговая (рис. 3.12,б) и цифровая (рис. 3.12,г).

Дифференцирующие звенья.

Дифференцирующие звенья могут быть идеальными (безынерционными) и реальными (инерционными). Мгновенное значение выходной величины идеального дифференцирующего звена пропорционально в каждый момент времени мгновенному значению входной величины.

$$y(t) = k\frac{dx(t)}{dt}. \qquad (3.93)$$

Коэффициент пропорциональности k зависит от конструктивных параметров звена и имеет размерность:

$$[k] = [y][t]/[x]. \qquad (3.94)$$

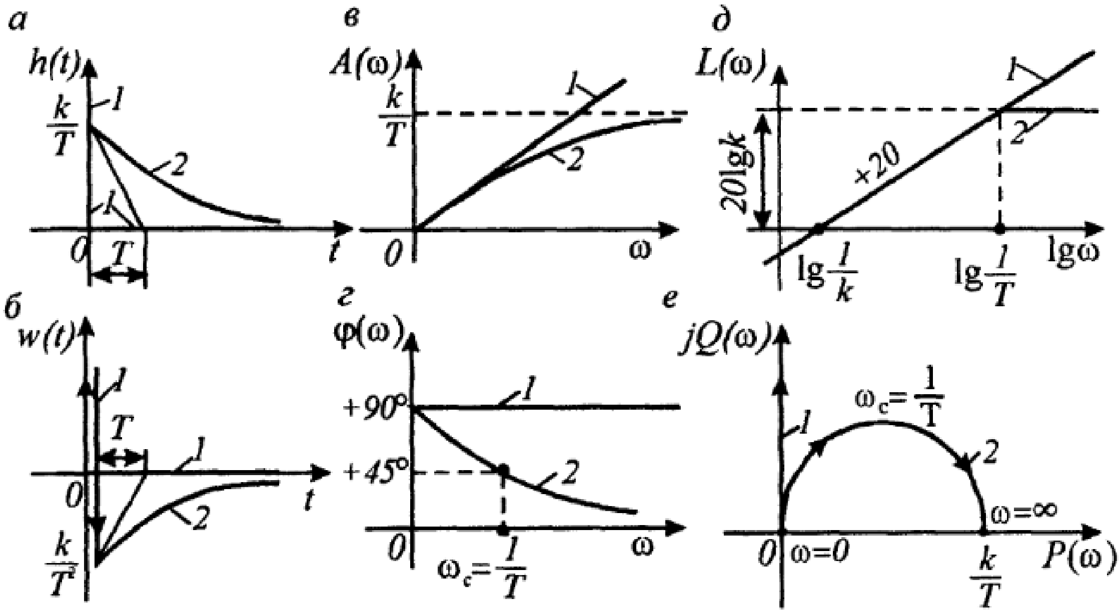


Рис. 3.14. Характеристики идеального (1) и реального (2) дифференцирующих звеньев

Переходная функция звена получается непосредственно из уравнения (3.93) - подстановкой и дифференцированием единичной ступенчатой функции:

$$h(t) = k\delta(t). \qquad (3.95)$$

График переходной функции идеального дифференцирующего звена показан на рис. 3.14,а (линия 1).

Импульсная переходная функция (рис. 3.14,б-линия1).

$$w(t) = kd\delta(t)/dt. \qquad (3.96)$$

Передаточная функция звена:

$$W(p) = kp. \qquad (3.97)$$

Амплитудно-фазовая функция

$$W(j\omega) = kj\omega \qquad (3.98)$$

совпадает с положительной частью мнимой оси (рис. 3.14,е – линия 1).

АЧХ звена

$$A(\omega) = k\omega \qquad (3.99)$$

показывает (рис. 3 14,в - линия 1), что чем больше частота входного сигнала, тем больше амплитуда выходного сигнала. Эта особенность дифференцирующих звеньев вытекает непосредственно из основного уравнения (3.93): чем быстрее изменяется во времени сигнал x(t), тем больше его производная в правой части и тем больше выходной сигнал *y(t).*

Сдвиг фаз, создаваемый идеальным дифференцирующим звеном, на всех частотах одинаков (рис. 3.14,г - линия 1).

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{k\omega}{0} = +90^\circ. \qquad (3.100)$$

Реальное дифференцирующее звено представляет собой последовательное соединение идеального дифференцирующего звена и инерционного звена первого порядка (рис. 3.15,а).

Его уравнение:

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k\frac{dx(t)}{dt}, \qquad (3.102)$$

а передаточная функция:

$$W(p) = kp/(Tp+1). \qquad (3.103)$$

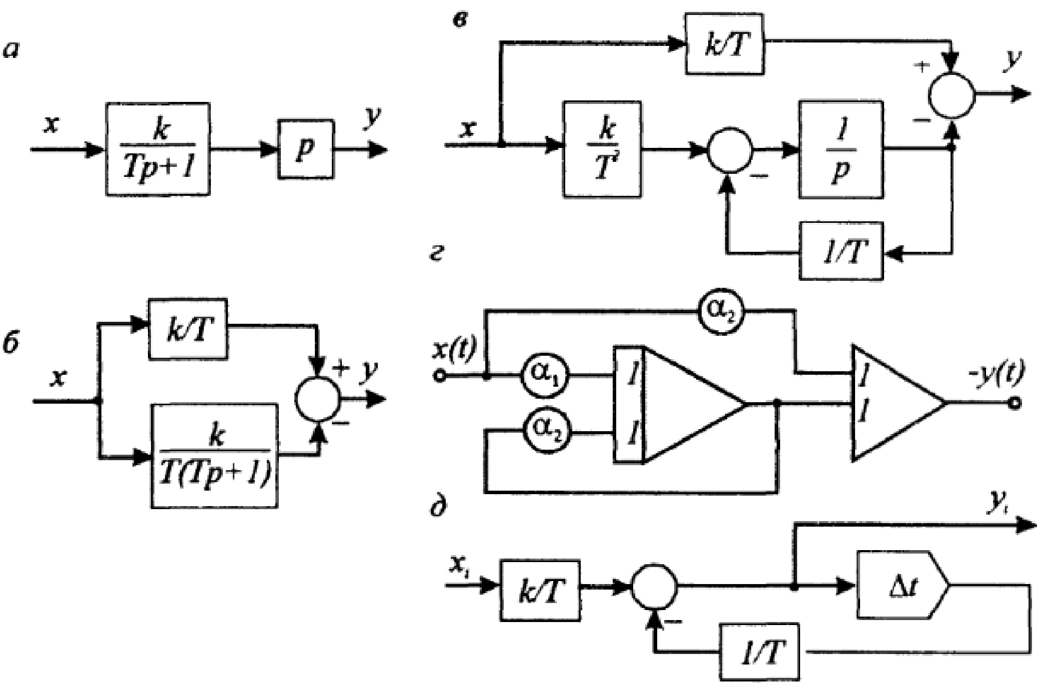


Рис. 3.15. Модели реального дифференцирующего звена

Нетрудно убедиться, что звено с передаточной функцией (3.103) можно представить и в виде параллельного соединения безынерционного и инерционного звеньев (рис. 3.15,б).

Временные характеристики *h(t)* и *w(t)* реального дифференцирующего звена показаны на рис. 3.14,а и *б* линиями *2*.

Аналитические выражения для частотных характеристик реального дифференцирующего звена можно получить по соответствующим функциям идеального дифференцирующего и инерционного звеньев первого порядка Графики этих характеристик показаны линиями *2* на рис 3 14,б,в,*г,д.*

На рис 3.15 приведены модели реального дифференцирующего звена в переменных состояния (в), аналоговая (г) и цифронан *(д).* Коэффициенты аналоговой модели:

$$\alpha_1 = k/T^2; \quad \alpha_2 = 1/T; \quad \alpha_3 = k/T. \qquad (3.104)$$

Звено чистого транспортного запаздывания.

Звено запаздывания так же, как безынерционное статическое звено, передает сигнал со входа на выход без искажения его формы. Однако все мгновенные значения входной величины выходная величина принимает с некоторым отставанием (запаздыванием).

Уравнение звена запаздывания:

$$y(t) = x(t-\tau)\ , \qquad (3.108)$$

где τ – длительность запаздывания.

Уравнение (3.108) не является дифференциальным и относится к классу особых уравнений со смещенным (запаздывающим) аргументом. Оно указывает, что выходной сигнал *y(t)* повторяет все изменения входного сигнала x(t) но с отставанием на время τ.

Подставляя x(t)=σ(t), можно сразу получить его переходную функцию:

$$h(t) = \sigma(t-\tau), \qquad (3.109)$$

а подставляя x(t)=δ(t), - импульсную:

$$w(t) = \delta(t-\tau). \qquad (3.110)$$

Обе эти временные характеристики показаны на рис. 3.17,(а и б). Уравнение (3.108) в изображениях по Лапласу:

$$Y(p) = X(p)e^{-p\tau}\ , \qquad (3.111)$$

отсюда ПФ звена:

$$W(p) \overset{\Delta}{=} Y(p)/X(p) = e^{-p\tau}. \qquad (3.112)$$

АФХ звена

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = \cos\omega\tau - j\sin\omega\tau \qquad (3.113)$$

представляет собой окружность с центром в начале координат и с радиусом, равным единице (рис. 3.*17,е).*

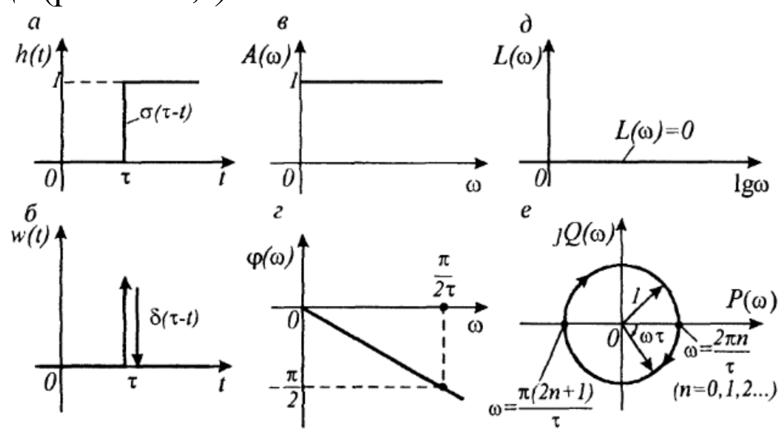


Рис. 3.17. Характеристики звена запаздывания

У рассматриваемого звена АЧХ (рис. 3.17,в):

$$A(\omega) = 1 = \text{const} \qquad (3.114)$$

и ФЧХ (рис. 3.17,г):

$$\varphi(\omega) = -\omega\tau. \qquad (3.115)$$

Виды соединений типовых звеньев.

Алгоритмическая структура любой СУ представляет собой комбинацию трех типовых соединений элементов: последовательного, параллельного и встречно-параллельного (охват обратной связью). Если эти соединения состоят из элементов направленного действия, то каждое соединение может быть по простым правилам заменено одним элементом, статические и динамические свойства которого эквивалентны свойствам всего соединения.

При *последовательном соединении* (рис. *2.19,а)* выходная величина каждого предыдущего элемента является входным воздействием для последующего элемента. Если элементы линейны и в статике характеризуются передаточными коэффициентами k_1, k_2, ... k_i, ... k_n, то, согласно определению передаточного коэффициента, можно записать систему равенств:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= k_1 x_1 = k_1 x; \\ y_2 &= k_2 x_2 = k_2 y_1; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_i &= k_i x_i = k_i y_{i-1}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= k_n x_n = k_n y_{n-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.136)$$

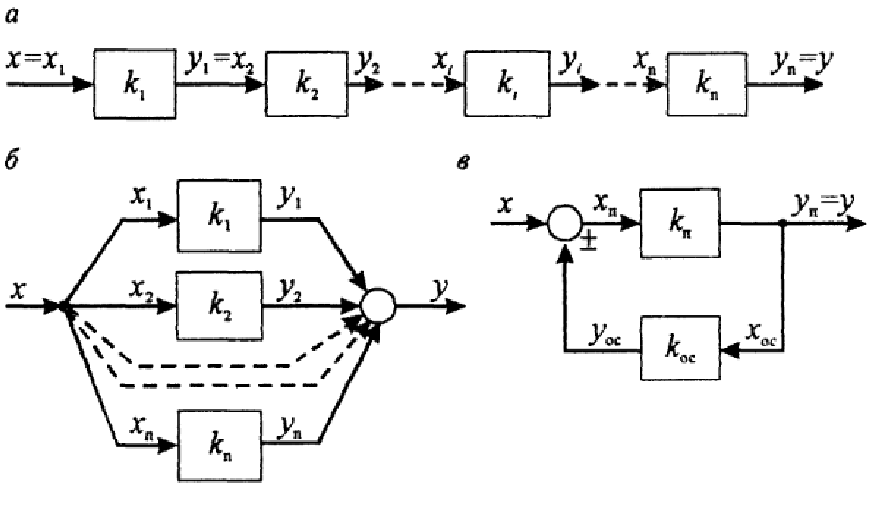


Рис. 2.19. Типовые соединения линейных элементов:

а – последовательное; *б* – параллельное;
в – встречно-параллельное (с обратной связью)

Исключая из (2.136) промежуточные переменные y_1, y_2, .. y_{i-1},.. y_i, ... y_n, — получим равенство:

$$y = k_1 k_2 .. k_i ... k_n x, \qquad (2.137)$$

из которого следует, что ПК эквивалентного элемента:

$$k_э = y/x = k_1 k_2 .. k_i .. k_n y = \prod^n k_i \, . \qquad (2.138)$$

Таким образом, *общий ПК последовательно соединенных элементов равен произведению передаточных коэффициентов этих элементов. Размерность общего передаточного коэффициента равна произведению размерностей коэффициентов*.

Так как при последовательном соединении выход каждого предыдущего элемента является входом последующего, то передаточные коэффициенты всех элементов должны определяться путем линеаризации статических характеристик в точках, соответствующих одному и тому же режиму.

Параллельным соединением называют такое соединение, при котором на вход всех элементов поступает одно и то же воздействие, а их выходные величины (с соответствующими знаками) суммируются (рис 2.19*,б)*. Согласно этому определению:

$$x = x_1 = x_2 = ... = x_i = ... = x_n; \qquad (2.139)$$

$$y = y_1 + y_2 + ... + y_i + ... + y_n. \qquad (2.140)$$

Подставляя в (2.140) уравнения статики отдельных элементов

$$y_i = k_i x_i, \qquad (2.141)$$

получим:

$$y = (k_1 + k_2 + ... + k_i + ... + k_n)x. \qquad (2.142)$$

Отсюда следует, что *эквивалентный ПК параллельно соединенных линейных элементов равен сумме передаточных коэффициентов элементов:*

$$k_э = \sum_{i=1}^{n} k_i . \qquad (2.143)$$

Отмстим, что суммирование сигналов y_1 в одной точке возможно лишь в том случае, если они имеют одинаковую размерность. Поэтому коэффициенты всех параллельно соединенных элементов и их общий коэффициент *k*, всегда имеют одну и ту же размерность.

Встречно-параллельным соединением двух элементов (соединением с обратной связью) называют такое соединение, при котором выходной сигнал первого элемента поступает на вход второго, а выходной сигнал второго элемента с соответствующим знаком суммируется с общим входным сигналом (рис. 2.19.в). Первый элемент, в котором направление передачи сигнала совпадает с направлением передачи общего сигнала, называют *элементом прямой цепи.* Второй элемент, у которого направление передачи сигнала противоположно направлению передачи общего сигнала, называют *элементом обратной связи.*

В зависимости от знака сигнала обратной связи различают положительные и отрицательные обратные связи. Если сигнал обратной связи y_{oc} суммируется (на схеме знак "+") с общим входным сигналом х, то обратная связь является *положительной.* Если сигнал обратной связи вычитается из общего сигнала (на схеме знак "-"), то обратная связь является *отрицательной.*

Рассмотрим статические свойства соединения с обратной связью. Пусть элементы прямой и обратной связи линейны и характеризуются коэффициентами k_n и k_{oc}. Тогда, согласно определению понятия «обратная связь», можно записать уравнения:

прямой цепи

$$y = k_{п} x_{п}\,; \tag{2.144}$$

обратной связи

$$y_{oc} = k_{oc} y\,; \tag{2.145}$$

и узла суммирования

$$x_{п} = x \mp y_{oc}. \tag{2.146}$$

Подставляя выражение (2.145) в (2.146), а затем выражение (2.146) в (2.144), получим уравнение статики всего соединения с обратной связью:

$$y = x k_{п} / (1 \pm k_{п} k_{oc}). \tag{2.147}$$

Отсюда эквивалентный ПК:

$$k_{э} = k_{п} / (1 \pm k_{п} k_{oc}), \tag{2.148}$$

где знак "+" соответствует отрицательной обратной связи, а знак "-" положительной. Формула (2.148) выражает одно из фундаментальных правил теории управления:

эквивалентный ПК элемента, охваченного отрицательной обратной связью, равен коэффициенту прямой цепи, разделенному на единицу плюс произведение коэффициентов прямой и обратной связи.

Размерность эквивалентного ПК равна размерности коэффициента k_n, Произведение коэффициентов $k_n k_{oc}$ всегда безразмерно.

Из выражения (2.148) следует, что отрицательная обратная связь уменьшает эквивалентный коэффициент, а положительная - увеличивает.

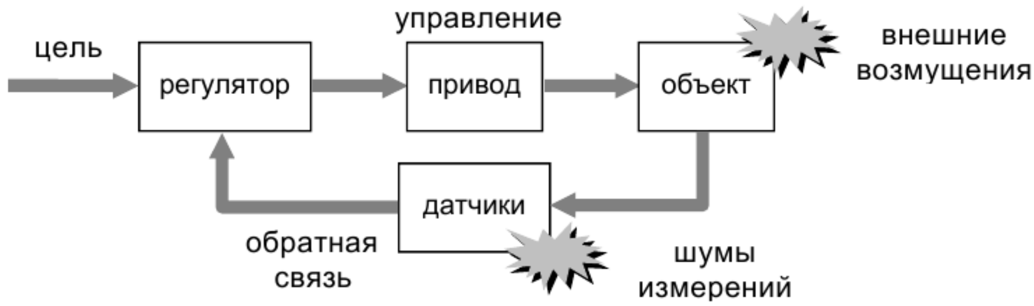
Структурная схема автоматической системы регулирования (АСР).

Итак, в типичную систему управления входят объект, регулятор, привод и датчики. Однако, набор этих элементов – еще не система. Для превращения в систему нужны каналы связи, через них идет обмен информацией между элементами. Для передачи информации могут использоваться электрический ток, воздух (пневматические системы), жидкость (гидравлические системы), компьютерные сети.

Взаимосвязанные элементы – это уже система, которая обладает (за счет связей) особыми свойствами, которых нет у отдельных элементов и любой их комбинации. Основная интрига управления связана с тем, что на объект действует окружающая среда – внешние возмущения, которые «мешают» регулятору выполнять поставленную задачу. Большинство возмущений заранее непредсказуемы, то есть носят случайный характер.

Кроме того, датчики измеряют параметры не точно, а с некоторой ошибкой, пусть и малой. В этом случае говорят о «шумах измерений» по аналогии с шумами в радиотехнике, которые искажают сигналы.

Подводя итого, можно нарисовать структурную схему системы управления так:



Например, в системе управления курсом корабля

- объект управления – это сам корабль, погруженный в воду; для управления его курсом используется руль, изменяющий направление потока воды;
- регулятор – цифровая вычислительная машина;
- привод – рулевое устройство, которое усиливает управляющий электрический сигнал и преобразует его в поворот руля;
- датчики – гироскопическая система, определяющая фактический курс;
- внешние возмущения – это морское волнение и ветер, отклоняющие корабль от заданного курса;
- шумы измерений – это ошибки датчиков.

Информация в системе управления как бы «ходит по кругу»: регулятор выдает сигнал управления на привод, который воздействует непосредственно на объект; затем информация об объекте через датчики возвращается обратно к регулятору и все начинается заново. Говорят, что в системе есть обратная связь, то есть регулятор использует информацию о состоянии объекта для выработки управления. Системы с обратной связью называют замкнутыми, поскольку информация передается по замкнутому контуру.

Передаточные функции АСР.

Пд
Рж

Законы регулирования. П-регулятор. ПИ-регулятор. ПИД-регулятор. Достоинства и недостатки регуляторов.

Рассмотрим теперь типовые алгоритмы управления (законы регулирования), применяемые в линейных СУ.

Простейший закон регулирования реализуется при помощи безынерционного звена с ПФ:

$$W_{\text{р}}(p) = y(p)/\varepsilon(p) = k_{\text{п}} = k_{\text{р}}. \qquad (4.61)$$

Согласно выражению (4.61) управляющее воздействие и в статике, и в динамике пропорционально сигналу ошибки ε. Поэтому такой закон регулирования называется *пропорциональным* (П).

Достоинства П-регулятора - простота и быстродействие, недостатки - ограниченная точность (особенно при управлении объектами с большой инерционностью н запаздыванием).

Закон регулирования, которому соответствует ПФ:

$$W_{\text{р}}(p) = k_{\text{и}}/p = k_{\text{р}}/T_{\text{и}}p, \qquad (4\ 62)$$

называется *интегральным* (И). При интегральном законе регулирования управляющее воздействие v в каждый момент времени пропорционально интегралу от сигнала ошибки ε. Поэтому И-регулятор реагирует главным образом на длительные отклонения управляемой величины от заданного значения. Кратковременные отклонения сглаживаются таким регулятором.

Достоинства интегрального закона - лучшая (по сравнению с пропорциональным законом) точность в установившихся режимах (см. 4.4). Недостатками интегрального закона регулирования являются худшие свойства в переходных режимах: меньшее быстродействие и большая колебательность.

Наибольшее распространение в промышленной автоматике получил *пропорционально-интегральный* (ПИ) закон регулирования:

$$W_{\text{р}}(p) = k_{\text{п}} + k_{\text{и}}/p = k_{\text{р}} + k_{\text{р}}/T_{\text{и}}p = k_{\text{р}}(T_{\text{и}}p + 1)/T_{\text{и}}p. \qquad (4.63)$$

Благодаря наличию интегральной составляющей ПИ-закон регулирования обеспечивает высокую точность в установившихся режимах, а при определенном соотношении коэффициентов $k_п$ и $k_и$ закон обеспечивает хорошие показатели и в переходных режимах.

Наилучшее быстродействие достигается при *пропорционально-дифференциальном* (ПД) законе регулирования:

$$W_{\text{р}}(p) = k_{\text{п}} + k_{\text{д}}p = k_{\text{р}}(T_{\text{д}}p + 1). \qquad (4.64)$$

ПД-регулятор реагирует не только на величину сигнала ошибки, но и на скорость его изменения. Благодаря этому при управлении достигается эффект упреждения. Недостатком пропорционально-дифференциального закона регулирования является ограниченная точность.

Наиболее гибким законом регулирования (в классе линейных законов) является пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД) закон:

$$W_р(p) = k_п + \frac{k_и}{p} + k_д p = k_р \frac{T_и p + 1 + T_и T_д p^2}{T_и p}, \qquad (4.65)$$

или

$$W_р(p) = k_р{}' \frac{\left(T_и{}' p + 1\right)\left(T_д{}' p + 1\right)}{T_и{}' p} = k_р{}' \frac{T_и{}' p + T_д{}' p}{T_и{}'} + \frac{k_р{}'}{T_и{}' p} + k_р{}' T_д{}' p, \qquad (4.66)$$

который сочетает в себе преимущества более простых законов (4.61-4.64).

Коэффициенты и постоянные времени, входящие в ПФ типовых регуляторов, называются настроечными параметрами и имеют следующие наименования: $k_п$, $k_и$, $k_д$ – коэффициенты пропорциональной, интегральной и дифференциальной частей; $k_р$, $k_р{}'$ – передаточные коэффициенты регулятора; $T_и$,$T_и{}'$ – постоянные времени дифференцирования.

Параметры, входящие в различные записи (4.65) и (4.66) ПИД-закона, связаны между собой соотношениями

$$k_п = k_р = k_р{}'\left(T_и{}' p + T_д{}' p\right)\Big/T_и{}'; \quad k_и = k_р/T_и = k_р{}'\Big/T_и{}'; \quad k_д = k_р T_д = k_р{}' T_д{}', \qquad (4.67)$$

из которых следует, что $k_р \neq k_р{}'$, $T_и \neq T_и{}'$, $T_д = T_д{}'$.

Устойчивость линейных СУ.

Одной из важнейших характеристик СУ наряду с точностью является ее устойчивость. Причем если показатели точности определяют степень полезности и эффективности системы, то от устойчивости зависит работоспособность системы. Система, не обладающая устойчивостью, вообще не способна выполнять функции управления и имеет нулевую или даже отрицательную эффективность (т.е. система вредна). Неустойчивая СУ может привести объект в аварийное состояние. Поэтому проблема устойчивости систем является одной из центральных в теории управления.

Раскроем вначале физический смысл понятия «устойчивость» Устойчивость СУ - это свойство системы возвращаться в исходное состояние равновесия после прекращения воздействия, выведшего ее из этого состояния. Неустойчивая система не возвращается в исходное состояние, а непрерывно удаляется от него.

Наглядное представление о понятии «устойчивость» дает рис 5.1, на котором показаны три вида равновесия механической системы *а* - устойчивое; *б* - нейтральное, *в* – неустойчивое.

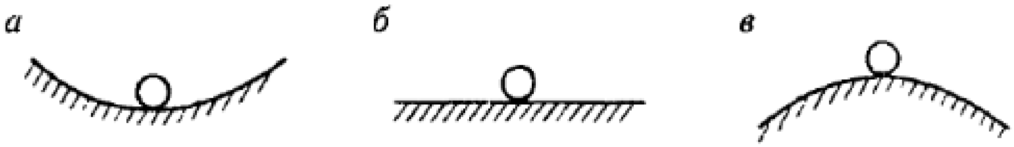


Рис. 5.1. Виды равновесия механической системы

Неустойчивость замкнутой СУ возникает, как правило, из-за неправильного или очень сильного действия главной обратной связи. Возникающую при этом неустойчивость называют *статической.*

Более сложным и более распространенным видом неустойчивости является *динамическая неустойчивость.* Она проявляется в системах с отрицательной обратной связью, при достаточно большом значении передаточного коэффициента разомкнутого контура *(k* > 8) и при количестве инерционных звеньев, не меньшем трех.

Рассмотрим теперь математическую *сущность* устойчивости и неустойчивости. Согласно данному выше физическому определению, устойчивость зависит только от характера свободного движения системы. Свободное движение линейной или линеаризованной системы описывается однородным дифференциальным уравнением

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} x(t)}{dt^{n-2}} + \ldots + a_0 x(t) = 0, \qquad (5.1)$$

где $x(t) = x_c(t)$ – свободная составляющая выходной величины системы.

Дадим математическое определение понятия «устойчивость». Система является устойчивой, если свободная составляющая $x_c(t)$ переходного процесса с течением времени стремится к нулю, т. е. если

$$\lim_{t\to\infty} x_c(t) = 0. \tag{5.2}$$

Устойчивость в смысле условия (5.2) принято называть *асимптотической.*

Если свободная составляющая неограниченно возрастает, т. е. если

$$\lim_{t\to\infty} x_c(t) = \infty, \tag{5.3}$$

то система *неустойчива.*

Наконец, если свободная составляющая не стремится ни к нулю, ни к бесконечности, то система находится на границе устойчивости.

Корневой метод определения устойчивости линейных СУ.

Найдем общее условие, при кагором система, описываемая уравнением (5.1), устойчива. Решение уравнения (5.1) при отсутствии у него одинаковых корней равно сумме:

$$x_c(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{p_k t}, \tag{5.4}$$

где C_k – постоянные, зависящие от начальных условий; p_k – корни характеристического уравнения

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \ldots + a_0 = 0. \tag{5.5}$$

Корни характеристического уравнения могут быть действительными ($p_k = \alpha_k$), мнимыми ($p_k = j\beta_k$) и комплексными

$$p_k = \alpha_k \pm j\beta_k, \tag{5.6}$$

причем комплексные корни всегда попарно сопряжены между собой: если есть корень с положительной мнимой частью, то обязательно существует корень с такой же по модулю, но отрицательной мнимой частью.

Переходная составляющая (5.4) при $t \to 0$ стремится к нулю лишь в том случае, если каждое слагаемое вида $C_k e^{p_k t}$ стремится к нулю. Характер этой функции времени зависит от вида корня p_k. Рассмотрим все возможные случаи расположения корней p_k на комплексной плоскости (рис. 5.2) и соответствующие им функции $x_k(t)$,которые на рис. 5.2 показаны внутри кружочков.

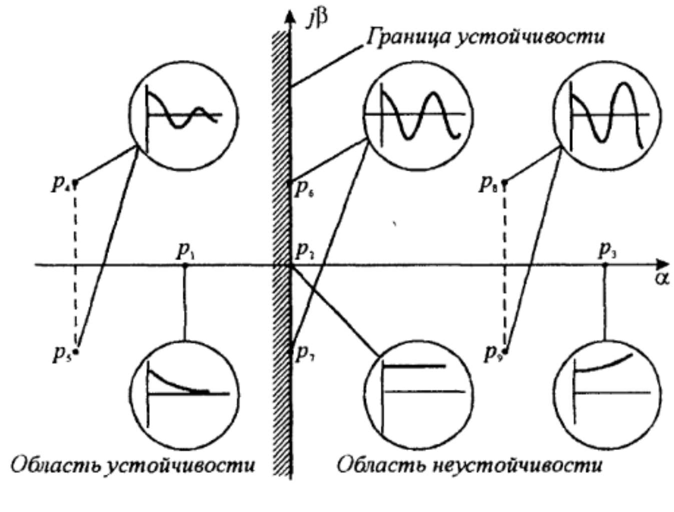


Рис 5 2 Влияние корней характеристического уравнения СУ на составляющие ее свободного движения

1 Каждому действительному корню $p_k = \alpha_k$ в решении (5.4) соответствует слагаемое вида

$$x(t) = C_k e^{\alpha_k t}. \qquad (5.7)$$

Если $\alpha_k < 0$ (на рис. 5.1 корень *p_1*), то функция (5.7) при $t \to 0$ стремится к нулю. Если $\alpha_k > 0$ (корень *p_3*), то функция (5.7) неограниченно возрастает. Если $\alpha_k = 0$ (корень p_2), то эта функция остается постоянной.

На основании приведенного анализа можно сформулировать общее условие устойчивости:

для устойчивости линейной СУ необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех корней характеристического уравнения системы были отрицательными.

Критерии устойчивости СУ. Алгебраический критерий устойчивости Гурвица.

Наибольшее распространение в инженерной практике получили критерии Гурвица и Рауса. Ниже приводятся формулировки и методика применения этих критериев без доказательства их справедливости.

Гурвиц разработал свой критерий, решая чисто математическую задачу — задачу исследования устойчивости решений линейного дифференциального уравнения.

Применительно к задачам теории управления критерий Гурвица можно сформулировать так: *линейная СУ, описываемая характеристическими уравнением*

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \quad + a_0 = 0\,, \qquad (5\ 10)$$

устойчива, если положительны все n+1 коэффициентов a, и все n определителей Δ_i *вида.*

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \ldots a_{2i-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 \ldots a_{2i-2} \\ 0 & a_1 & a_3 \,..\, a_{2i-3} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & \ldots\ldots & a_{i-2} a_i \end{vmatrix}\,, \quad i = 1; 2; \ldots n. \qquad (5.11)$$

Если хотя бы один из определителей (5.11), называемых определителями Гурвица, отрицателен, то система неустойчива.

Матрицы (5.11), по которым вычисляют определители Гурвица Δ_i, составляют следующим образом на главной диагонали записывают все коэффициенты характеристического уравнения от a_1 до a_i, (в порядке возрастания индекса), затем в каждом столбце выше диагональных коэффициентов записывают коэффициенты с последовательно возрастающими индексами, а ниже - с последовательно убывающими индексами, на место коэффициентов с индексами больше *n* или меньше нуля проставляют нули. При этом каждая *i-я* матрица получается квадратной размером i x i.

Всегда главный определитель Δ_n:

$$\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1}. \qquad (5.12)$$

Если главный определитель $\Delta_n = 0$, а все остальные определители положительны, то система находится на *границе устойчивости*. С учетом выражения (5.12) это условие распадается на два:

$$a_0 = 0 \ \text{ или } \ \Delta_{n-1} = 0. \qquad (5.13)$$

Условию $a_0 = 0$ соответствует один нулевой корень, т. е. апериодическая граница устойчивости, а условию $\Delta_{n-1} = 0$ - пара мнимых корней, т.е. колебательная граница устойчивости.

Рассмотрим частные случаи критерия Гурвица для n = 1; 2; 3; 4. Раскрывая определители, фигурирующие в общей формулировке критерия, можно получить следующие условия

Для уравнения первого порядка (n = 1)

$$a_1 p + a_0 = 0 \tag{5.14}$$

условие устойчивости

$$a_0 > 0 \text{ и } a_1 > 0. \tag{5.15}$$

т.е. положительность коэффициентов уравнения является в данном случае необходимым и достаточным условием.

Для уравнения второго порядка (n = 2)

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0 \tag{5 16}$$

условие устойчивости

$$a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1 > 0, a_2 > 0. \tag{5.17}$$

Таким образом, и для системы второго порядка необходимое условие устойчивости (положительность коэффициентов) является одновременно и достаточным.

Для уравнения третьего порядка (n = 3)

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0 \tag{5.19}$$

условие устойчивости

$$\left.\begin{array}{r} a_0 > 0; \quad \Delta_1 = a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; \Delta_3 = a_0 \Delta_2 > 0. \end{array}\right\} \tag{5.20}$$

Последнее неравенство при $a_0 > 0$ эквивалентно неравенству $\Delta_2 > 0$. Следовательно, для системы третьего порядка, кроме положительности всех коэффициентов, требуется, чтобы $\Delta_2 > 0$. Учитывая выражение для Δ_2 можно сформулировать следующее мнемоническое правило оценки устойчивости систем третьего порядка:

| *произведение средних коэффициентов уравнения должно быть* | *больше произведения крайних.*

Для уравнения четвертого порядка (n = 4):

$$a_4p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0, \qquad (5.22)$$

кроме положительности всех коэффициентов, требуется выполнение условия:

$$\Delta_3 = a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 > 0 . \qquad (5.23)$$

Нетрудно доказать, что при положительности всех коэффициентов условие (5.23) обеспечивает выполнение и условия $\Delta_2 > 0$.

Таким образом,

для устойчивости систем не выше четвертого порядка необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения и определительΔ_{n-1} *были положительны.*

Критерий Гурвица целесообразно применять для анализа устойчивости систем не выше пятого порядка. При $n > 5$ вычисление определителей становится громоздким.

Частотные критерии устойчивости. Критерий устойчивости Михайлова. Критерий устойчивости Найквиста.

Критерий устойчивости Михайлова

Критерий Михайлова относится к группе частотных критериев устойчивости. Критерий Михайлова так же, как и критерий Гурвица и Рауса, основан на анализе характеристического уравнения системы, и поэтому с его помощью можно судить об устойчивости и замкнутых, и разомкнутых систем.

Пусть левая часть характеристического уравнения, называемая *характеристическим полиномом,* имеет вид:

$$F(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0. \qquad (5.34)$$

Подставим в этот полином вместо переменного *p* чисто мнимый корень, который в дальнейшем будем обозначать jω. Тогда получим функцию комплексного переменного:

$$F(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_0. \qquad (5.35)$$

которую можно так же. как амплитудно-фазовую характеристику, представить в виде суммы действительной и мнимой частей:

$$F(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega). \qquad (5\ 36)$$

Действительная часть *P(ω)* содержит только четные степени переменного ω:

$$P(\omega) = a_0 - a\omega^2 + a\omega^4 - \ldots, \qquad (5.37)$$

а мнимая часть *Q(ω)* - только нечетные:

$$Q(\omega) = a\omega - a\omega^3 + \ \ldots\ . \qquad (5.38)$$

Каждому фиксированному значению переменного ω соответствует комплексное число, которое можно изобразить в виде вектора на комплексной плоскости. Если теперь изменять параметр ω от 0 до ∞, то конец вектора *F(jω)* опишет некоторую линию (рис 5.3,а), которая называется *характеристической кривой,* или *годографом Михайлова.* По виду этой кривой можно судить об устойчивости системы.

Формулировка критерия Михайлова такова:

линейная СУ, описываемая уравнением n-го порядка, устойчива,если при изменении ω от 0 до ∞ характеристический вектор системы F(jω) повернется против часовой стрелки на угол nπ/2, не обращаясь при этом в нуль.

Это означает, что характеристическая кривая устойчивой системы должна при изменении ω от 0 до ∞ пройти последовательно через *n* квадрантов. Из выражений (5.37) и (5.38) следует, что кривая F(jω) всегда начинается в точке на действительной оси, удаленной от начала координат на величину a_0.

На рис 5.3,б приведены характеристические кривые, соответствующие устойчивым системам. Кривые имеют плавную спиралеобразную форму и уходят в бесконечность в том квадранте, номер которого равен порядку уравнения. Если характеристическая кривая проходит *n* квадрантов не последовательно или проходит меньшее число квадрантов, то система неустойчива (рис 5.3,в).

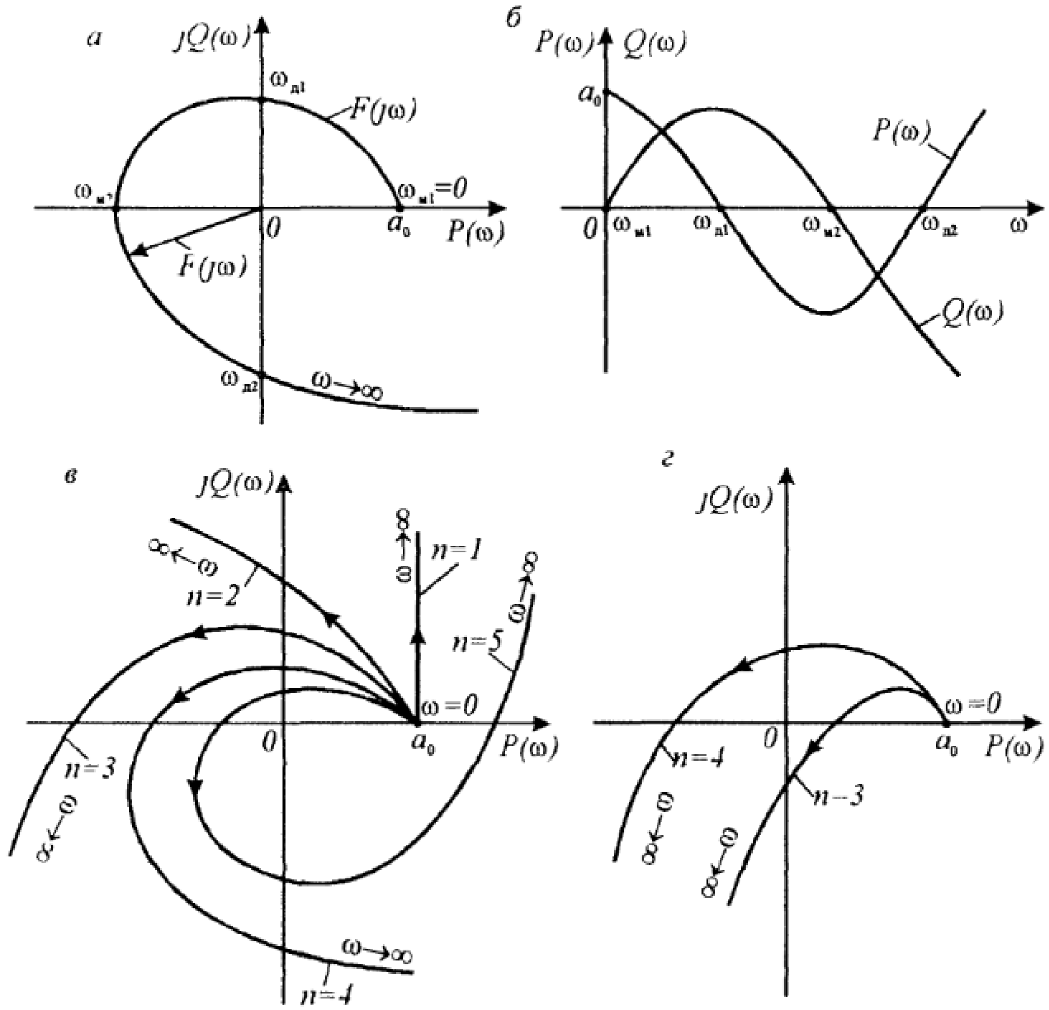


Рис 5 3 Характеристические кривые (годографы) Михайлова

Критерий устойчивости Найквиста.

В отличие от критериев Гурвица и Михайлова, которые основаны на анализе характеристического уравнения системы, критерий Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по АФХ ее разомкнутого контура. В этом заключается существенное преимущество критерия, т.к. построение АФХ разомкнутого контура для большинства реальных систем оказывается проще, чем построение годографа Михайлов. Основная формулировка критерия Найквиста:

система управления устойчива, если АФХ W(jω) разомкнутого контура не охватывает точку с координатами (-1;j0).

Эта формулировка справедлива для систем, которые в разомкнутом состоянии устойчивы. Таковыми являются большинство реальных систем, состоящих из устойчивых элементов.

На рис. *5.5,а* изображены АФХ разомкнутого контура, соответствующие трем различным случаям: 1 - система устойчива, 2 - система находится на колебательной границе устойчивости; 3 - система неустойчива.

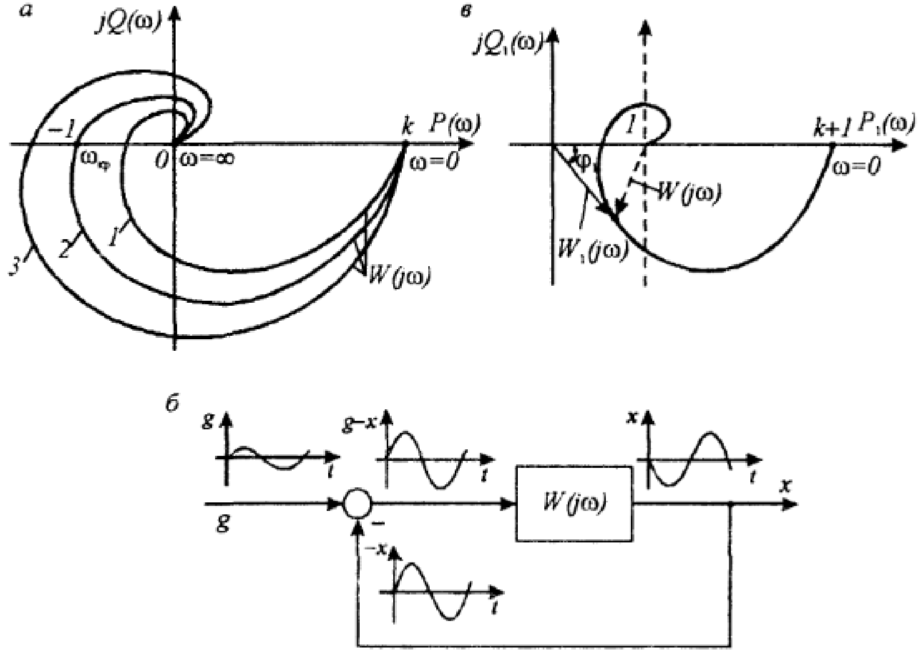


Рис. 5.5. АФХ разомкнутого контура (*а*) и физическая трактовка критерия Найквиста (*б*)

Цифровые СУ. Основные понятия. Классификация сигналов и систем.

Различают аналоговые сигналы (рис. 1а), определенные при любых значениях времени t внутри рассматриваемого интервала, и дискретные сигналы, определенные только в дискретные моменты времени t_0, t_1, t_2…..(рис. 1б).

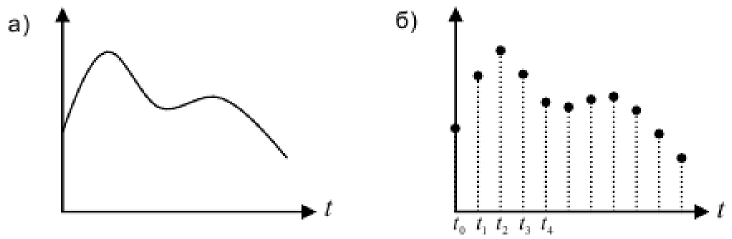


Рис. 1. Аналоговый (а) и дискретный (б) сигналы

Системы, в которых информация передается с помощью аналоговых сигналов, называются аналоговыми или непрерывными системами. Для описания их динамики используются дифференциальные уравнения.

Передача информации в дискретных системах осуществляется с помощью дискретных сигналов, которые можно рассматривать как последовательности чисел. Примером дискретной системы служит цифровой компьютер. Для описания дискретных систем используются разностные уравнения, которые определяют законы преобразования числовых последовательностей.

Термином цифровые системы будем обозначать системы, в которых цифровой регулятор используется для управления непрерывным объектом. Поскольку такие системы включают непрерывные и дискретные элементы, их часто также называют непрерывно-дискретными или аналого-цифровыми. Цифровые системы представляют собой особый класс систем управления. Наличие разнородных элементов вызывает значительные сложности при математическом описании процессов. Анализ и синтез цифровых систем с помощью классических методов, разработанных для непрерывных или дискретных систем, дает, как правило, только приближенные решения.

Разомкнутые и замкнутые цифровые СУ. Цифровой компьютер.

Рис. 2. Разомкнутая цифровая система

Цифровые системы управления можно разделить на два класса: разомкнутые и замкнутые. Цель управления в обоих случаях — обеспечить требуемые значения управляемых величин.

В разомкнутой системе компьютер получает только командные сигналы (задающие воздействия), на основе которых вырабатываются сигналы управления, поступающие на объект.

Использование такого (программного) управления возможно только в том случае, если модель процесса известна точно, а значения управляемых величин полностью определяются сигналами управления. При этом невозможно учесть влияние внешних возмущений и определить, достигнута ли цель управления.

В замкнутых системах используется обратная связь, с помощью которой управляющий компьютер получает информацию о состоянии объекта управления. Это позволяет учитывать неизвестные заранее факторы: неточность знаний о модели процесса и влияние внешних возмущений. Поэтому в большинстве технических систем управления используется обратная связь. В компьютер может также поступать информация об измеряемых возмущениях, что позволяет улучшить качество управления.

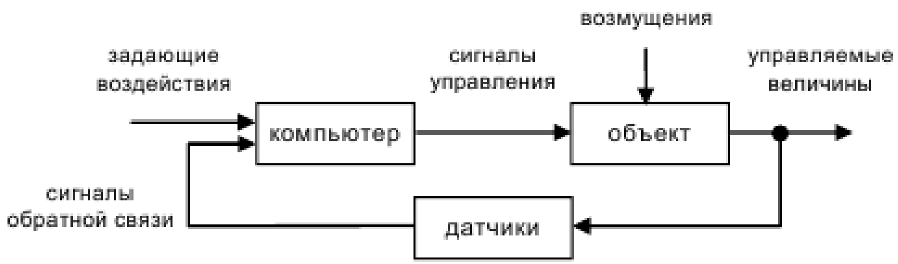


Рис. 3. Замкнутая цифровая система

Цифровой компьютер

Рассмотрим подробно компьютер, входящий в состав замкнутой цифровой системы управления (рис. 4). Здесь и далее аналоговые сигналы обозначаются сплошными линиями, а дискретные (числовые последовательности) — точечными.

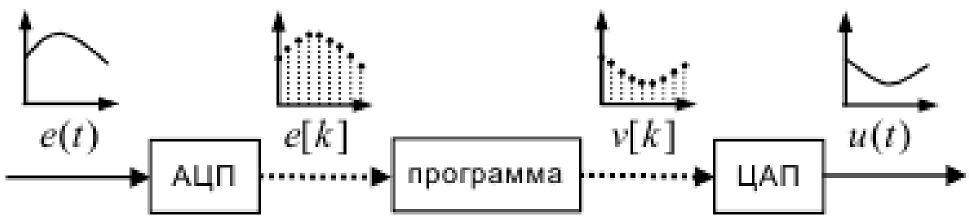


Рис. 4. Блок-схема цифрового компьютера

Аналоговые входные сигналы (задающие воздействия, сигнал ошибки, сигналы обратной связи с датчиков) поступают на аналого-цифровой преобразователь (АЦП), где преобразуются в цифровую форму (двоичный код). В большинстве случаев АЦП выполняет это преобразование периодически с некоторым интервалом T , который называется интервалом квантования или периодом квантования. Таким образом, из непрерывного сигнала выбираются дискретные значения e[k]=e(kT) при целых k = 0,1, … , образующие последовательность {e[k]}.

Этот процесс называется квантованием. Таким образом, сигнал на выходе АЦП можно трактовать как последовательность чисел.

Вычислительная программа в соответствии с некоторым алгоритмом преобразует входную числовую последовательность {e[k]} в управляющую последовательность {v[k]}.

Цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) восстанавливает непрерывный сигнал управления по последовательности {e[k]}. Чаще всего ЦАП работает с тем же периодом, что и АЦП на входе компьютера. Однако для расчета очередного управляющего сигнала требуется некоторое время, из-за этого возникает так называемое вычислительное запаздывание. На практике принято это запаздывание относить к непрерывной части системы и считать, что АЦП и ЦАП работают не только синхронно (с одинаковым периодом), но и синфазно (одновременно).

Особенности цифровых систем. Методы исследования цифровых СУ.

Особенности цифровых систем:

Очевидно, что основные характерные черты цифровых систем управления связаны с наличием компьютера (цифрового устройства) в составе системы. Главные преимущества цифровой управляющей техники сводятся к следующему:

- используется стандартная аппаратура;
- нет дрейфа параметров, характерного для аналоговых элементов;
- повышается надежность и отказоустойчивость;
- существует возможность реализации сложных законов
- управления, в том числе логических и адаптивных;
- гибкость, простота перестройки алгоритма управления.

Методы исследования цифровых систем

В современной теории управления существует три группы методов исследования цифровых систем :

1) методы, основанные на приближенном сведении цифровой системы к чисто непрерывной системе, при этом игнорируются все процессы, связанные с квантованием и наличием цифровых элементов;

2) методы, которые сводятся к исследованию дискретной модели цифровой системы, при этом рассматриваются только значения сигналов в моменты квантования и игнорируются все процессы между этими моментами;

3) точные методы исследования, при которых цифровая система рассматривается в непрерывном времени без каких-либо упрощений и аппроксимаций.

При использовании методов первой и второй групп гибридная непрерывно-дискретная система фактически подменяется другой, более простой, что может привести к качественно неверным результатам.

С другой стороны, точные методы проектирования, используют весьма сложный математический аппарат и поэтому пока не получили широкого распространения в инженерной практике. Их применение особенно важно в сложных случаях, например, при относительно больших интервалах квантования.

Виды квантования сигналов. Квантование по времени и по уровню.

Квантование по времени и уровню

Квантование состоит в том, что аналоговый сигнал заменяется последовательностью его значений в дискретные моменты времени.

В цифровых системах присутствует два типа квантования: квантование по времени и квантование по уровню (рис. 5).

В результате *квантования по времени* из аналогового сигнала выбираются только его значения в моменты квантования, чаще всего периодически через некоторый интервал T , который называется периодом квантования. При этом все значения сигнала между моментами квантования игнорируются, т.е., при квантовании происходит потеря информации. Системы с квантованием по времени называют импульсными.

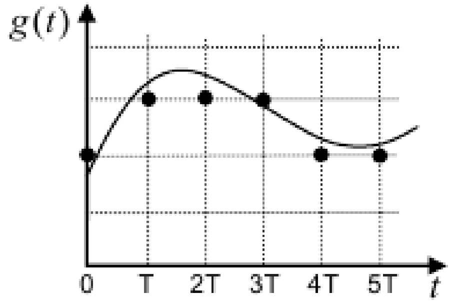


Рис. 5. Квантование по времени и по уровню

Квантование по уровню связано с тем, что АЦП и ЦАП имеют конечное число двоичных разрядов (чаще всего от 8 до 16). Это значит, что на выходе АЦП можно получить только ограниченное число различных кодовых значений (256 для 8-разрядного ЦАП и 65536 для 16-разрядного). Поэтому при квантовании значения входного сигнала искажаются (округляются). Квантование по уровню представляет собой нелинейную операцию, и при малом количестве разрядов АЦП и ЦАП в замкнутой системе могут возникать автоколебания. Системы с квантованием по уровню относят к классу релейных систем.

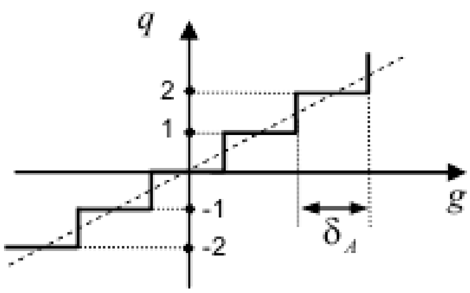


Рис. 6. Нелинейная характеристика АЦП

На рис. 6 изображена нелинейная характеристика АЦП, который преобразует непрерывный сигнал g в код q . Если δA — ширина «ступеньки», то максимальная ошибка, вызванная линеаризацией (штриховая линия на рис. 6), составляет δA / 2 .

В инженерных расчетах цифровая система чаще всего линеаризуется и далее рассматривается как линейная импульсная система, а квантование по уровню учитывается как эквивалентная случайная помеха.

Аналогично учитывается квантование в ЦАП на выходе компьютера.

Далее мы будем рассматривать только идеальное квантование по времени, т.е., периодическую выборку дискретных отсчетов сигнала без искажения их значений.

Пусть $g(t)$ — аналоговый сигнал, определенный при $t \geq 0$.

Через $\{g[k]\}$ обозначим последовательность значений:

$$g[0], g[1], g[2], \ldots, \qquad (1)$$

полученную в результате его квантования с периодом T, т.е.,

$g(k)=g(kT)$ при целых $k \geq 0$.

Если сигнал $g(t)$ терпит разрыв в моменты квантования, будем считать, что

$$g[k]=g(kT+0), \qquad (2)$$

т.е., при квантовании фиксируется предельное значение справа.

Теорема Котельникова-Шеннона. Эффект поглощения частот.

С теоретической точки зрения интересно, когда можно (и можно ли вообще) точно восстановить непрерывный сигнал по дискретным измерениям? Ответ на этот вопрос дает теорема Котельникова-Шеннона, согласно которой возможность восстановления определяется частотными свойствами сигнала и частотой квантования $\omega_s = 2\pi/T$.

Теорема Котельникова-Шеннона.

Непрерывный сигнал, спектр которого равен нулю вне интервала $(-\omega_{max},\omega_{max})$, однозначно представляется своими значениями в равноотстоящих точках, если $\omega_s > 2\omega_{max}$. Непрерывный сигнал может быть восстановлен по формуле:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k] \frac{\sin \omega_s (t-kT)/2}{\omega_s (t-kT)/2} . \qquad (3)$$

Таким образом, непрерывный сигнал теоретически может быть восстановлен по дискретным измерениям, если его максимальная частота ωmax меньше частоты Найквиста $\omega_N=\omega_s/2=\pi/T$. Например, для восстановления синусоидального сигнала надо брать отсчеты чаще, чем два раза за период функции.

Если кроме значений самого сигнала g(t) в моменты квантования известны также и значения его производных, частота квантования может быть уменьшена. Так при известных производных теоретически достаточно использовать квантование с частотой $\omega_s > \omega_{max}$.

Эффект поглощения частот

Если частота ω_{max}, ограничивающая спектр непрерывного сигнала, больше частоты Найквиста, непрерывный сигнал нельзя однозначно восстановить по дискретным измерениям.

Рассмотрим, что происходит при квантовании сигнала $g(t)=-\sin 1{,}8\pi t$ с периодом T =1 . Его угловая частота, равная $\omega_0=1{,}8\pi$, больше частоты Найквиста $\omega_N = \pi$, т.е. условия теоремы Котельникова-Шеннона нарушены.

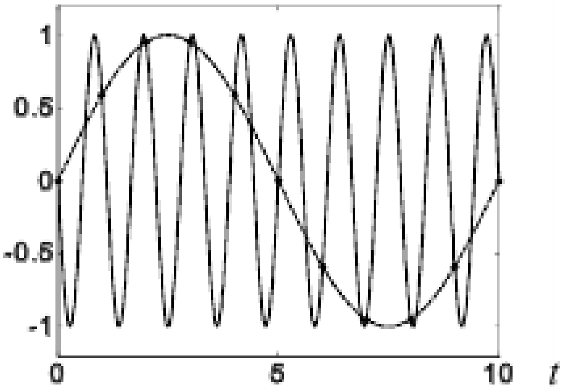


Рис. 7. Эффект поглощения частот при квантовании

График изменения сигнала $g(t)$ во времени показан сплошной линией на рис. 7. Точками отмечены значения сигнала в моменты квантования, которые точно ложатся на синусоиду $g_1(t)=-\sin 0{,}2\pi t$ (штриховая линия). Учитывая периодичность

синуса и равенство $2\pi = \omega_s T$, при целых k получаем

$$-\sin\omega_0 kT = \sin(2\pi k - \omega_0 kT) = \sin[(\omega_s - \omega_0 kT])).$$

В данном случае $\omega_0 = 1{,}8\pi$ и $\omega_s - \omega_0 = 0{,}2\pi$, поэтому мы не сможем отличить сигналы $g(t)$ и $g_1(t)$ по дискретным отсчетам. Говорят, что угловая частота $0{,}2\pi$ поглощает частоту $1{,}8\pi$. В общем случае любая частота ω из диапазона $0 \leq \omega < \omega_N$ поглощает частоты

$$\omega_s \pm \omega,\ 2\omega_s \pm \omega,\ 3\omega_s \pm \omega,\ \ldots,$$

т.е., эти частоты в спектре входного сигнала после квантовании неотличимы от частоты ω.

Как правило, спектры реальных сигналов не равны нулю в области частот выше частоты Найквиста, поэтому в результате эффекта поглощения частот высокочастотные помехи проявляются на низких частотах. Системы управления динамическими объектами обычно строятся так, чтобы реагировать только на низкочастотные и среднечастотные возмущения. Из-за эффекта поглощения частот регулятор будет реагировать на высокочастотные помехи, что крайне нежелательно. Поэтому на входе цифровой части устанавливаются фильтры низкой частоты, которые отфильтровывают высокочастотные помехи перед квантованием.

Цифровые законы управления.

Описание работы цифровой части

Рассмотрим блок-схему компьютера, показанную на рис. 4. Входным сигналом для программы является последовательность значений {e[k]}, поступающих с выхода АЦП. Программа управления представляет собой некоторое правило (алгоритм), по которому входная последовательность {e[k]} преобразуется в управляющую последовательность {v[k]}.

На момент $t_k = kT$ компьютеру доступны текущее и все предыдущие значения входного сигнала

$$\ldots, e[k-2], e[k-1], e[k], \qquad (4)$$

а также предыдущие значения управляющего сигнала

$$\ldots, v[k-3], v[k-2], v[k-1].$$

Задача программы — построить очередное значение

$$v[k] = \Im(e[k], e[k-1], \ldots, v[k-1], v[k-2], \ldots), \qquad (5)$$

где $\Im(K)$ — некоторая функция своих аргументов.

Поскольку в (5) не используются будущие значения входного сигнала, такой закон управления называется физически реализуемым. Это значит, что его можно реализовать в реальной системе без «предсказания будущего».

Линейные законы управления

Линейным называется закон цифрового управления (5), в который все величины входят линейно, т.е., просто умножаются на коэффициенты и складываются.

Линейный закон, при котором используются только значения входной последовательности:

$$v[k] = a_0e[k] + a_1e[k-1] + \ldots + a_ne[k-N], \qquad (6)$$

где $a_i (i = 0, \ldots, N)$ — числовые коэффициенты, называется скользящим средним (СС).

Линейный закон управления, при котором используются только предыдущие значения выходной последовательности и последнее значение входа:

$$v[k] + b_1v[k-1] + \ldots + b_nv[k-N] = e[k],$$

где $b_i (i = 1, \ldots, N)$ — числовые коэффициенты, называется авторегрессионным процессом (АР).

Линейный закон управления общего вида, при котором используются предыдущие значения входной и выходной последовательностей:

$$\begin{aligned} v[k] + b_1v[k-1] + \ldots + b_Nv[k-N] = \\ a_0e[k] + a_1e[k-1] + \ldots + a_Ne[k-N] \end{aligned} \qquad (7)$$

где $a_i (i = 0, \ldots, N)$ и $b_i (i = 1, \ldots, N)$ — числовые коэффициенты, называется авторегрессионным процессом со скользящим средним (АРСС).

Уравнения вида (7), связывающие две числовые последовательности, называются линейными разностными уравнениями. Это название связано с тем, что они могут быть записаны в форме:

$$\beta_N \nabla^N v[k] + \beta_{N-1} \nabla^{N-1} v[k] + \ldots + \beta_0 v[k] =$$
$$\alpha_N \nabla^N e[k] + \alpha_{N-1} \nabla^{N-1} e[k] + \ldots + \alpha_0 e[k],$$

где α_i и β_i $(i = 0, \ldots, N)$ – коэффициенты, а $\nabla^\ell g[k]$ для любой последовательности $\{g[k]\}$ обозначает обратную разность порядка ℓ:

$$\nabla \; g[k] = g[k] - g[k-1],$$
$$\nabla^2 g[k] = \nabla g[k] - \nabla g[k-1],$$
$$\ldots$$
$$\nabla^\ell g[k] = \nabla^{\ell-1} g[k] - \nabla^{\ell-1} g[k-1]$$