Числовые и функциональные ряды. Функции нескольких переменных. Двойные и криволинейные интегралы.

Составители: А.Я.Казаков, В.М.Корчевский.
Рецензенты: Фарафонов В.Г.

Методические указания и контрольные работы N 3
для студентов 1 курса заочной формы обучения
технических специальностей.

Государственный университет аэрокосмического приборостроения,
С.-Петербург 190000, Большая Морская, 67.

.

1 Указания по выполнению контрольных работ

Студент выполняет контрольные работы по варианту, номер которого получается из следующей формулы: следует разделить номер учебного шифра на 20, остаток от деления - номер варианта (если остаток 0, то номер варианта - 20).

При оформлении и выполнении контрольных работ следует:

1. В начале работы ясно написать фамилию студента, инициалы, номер студенческого билета, шифр, номер контрольной работы.

2. Контрольная работа выполняется в тетрадке, а не на листах, обязательно чернилами или шариковой ручкой (но не красными) с полями для замечаний рецензента.

3. Решения задач контрольной работы располагаются в порядке номеров, указанных в контрольных заданиях. Перед решением задачи должно быть полностью переписано ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует заменить данные задачи конкретными из своего варианта.

4. Решения задач и пояснения к ним должны быть подробными, аккуратными, без сокращений слов. Чертежи можно выполнять от руки.

Контрольные работы, выполненные с нарушениями изложенных правил или выполненные не по своему варианту, не засчитываются и возвращаются без проверки.

Получив из университета прорецензированную работу, студент должен исправить в ней все отмеченные ощибки и недочеты. Если работа не зачтена, она должна быть в короткий срок либо выполнена заново целиком, либо должны быть заново решены задачи, не зачтенные рецензентом. Зачтенные контрольные работы предъявляют преподавателю на экзамене.

2 Числовые ряды

Пусть $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, ...$ — последовательность действительных чисел.

Определение. Выражение $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ обозначают символом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

и называют числовым рядом. При этом элементы последовательности $\{a_n\}$ называют членами ряда. Центральный вопрос данного раздела анализа - вопрос о сходимости ряда, т.е. о смысле выражения (1).

Определение. Сумму $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ называют частичной суммой ряда.

Определение. Если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда имеет конечный предел, то ряд называют сходящимся. При этом предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ называют суммой ряда и записывают $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Если последовательность $\{S_n\}$ не имеет предела, или предел бесконечен, ряд называют расходящимся.

Пример.

Рассмотрим последовательность $a_n = \theta^n$, известный как геометрическая прогрессия. Для нее известно: $S_n = \frac{\theta - \theta^{n+1}}{1-\theta}$. Таким образом, если $|\theta| < 1$, последовательность S_n имеет конечный предел при $n \to \infty$, $S_n \to \theta(1-\theta)^{-1}$. Если $|\theta| \geq 1$, последовательность S_n не имеет конечного предела, соответственно, ряд $\sum_{n=1}^{n=\infty} \theta^n$ сходится при $|\theta| < 1$ и расходится при $|\theta| \geq 1$.

Ранее в курсе анализа обсуждалось понятие предела последовательности и свойства, которыми обладают сходящиеся последовательности. Как следует из приведенных выше определений, аналогичными свойствами обладают и сходящиеся ряды.

Предложение. Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, α, β - два числа. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ тоже сходится, причем $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Предложение *(Необходимый признак сходимости ряда).* Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (Отсюда следует: если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится).

Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Например, члены гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ стремятся к нулю при $n \to \infty$, но этот ряд расходится.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+3n}{1-4n}.$$

В данном случае $a_n = \frac{2+3n}{1-4n}$ и при $n \to \infty$ имеем: $a_n \to -\frac{3}{4} \neq 0$. Следовательно, по необходимому признаку ряд расходится.

Определение. Ряд называется положительным, если все его члены положительны.

Предложение. (первый признак сравнения) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — два положительных ряда и существует такой номер $N \in \mathbb{N}$, что при любом $n > N$ имеет место неравенство $a_n \leqslant b_n$. Тогда

1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

2) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Предложение. (второй признак сравнения) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – два положительных ряда. Если существует и отличен от нуля и бесконечности предел $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Предложение. (радикальный признак Коши) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – положительный ряд и существует предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = C$. Тогда:

1) если $C < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) если $C > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;

Предложение. (признак Даламбера) Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = C$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $C < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) если $C > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;

Предложение. (интегральный признак Коши) Пусть функция $f(x)$, определенная при $x \geqslant 1$ неотрицательна и не возрастает. Тогда для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Определение. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел. Тогда ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$$

называют знакопеременным. Другими словами, знакопеременным называют ряд, члены которого поочередно имеют то положительный, то отрицательный знаки.

Теорема. (Лейбниц)

Если

1) члены знакопеременного ряда монотонно убывают по абсолютной величине, $a_{n+1} < a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$. В данном случае $a_n = 1/n$, так что a_n монотонно убывает, причем $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Следовательно, по теореме Лейбница этот ряд сходится.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называют абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Предложение. Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Обратное, вообще говоря, неверно: существуют сходящиеся ряды, которые не являются абсолютно сходящимися (такие ряды называют условно сходящимися). Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится (по теореме Лейбница), однако, этот ряд не является абсолютно сходящимся, поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (гармонический ряд).

Примеры.

1) Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{2^n}{n^4}$

Решение. Воспользуемся радикальным признаком Коши. Вычисляем:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^4} = 2 > 1$$

(поскольку $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$), следовательно, ряд расходится.

2) Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{1}{n \ln n}$

Решение. Функция $1/(xlnx)$ положительна при $x > 1$ и монотонно убывает при $x > e$, так что можно воспользоваться интегральным признаком. Получаем:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x} d(\ln x) = \ln \ln x|_2^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \ln \ln x - \ln \ln 2 = \infty,$$

таким образом, интеграл расходится, следовательно, ряд расходится.

3 Последовательности и ряды функций.

Рассмотрим последовательность функций $\{f_n(x)\},\ n = 1, 2, \ldots$, определенных на множестве $E \subset \mathbb{R}$.

Определение. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется сходящейся (поточечно) к функции f на множестве E (обозначается: $f_n \to f$), если числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ при каждом $x \in E$. Другими словами, для любого $x \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что для любого $n > N$ выполнено $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. (Здесь число N зависит от $x \in E$).

Определение. Последовательность функций $\{f_n\}$ называется равномерно сходящейся к функции f на множестве E (обозначается: $f_n \rightrightarrows f$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что для любого $n > N$ и любого $x \in E$ выполнено $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. (В этом определении число N уже не зависит от x).

Предложение. Равномерно сходящаяся последовательность функций сходится поточечно.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Если у нас есть последовательность функций $\{f_n(x)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, заданных на множестве $E \subset \mathbb{R}$, то мы можем построить новую последовательность функций $\{S_n(x)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, $x \in E$.

Определение. Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится (равномерно сходится) на множестве E, если на множестве E сходится (равномерно сходится) последовательность $\{S_n(x)\}$.

Функции $S_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ называются частичными суммами ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Функция $S(x)$ такая, что $S_n(x) \to S(x)$ на множестве E называется суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Определение. Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится абсолютно, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится для любого $x \in E$.

Степенные ряды.

Определение. Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (y - y_0)^n, \qquad y \in \mathbb{R}, \qquad y_0 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Числа $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ называются коэффициентами ряда (2). С помощью замены переменного $(y - y_0) \mapsto x$ ряд (2) может быть преобразован к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{3}$$

Поэтому мы ограничимся рассмотрением рядов вида (3).

Теорема. (Абель) Если степенной ряд (3) сходится при некотором значении $x = x_1$, то он сходится, и притом абсолютно, при всех значениях, для которых $|x| < |x_1|$. Если степенной ряд расходится при $x = x_1$, то он расходится и при всех x, для которых $|x| > |x_1|$.

Теорема. Для всякого степенного ряда существует такое число $R \geq 0$, что при $|x| > R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится.

Число R называется радиусом сходимости ряда. Если интервал сходимости вырождается в точку, то $R = 0$. Если же ряд всюду сходится, то есть сходится при любом значении x, то $R = \infty$.

Радиус сходимости R степенного ряда (3) можно определить через его коэффициенты.

Отдельного обсуждения требуют точки $x = R, x = -R$: ряд может в них сходиться или расходиться, в зависимости от поведения коэффициентов ряда. Таким образом, для степенного ряда интервал сходимости включает отрезок $(-R, R)$ и, может быть, одну или обе точки $x = -R, x = R$.

Теорема. Если существует предел $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$, то радиус сходимости ряда (3) равен $R = \rho^{-1}$. (При этом если $\rho = 0$, то $R = +\infty$, если $\rho = +\infty$, то $R = 0$).

Теорема. (Коши-Адамар) Если $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, то радиус сходимости степенного ряда (3) равен $R = \rho^{-1}$. (При этом если $\rho = 0$, то $R = +\infty$, если $\rho = +\infty$, то $R = 0$).

Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора.

В этом разделе мы будем рассматривать функции, представимые в виде степенного ряда, то есть функции вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \qquad a_n \in \mathbb{R},\ n = 0, 1, 2, \dots, \qquad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Такие функции называют аналитическими.

Теорема. Если функция $f(x)$ представима в виде степенного ряда, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, с радиусом сходимости $R > 0$, то

1) функция $f(x)$ имеет на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ производные всех порядков, которые могут быть найдены из ряда (4) почленным дифференцированием:

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m}, \qquad m = 1, 2, \dots; \tag{5}$$

2) для любого $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}, \tag{6}$$

таким образом, ряд (4) можно почленно интегрировать на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$;

3) ряды (4), (5) и (6) имеют одинаковые радиусы сходимости.

Теорема. Если функция $f(x)$ раскладывается в некоторой окрестности точки x_0 в степенной ряд $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, то

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

и, следовательно, справедлива формула

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Определение. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{7}$$

называют рядом Тейлора функции f в точке x_0. При $x_0 = 0$ ряд (7) называют рядом Маклорена функции f.

Пусть функция f имеет в точке x_0 производные до порядка n включительно. Тогда можно записать

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x_0; x). \tag{8}$$

Формула (8) называется формулой Тейлора. Функция $r_n(x_0; x)$ называется n-м остаточным членом формулы Тейлора.

Предложение. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Для того, чтобы функция f равнялась сумме своего ряда Тейлора в некоторой точке x, то есть $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Тейлора (8) стремился к нулю при $n \to \infty$: $\lim_{n\to\infty} r_n(x_0; x) = 0$.

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет производную порядка $n+1$ на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, то остаточный член $r_n(x_0; x)$ ее формулы Тейлора (8) для всех $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ можно записать в виде:

$$r_n(x_0; x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{9}$$

где $0 < \theta < 1$. Формула (9) называется остаточным членом в форме Лагранжа.

Пример.
Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{\ln n}{n}$
Решение. Воспользуемся теоремой Коши-Адамара:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\ln n}{n}} = 1,$$

следовательно, $R = \frac{1}{\rho} = 1$. При $x = -1$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$, который сходится (по теореме Лейбница). При $x = 1$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$, который расходится. Таким образом, интервал сходимости нашего ряда $[-1, 1)$.

Ряды Фурье.

Определение. Ряды вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \tag{10}$$

$$l > 0, \qquad a_n \in \mathbb{R},\ n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad b_n \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots$$

называют тригонометрическими рядами. Числа $a_n,\ b_n$ называют коэффициентами тригонометрического ряда (10).

Определение. Система функций

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots, \qquad l > 0$$

называется основной тригонометрической системой на интервале $(-l, l)$.

Определение. Пусть функция f задана на интервале $(-l, l)$. Числа

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad n$$

называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$ по основной тригонометрической системе.

Замечание. Чаще всего в приложениях используют вариант, когда $l = \pi$. При этом и формулы (11) становятся несколько проще:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,$$

Определение. Тригонометрический ряд (10), коэффициенты которого определяются по формулам (11), называется рядом Фурье функции $f(x)$.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$, заданная на интервале $(-l, l)$, удовлетворяет условиям Дирихле, если она

1) ограничена на этом интервале;

2) имеет на этом интервале не более, чем конечное число точек разрыва первого рода;

3) имеет на этом интервале не более, чем конечное число точек экстремума.

Теорема. Если на интервале $(-l, l)$ функция f удовлетворяет условиям Дирихле, то ее ряд Фурье сходится в каждой точке этого интервала. Сумма этого ряда равна

1) $f(x)$, если x — точка непрерывности функции f;

2) $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$, если x — точка разрыва функции f;
3) $\frac{1}{2}[f(-l+0)+f(l-0)]$ на концах этого интервала.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-l,l]$ и имеет на этом отрезке не более, чем конечное число точек экстремума. Если выполнено равенство $f(-l)=f(l)$, то ряд Фурье функции f сходится равномерно на этом отрезке, и сумма его в произвольной точке $x\in[-l,l]$ равна значению функции f в этой точке.

Замечание. Из определений следует, что если $f(x)$ — четная функция, то ее ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Ряд Фурье нечетной функции имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Определение. Число $T>0$ называют периодом функции f, если для любого числа x, принадлежащего области определения $E\subset\mathbb{R}$ функции f, числа $x+T$ и $x-T$ также принадлежат E и для любого $x\in E$ выполнено условие $f(x+T)=f(x)$. Функция, имеющая период T, называется T-периодической.

Если функция f определена на промежутке $[-l,l)$ то ее можно продолжить на всю числовую ось так, чтобы получилась $2l$-периодическая функция. Следует положить

$$g(x+2lk)=f(x),\qquad x\in[-l,l),\qquad k=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

Функция g, очевидно, — $2l$-периодическая и на промежутке $[-l,l)$ совпадает с функцией f. Поэтому функции f и g, рассматриваемые только на интервале $(-l,l)$ имеют один и тот же ряд Фурье.

Замечание. Если функция f является T-периодической, интегрируемой на отрезке $[0,T]$ (в собственном или несобственном смысле), то для любого числа a имеет место равенство

$$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx.$$

Таким образом, для коэффициентов Фурье $2l$-периодической функции, удовлетворяющей на интервале $(-l,l)$ условиям Дирихле, справедливы формулы

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad n = 1, 2, \ldots \quad (13)$$

Теорема. Если $f(x)$ — $2l$-периодическая функция и на интервале $(-l, l)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то ее ряд Фурье сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$. Сумма этого ряда равна

1) $f(x)$, если x — точка непрерывности функции f;

2) $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$, если x — точка разрыва функции f.

Пример.

Разложить функцию $f(x) = x^2$ в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$.

Решение. Продолжим функцию f на всю числовую ось так, чтобы получилась 2π-периодическая функция. Положим

$$g(x + 2\pi k) = f(x), \qquad x \in (-\pi, \pi), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$g((2k+1)\pi) = 0, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

На интервале $(-\pi, \pi)$ функции f и g имеют один и тот же ряд Фурье. Найдем коэффициенты этого ряда:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(x^2\frac{\sin nx}{n} + \frac{2}{n^2}x\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{n^2}(-1)^n.$$

Поскольку функция g — четная, коэффициенты b_n равны нулю. Таким образом, на интервале $(-\pi, \pi)$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

Контрольная работа.

Пример 1.

Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{n!}{(n+1)!2^n}$

Решение. Это положительный ряд, воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!/((n+2)!2^{n+1})}{n!/((n+1)!2^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)2}=\frac{1}{2}<1,$$

следовательно, ряд сходится.

Пример 2.

Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, где $a_n=\frac{(4n+3)^n}{(5n+2)^n}$

Решение. Это положительный ряд, воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{5n+2}=\frac{4}{5}<1,$$

следовательно, ряд сходится.

Пример 3.

Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, где $a_n=\frac{n^2+8}{3n^4+n+1}$

Решение. Это положительный ряд. Воспользуемся признаком сравнения. Сравним данный ряд с положительным рядом (сходящимся) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, где $b_n=\frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+8)/(3n^4+n+1)}{1/n^2}=\frac{n^4+8n^2}{3n^4+n+1}=\frac{1}{3}.$$

Данный предел конечен и отличен от нуля, следовательно, ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ ведут себя одинаково. Значит, исследуемый ряд сходится.

Пример 4.

Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, где $a_n=\frac{1}{n\,10^{n-1}}$

Решение.

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n\,10^{n-1}}{(n+1)\,10^n}=\frac{1}{10},$$

следовательно, $R=\frac{1}{\rho}=10$. При $x=-10$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{10}{n}$, который сходится (по теореме Лейбница). При $x=10$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n}$, который расходится. Таким образом, интервал сходимости нашего ряда $[-10,10)$.

Пример 5.

Вычислить определенный интеграл $I=\int_{0.1}^{0.2}\frac{e^{-x}}{x^3}dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta=0.001$.

Решение. Разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно, получим

$$I = \int_{0.1}^{0.2} \frac{e^{-x}}{x^3} dx = \int_{0.1}^{0.2} \frac{1}{x^3} \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots \right) dx =$$
$$= \int_{0.1}^{0.2} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{6} + \frac{x}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n-3}}{n!} + \ldots \right) dx =$$
$$= \left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln x - \frac{x}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n-2}}{(n-2)n!} + \ldots \right) \Bigg|_{0.1}^{0.2};$$

$\Delta < \frac{0.2^{n-2} - 0.1^{n-2}}{(n-2)n!} < 0.001$ при $n = 4$. Следовательно, $I \approx \left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln x - \frac{x}{6}\right)\Big|_{0.1}^{0.2} \approx 32.831$.

Пример 6.

Разложить функцию $f(x) = x^2$ в ряд Фурье на интервале $(0, 2\pi)$.

Решение. Продолжим функцию f на всю числовую ось так, чтобы получилась 2π-периодическая функция. Положим

$$g(x + 2\pi k) = f(x), \qquad x \in (0, 2\pi), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$g(2\pi k) = 0, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

На интервале $(0, 2\pi)$ функции f и g имеют один и тот же ряд Фурье. Найдем коэффициенты этого ряда:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left(x^2 \frac{\sin nx}{n} + \frac{2}{n^2} x \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left(-x^2 \frac{\cos nx}{n} + \frac{2}{n^2} x \sin nx + \frac{2}{n^3} \cos nx \right) \Bigg|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n}.$$

Таким образом, на интервале $(0, 2\pi)$

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \cos nx - \frac{\pi}{n} \sin nx \right).$$

Контрольная работа 3.

Вариант 1

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(n+6)5^n}{(2n^2+2n+3)3^n}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(4n-1)^{3n}}{(5n+1)^{3n}}$.

3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{3n^2+n}{2n^2+1}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{(n+1)^{n/3}}{n!}$.

5. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^b f(x)dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0.001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно. $f(x) = e^{-x^2/3}$; $b = 1$.

6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b). $f(x) = x - 1$; $a = -1$; $b = 1$.

Вариант 2

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{2n^2+5}{(2n^2+n)4^n}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(3n^2-2n+3)^n}{(2n^3+2n-3)^n}$.

3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{n+7}{n^4+2n+1}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{2^n}{n(n+1)}$.

5. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^b f(x)dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0.001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно. $f(x) = x\ln(1 + x^2)$; $b = 0.5$.

6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b). $f(x) = 2 + |x|$; $a = -1$; $b = 1$.

Вариант 3

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(2n+4)3^n}{(n^2+8)5^n}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(5n^2+2n+7)^{2n}}{(7n+5)^{2n}}$.

3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{3n+5}{3n^3+n+3}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{(2n)!}{n^n}$.

5. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^b f(x)dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0.001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно. $f(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}$; $b = 1$.

6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b). $f(x) = |x|$; $a = -\pi$; $b = \pi$.

Вариант 4

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{3^n(n+1)!n!}{(2n)!}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(n^2-n+5)^n}{(2n+1)^n}$.

3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{n^3+2n^2-2n+3}{4n^3-2n^2+3n+2}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{3^n n!}{(n+1)^n}$.

5. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^b f(x)dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0.001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно. $f(x) = \arctan(x^2)$; $b = 0.5$.

6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b). $f(x) = x^2 + 1$; $a = -2$; $b = 2$.

Вариант 5

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(3n-2)5^n}{(2n^3+1)2^n}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(2n^2+n-1)^n}{(n^2-n+1)^n}$.

3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{2n^2-3n+4}{n^5+2}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{n}{3^n(n+1)}$.

5. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^b f(x)dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0.001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно. $f(x) = x\sin(x^2)$; $b = 1$.

6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b). $f(x) = |1 - x|$; $a = -2$; $b = 2$.

Вариант 6

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{2^n}{n^4+n+1}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(5n+6)^{3n}}{(4n-1)^{3n}}$.

3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{2n^2+n-1}{3n^2-n+1}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{5^n}{n^{1/n}}$.

5. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^b f(x)dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0.001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно. $f(x) = x^2\ln(1 + x^{1/2})$; $b = 0.5$.

6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b). $f(x) = x + 1$; $a = -\pi$; $b = \pi$.

Вариант 7

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(2n-1)!}{(n+1)!(n+2)!}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(5n-1)^n}{(4n+2)^n}$.

3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{2n^2+5n-2}{8n+1}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$.

5. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^b f(x)dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0.001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно. $f(x) = \sin(x^2)$; $b = 1$.

6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b). $f(x) = \pi/4 - x/2$; $a = 0$; $b = \pi$.

Вариант 8

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(n+2)6^n}{(n^3+1)4^n}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(2n^3-2n-3)^n}{(3n^2+5n+1)^n}$.

3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{5n^2+2n+3}{n^3+4}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{n+1}{3^n(n+2)}$.

5. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^b f(x)dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0.001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$; $b = 0.5$.

6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b). $f(x) = (\pi - x)/2$; $a = -\pi$; $b = \pi$.

Вариант 9

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(2n^2+7n)4^n}{(n+1)3^n}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(5n+7)^{2n}}{(3n^2+7n+5)^{2n}}$.

3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{5n^2+6}{4n^2+1}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{3^n}{(3^n(3n-1))^{1/2}}$.

5. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^b f(x)dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0.001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно. $f(x) = x^{1/2}\cos x$; $b = 1$.

6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b).

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

$a = -\pi$; $b = \pi$.

Вариант 10

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(n+3)!(n+4)!}{(2n)!}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(2n+10)^n}{(n^2+n+7)^n}$.

3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{2n^2+1}{4n^4+n}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{n+2}{n(n+1)}$.

5. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^b f(x)dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0.001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно. $f(x) = xe^{-x}$; $b = 0.5$.

6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b).

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

$a = -\pi$; $b = \pi$.

Вариант 11

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(5n+2)4^n}{(n^3+1)6^n}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(n^2+n-6)^n}{(5n^2+n+2)^n}$.

3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{n-1}{2n^4+2n^2}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{n+2}{(3n^3+n)2^n}$.

5. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^b f(x)dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0.001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно. $f(x) = x^{1/3} \cos x$; $b = 1$.

6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b). $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$; $a = 0$; $b = 2\pi$.

Вариант 12

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(n^2+2n)3^n}{(n^2+n+3)4^n}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(5n-3)^{2n}}{(3n+2)^{2n}}$.

3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{2n+3}{n^3+4n^2+2n}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{2n+3}{(n^2+3)3^n}$.

5. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^b f(x)dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0.001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно. $f(x) = \frac{\arcsin x}{x}$; $b = 0.5$.

6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b). $f(x) = 2x$; $a = -\pi$; $b = \pi$.

Вариант 13

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(3n^2+1)^n}{(2n+7)^{2n}}$.

3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{3n^2+5n+3}{2n^2-n+5}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{n+1}{(n^2+2)2^n}$.

5. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^b f(x)dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0.001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно. $f(x) = \cos x^2$; $b = 1$.

6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b). $f(x) = 2x$; $a = 0$; $b = 2\pi$.

Вариант 14

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(2n^2-n+2)4^n}{4n^3-2n+3}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(n+2)^{2n}}{(3n^2-1)^n}$.

3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{n^2-2n+3}{2n^2+n+2}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{(n^2+4n)4^n}{2n+5}$.

5. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^b f(x)dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0.001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно. $f(x) = \frac{\arctan x}{x}$; $b = 0.5$.

6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b). $f(x) = 2x$; $a = -2$; $b = 2$.

Вариант 15

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(n-1)2^n}{(n^2+1)3^n}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(4n^2+2n-7)^{2n}}{(6n+5)^{2n}}$.

3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{n+2}{n^3+2n+2}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{(n^2-3)4^n}{3n^2+n}$.

5. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^b f(x)dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0.001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно. $f(x) = x\cos x^2$; $b = 1$.

6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b). $f(x) = |x|$; $a = -2$; $b = 2$.

Вариант 16

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(2n+1)!}{n!(n+2)!}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(n^2+n-5)^n}{(n+7)^n}$.

3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{3n^2+n+6}{3n+7}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{(n^2+3)3^n}{n^3+4n^2}$.

5. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^b f(x)dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0.001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$; $b = 0.5$.

6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b). $f(x) = |x+1|$; $a = -\pi$; $b = \pi$.

Вариант 17

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(2n^2+5n)3^n}{n^3+8}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(4n^2+3n-1)^n}{(n^2+n+1)^n}$.

3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{n^2+4n+3}{2n^3+n^2}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{(n+5)3^n}{4n^2+n}$.

5. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^b f(x)dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0.001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно. $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$; $b = 1$.

6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b). $f(x) = \pi + x$; $a = -\pi$; $b = \pi$.

Вариант 18

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(n^2+3n+5)5^n}{(n+2)4^n}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(3n+4)^{2n}}{(5n+6)^{2n}}$.

3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{2n^2+3n+4}{n^2+4n}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{(n+1)4^n}{n^4+3n^2}$.

5. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^b f(x)dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0.001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно. $f(x) = xe^{-x^2}$; $b = 0.5$.

6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b).

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ 0, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

$a = -\pi$; $b = \pi$.

Вариант 19

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{n!(n-1)!}{(2n+2)!}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(5n^2+2)^n}{(4n+2)^{2n}}$.

3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{n^2-6}{n^4+6}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{(n+1)4^n}{2n^3+4n}$.

5. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^b f(x)dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0.001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно. $f(x) = \frac{\ln\cos x}{x^2}$; $b = 1$.

6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b).

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ 3, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

$a = -\pi$; $b = \pi$.

Вариант 20

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{3n^2+7n}{(n+3)3^n}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(n+4)^{2n}}{(4n^2+1)^n}$.

3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{2n+1}{3n^4+n^3}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{(n+4)2^n}{(2n^2+3)5^n}$.

5. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^b f(x)dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0.001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно. $f(x) = x\ln(1 + x^{1/3})$; $b = 0.5$.

6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b). $f(x) = |x - 1|$; $a = 0$; $b = 2\pi$.

4 Функции нескольких переменных

4.1 Начальные определения

Здесь будут обсуждаться функции двух переменных - обобщения приводимых результатов на случай трех и больше переменных могут быть найдены в более продвинутых руководствах. На плоскости стандартным образом вводится декартова система координат - две ортогональные друг другу оси, одна из которых традиционно обозначается X, вторая Y. Координаты точки M обозначаются, соответственно, x и y, см. рис.1. Точку на плоскости мы будем обозначать

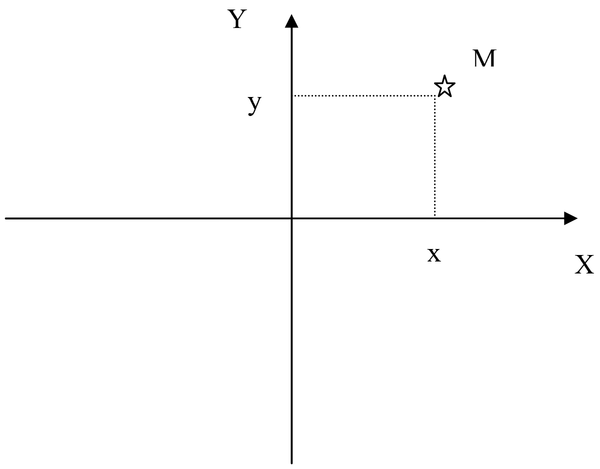

Рис. 1: Декартовы координаты на плоскости.

или M или (x,y) или M(x,y). Для задания расстояния между точками M и N используется $\rho(M, N) = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}$. Для фиксированной точки N множество точек M, удовлетворяющих неравенству $\rho(M, N) < r$ называют (открытым) шаром радиуса r с центром в точке N. Кривую $y = f(x)$ (или $x = g(y)$) будем называть гладкой, если соответствующая функция $f(x)$ (или $g(y)$) дифференцируема (необходимое число раз) во всей области определения. Областью Ω на плоскости мы будем называть множество точек на плоскости, ограниченное конечным набором гладких кривых (на рис. 2 область ограничена 3 кривыми). ***Границей*** области Ω мы будем называть совокупность кривых, ее ограничивающих, обычно ее обозначают $\partial\Omega$. Область называется ***замкнутой***, если она содержит ограничивающие ее кривые. Область называется ***открытой***, если вместе с любой своей точкой N она содержит и некоторый шар с центром в этой точке (отсюда следует, что она не содержит ограничивающие ее кривые). Такой шар с центром в точке N называют ***окрестностью*** точки N. Область называется ***ограниченной***, если существует такая конечная положительная константа A, что для всех ее точек M выполняется неравенство $\rho(M, O) < A$, $O = (0, 0)$. Если вместе с точкой в область входит и некоторый шар с центром в этой точке, она называется ***внутренней*** точкой области (точка M на рис.2). Если точка принадлежит области, и никакой шар с центром в этой точке, не входит в область, точку называют ***граничной*** (и она принадлежит границе области $\partial\Omega$, точка N на рис.2).

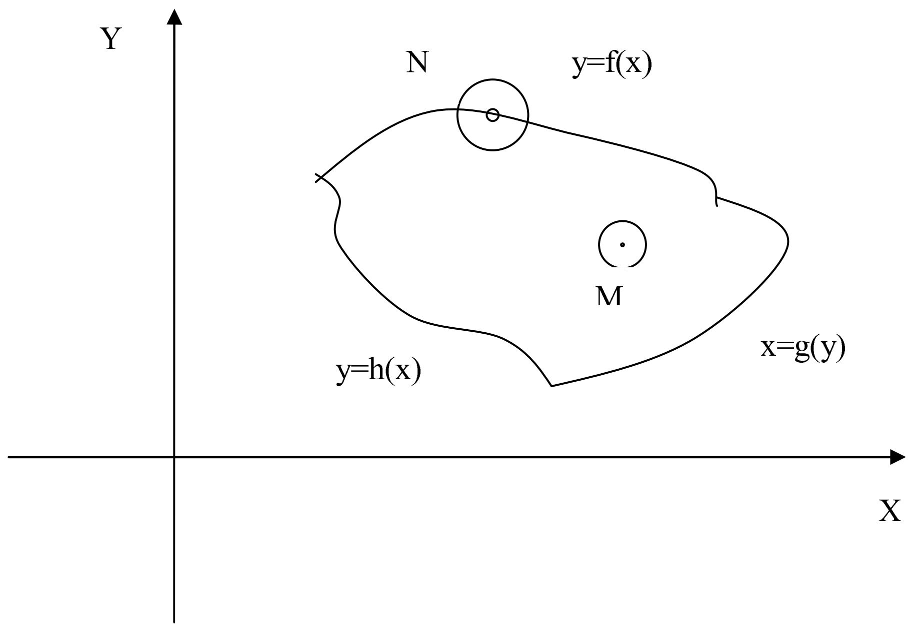

Рис. 2: Область на плоскости.

Способы задания функции .

Если каким-либо способом каждой точке $M \in \Omega, M = (x, y)$, сопоставлено число z, то говорят, что в области Ω задана числовая функция $z = f(x, y)$. Этот способ может быть словесным описанием, явным аналитическим описанием, например, $f(x, y) = sin(x + 2y)$ или неявным - как решение какого-нибудь уравнения, например, $sinz + x^2 - y^2 = 0$. Обычно при этом подразумевается и какое-либо описание области определения функции - например, множество точек плоскости, для которых допустимы операции, необходимые для вычисления значения функции. Если $M = (x, y)$, то можно для краткости вместо $f(x, y)$ использовать обозначение $f(M)$.

Предел функции .

Будем сначала считать, что M_0 - внутренняя точка области Ω.

Определение. Говорят, что функция $f(x, y)$ имеет в точке M_0 пределом конечное число A, если для любого конечного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, то для всех точек M, удовлетворяющих условию $\rho(M, M_0) < \delta$ справедливо неравенство $\mid f(M) - f(M_0) \mid < \varepsilon$.

Обозначение. Этот факт обозначают следующим образом: $\lim_{M \longrightarrow M_0} f(M) = A$ или $\lim_{x \longrightarrow x_0, y \longrightarrow y_0} f(M) = A$.

Это определение можно переделать и в том случае, когда точка M_0 - граничная точка области, для этого достаточно рассматривать только те точки M, которые принадлежат области Ω.

Определение. Говорят, что функция $f(x, y)$ имеет в точке $M_0 \in \partial\Omega$ пределом конечное число A, если для любого конечного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, то для всех точек $M \in \Omega$, удовлетворяющих условию $\rho(M, M_0) < \delta$ справедливо неравенство $| f(M) - f(M_0) | < \varepsilon$.

Обозначение. Этот факт обозначают следующим образом: $\lim_{M \to M_0, M \in \Omega} f(M) = A$.

Как и для функции одной переменной можно определить и бесконечный предел ($A = \infty$), а также определить предел (конечный или бесконечный) и в бесконечно удаленной точке M.

Разумеется, если $\lim_{x \to x_0, y \to y_0} f(M) = A$, то $\lim_{x \to x_0} f(x, y_0) = A$,$\lim_{y \to y_0} f(x_0, y) = A$, однако обратное неверно: из существования и равенства двух последних пределов НЕ СЛЕДУЕТ существование предела $\lim_{x \to x_0, y \to y_0} f(M)$ и его равенство A. Стандартный пример: $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ в точке $O = (0, 0)$: существуют и равны пределы $\lim_{x \to 0} f(x, 0) = 0$,$\lim_{y \to 0} f(0, y) = 0$, однако если мы будем приближаться к точке O по прямой $x = \theta y$, мы получим значение $\frac{\theta}{1 + \theta^2}$, зависящее от θ. Это показывает, что данная функция при $M \to O$ не имеет предела.

Непрерывные функции.

Пусть M_0 - внутренняя точка области Ω.

Определение. Функцию $f(x, y)$ называют непрерывной в точке M_0, если существует конечный предел $\lim_{M \longrightarrow M_0} f(M) = A$, причем $A = f(M_0)$.

Аналогично определяют и непрерывность в граничной точке.

Определение. Функцию $f(x, y)$ называют непрерывной в области Ω, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Для непрерывных функций нескольких переменных справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть Ω - ограниченная замкнутая область, $f(x, y)$ - функция, непрерывная в области Ω. Тогда существует пара конечных чисел $m \leq M$ со следующими свойствами:

1. $m \leq f(x, y) \leq M$ для всех $(x, y) \in \Omega$.

2. Для любого значения c, $m \leq c \leq M$ найдется точка $N \in \Omega$ такая, что $f(N) = c$.

Число m называется наименьшим значением $f(x, y)$ в области Ω (глобальным минимумом). Число M называется наибольшим значением $f(x, y)$ в области Ω (глобальным максимумом).

4.2 Дифференциальные свойства

Частные производные

Определение. Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

он называется частной производной функции $f(x,y)$ по x в точке (x_0,y_0) и обозначается $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ или $f_x(x_0,y_0)$. Можно сказать, что при дифференцировании по x мы "замораживаем"переменную y и наоборот. Аналогично определяется и частная производная по y, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)$. Если в точке (x_0,y_0) существуют обе первые производные функции $f(x,y)$, то говорят, что эта функция *дифференцируема* в этой точке. При вычислении частных производных справедливы те же формулы, что и при дифференцировании одной переменной, для дифференцирования суммы, произведения, частного.

Пример. Вычислим частные производные первого порядка для функции $f(x,y)=\cos(x^2y+5y)$. Согласно правилам дифференцирования имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-2xy\sin(x^2y+5y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-(x^2+5)\sin(x^2y+5y).$$

Как и для функции одной переменной, справедливо следующее

Утверждение. Пусть $L\subset\Omega$ - некоторая окрестность точки $(x_0,y_0)=N$, и функция $f(x,y)$ имеет во всех точках L обе частные производные (т.е. $f_x(x,y),f_y(x,y)$) и их значения в этой области ограничены, существует такая конечная константа A, что $|f_x(x,y)|<A,|f_y(x,y)|<A$ при $(x,y)\in L$. Тогда функция $f(x,y)$ непрерывна в точке N.

Дифференцирование сложной функции.

Рассмотрим сначала следующую ситуацию: пусть задана функция $z=f(x,y)$, дифференцируемая во всех интересующих нас точках, причем $x=x(t,s)$, $y=y(t,s)$ - сами являются дифференцируемыми функциями независимых переменных t,s. Таким образом возникает сложная функция $z(t,s)=f(x(t,s),y(t,s))$. Для ее частных производных по t и s имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Сложную функцию можно организовать и другим способом: переменные x,y могут быть функциями одной переменной t, так что $z=z(t)=f(x(t),y(t))$. В этом случае z является функцией одной переменной t и мы имеем частный случай предыдущей формулы:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Первый дифференциал

Для функции $z = f(x, y)$ можно, как и для функции одной переменной, определить первый дифференциал $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, это выражение (его обозначают также df) называется *первым полным дифференциалом*, в отличие от выражений $\frac{\partial z}{\partial x}dx$ и $\frac{\partial z}{\partial y}dy$, которые называются *первыми частными дифференциалами* функции $z = f(x, y)$. Первый полный дифференциал связан с полным приращением функции при изменении ее аргументов. Рассмотрим эту связь поподробнее. Запишем полное приращение функции при изменении значений аргументов с (x_0, y_0) на $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$, предполагая, что частные производные функции $f(x, y)$ существуют и непрерывны в интересующих нас точках:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = [f_x(x_0, y_0 + \Delta y) + \alpha(\Delta x)]\,\Delta x+$$

$$+\,[f_y(x_0, y_0) + \beta(\Delta y)]\,\Delta y = f_x(x_0, y_0)]\Delta x+f_y(x_0, y_0)\Delta y+\gamma(\Delta x, \Delta y) = dz+\gamma(\Delta x, \Delta y),$$

причем $\frac{\gamma(\Delta x,\Delta y)}{\Delta x} \to 0$, $\frac{\gamma(\Delta x,\Delta y)}{\Delta y} \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Таким образом, при достаточно малых $\Delta x, \Delta y$ можно полагать: $\Delta f \approx df$. Это соотношение является базовым при реализации приближенных вычислений - правую часть довольно часто намного легче вычислить, чем левую.

Первый полный дифференциал обладает *инвариантностью*: при вычислении его значения не играет роль, являются ли аргументы функции $f(x, y)$ независимыми переменными или, в свою очередь, являются функциями других переменных (обозначим их t, s).

Частные производные неявной функции

Функция двух аргументов $z = f(x, y)$ может быть задана неявным образом, например, как решение уравнения $F(x, y, z) = 0$. Возникает вопрос: как в этом случае вычислить ее частные производные? Выпишем сначала первый полный дифференциал $F(x, y, z)$ в предположении, что $F = 0$. В этом случае, очевидно, $dF = 0$ и мы получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0,$$

откуда следует:

$$dz = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Вспоминая выражение для первого полного дифференциала (на этот раз для функции $z = f(x, y)$), получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\Big|_{F(x,y,z)=0},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\Big|_{F(x,y,z)=0}.$$

Выражение $|_{F(x,y,z)=0}$ означает, что надо подставить в эти формулы вместо z решение уравнения $F(x,y,z)=0$ относительно этой переменной.

Градиент и производная по направлению Пусть $M_0=(x_0,y_0)$ - внутренняя точка области Ω, в которой задана дифференцируемая функция $f(x,y)$. Выпустим из точки M_0 вектор $\overrightarrow{s}=(cos\alpha, sin\alpha)$ единичной длины (см. рис.3) и отложим вдоль этого вектора вектор длины Δs, так что его компоненты будут $\Delta x=\Delta s\cdot cos\alpha, \Delta y=\Delta s\cdot sin\alpha$. Рассмотрим выражение

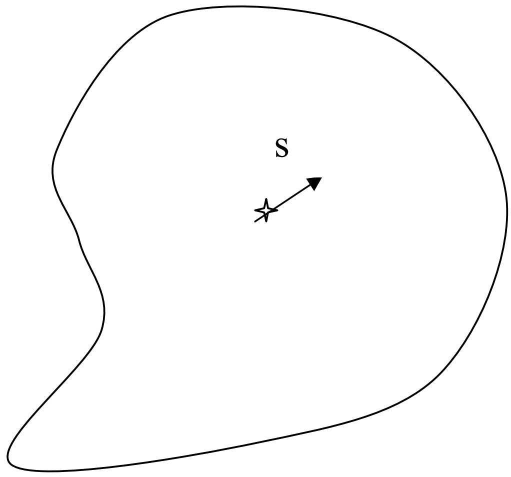

Рис. 3: Направление дифференцирования.

$$\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta s}=\frac{1}{\Delta s}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\right],$$

причем $\frac{\alpha(\Delta x,\Delta y)}{\Delta s}\to 0$ при $\Delta s\to 0$. Переходя к пределу при $\Delta s\to 0$, получаем: предел левой части существует (он обозначается $\frac{\partial f}{\partial s}$) и равен:

$$\frac{\partial f}{\partial s}=cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+sin\alpha\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Этот предел называется производной $f(x,y)$ по направлению $\overrightarrow{s}$. Введем обозначение: $gradf(x,y)=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})$, это вектор размерности 2 (каково число аргументов функции $f(x,y)$). Тогда последнюю формулу можно записать в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial s}=<\overrightarrow{s}, gradf(x,y)>,$$

где $<a,b>$ означает скалярное произведение векторов a,b.

Определение. Вектор $gradf(x,y)$ называется *градиентом* функции $f(x,y)$, вычисленным в точке (x,y).

Напомним, что вектор $\overrightarrow{s}$ имеет единичную длину, так что $|\frac{\partial f}{\partial s}| = |gradf(x,y)| \cdot |cos\phi|$, где ϕ - угол между векторами $\overrightarrow{s}$ и $gradf(x,y)$. Из последнего соотношения следует, что наибольшее значение $|\frac{\partial f}{\partial s}|$ принимает тогда, когда направление векторов $\overrightarrow{s}$ и $gradf(x,y)$ совпадает. Иными словами, градиент "указывает"направление наибыстрейшего возрастания функции. Кроме того, $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$ если вектора $\overrightarrow{s}$ и $gradf(x,y)$ ортогональны друг другу.

Пример. Найти производную функции $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке $M(3,1)$ в направлении, идущем из этой точки к точке (6,5).

Вычислим сначала частные производные $z(x,y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy + 3y^2,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 + 6xy.$$

Подставляя $x = 3, y = 1$, получаем: в точке M

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 27 - 18 + 3 = 12,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -27 + 18 = -9,$$

так что $gradz(3,1) = (12,-9)$. Далее, вектор, идущий из точки M в конечную точку, равен: $\overrightarrow{b} = (3,4)$. Для вычисления производной по направлению надо вычислить вектор единичной длины $\overrightarrow{n}$, идущий в том же направлении. Получаем: $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{b}/|\overrightarrow{b}| = (3,4)/5 = (0.6, 0.8)$. После этого находим:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = (gradz, \overrightarrow{n}) = 0.6 \cdot 12 + 0.8 \cdot (-9) = 0.$$

Частные производные высшего порядка Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в области Ω, то ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ можно в области Ω рассматривать как новые функции и пытаться их продифференцировать. Если это возможно, возникают частные производные высших порядков. Для них приняты следующие обозначения:

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}$$

и т.д.

Теорема Пусть $f(x,y)$ имеет в области Ω непрерывные частные производные $f_{yx}(x,y),\ f_{xy}(x,y)$. Тогда эти частные производные совпадают во всех внутренних точках области.

Эта теорема означает, что при справедливости ее условий порядок дифференцирования по переменным x и y можно менять. Аналогичные утверждения справедливы и для более высоких производных. С учетом этого функция 2 переменных имеет 2 различные частные производные первого порядка, 3 различные частные производные второго порядка и т.д.

Формула Тейлора и дифференциалы высшего порядка

Для функций двух переменных справедлива следующая форма теоремы Тейлора (формула Тейлора).

Теорема Пусть в области Ω задана функция $f(x,y)$, которая имеет в этой области непрерывные производные вплоть до порядка m включительно, $M_0 = (x_0, y_0)$, $M = (x,y)$ - внутренние точки этой области. Тогда

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_i^k \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}}(x_0,y_0)(x-x_0)^i (y-y_0)^{k-i} + o(\rho^m(M, M_0)),$$

где $C_i^k = \frac{k!}{i!(k-i)!}$, причем для функции $o(\alpha)$ справедливо: $\frac{o(\alpha)}{\alpha} \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Выражение

$$d^{(k)} f = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}}(x_0,y_0)(x-x_0)^i (y-y_0)^{k-i}$$

называют полным дифференциалом k-го порядка. При $k=1$ это выражение дает первый полный дифференциал.

Выпишем в качестве примера формулу Тейлора второго порядка:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \qquad (14)$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right] + o(\rho^2(M$$

4.3 Локальные экстремумы, максимумы и минимумы

Пусть в области Ω задана функция $f(x,y)$.

Определение. Пусть в области Ω существует внутренняя точка $N = (x_0, y_0)$ такая, что для всех точек M некоторой ее окрестности выполняется неравенство: $f(M) \le f(N)$ ($f(M) \ge f(N)$). Тогда точка N называется точкой локального максимума (минимума), а само значение $f(N)$ называется локальным максимумом (минимумом).

Многие прикладные задачи сводятся к поиску точек локального максимума (минимума).

Теорема(необходимое условие локального максимума и минимума). Пусть $f(x,y)$ дифференцируема в области Ω. Если во внутренней точке области $N = (x_0, y_0)$ функция $f(x,y)$ имеет локальный максимум (минимум), то выполняются равенства:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(N) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(N) = 0. \qquad (15)$$

Определение. Точки, в которых выполняются условия (15), называются экстремальными (точками экстремума).

Множество экстремальных точек (эти точки также называются стационарными точками) содержит объединение множеств точек локального минимума и точек локального максимума, но не обязательно совпадает с ним.

Пример. Функция $f(x, y) = x^2 - y^2$ имеет экстремальную точку $O = (0, 0)$, однако эта точка не является ни точкой локального максимума, ни точкой локального минимума, она является т.н. седловой точкой.

4.4 Достаточное условие локального максимума и минимума

Если функция $f(x, y)$ дважды дифференцируема в области Ω , то можно привести достаточное условие локального максимума и минимума. Вывод соответствующей теоремы базируется на формуле Тейлора порядка 2.

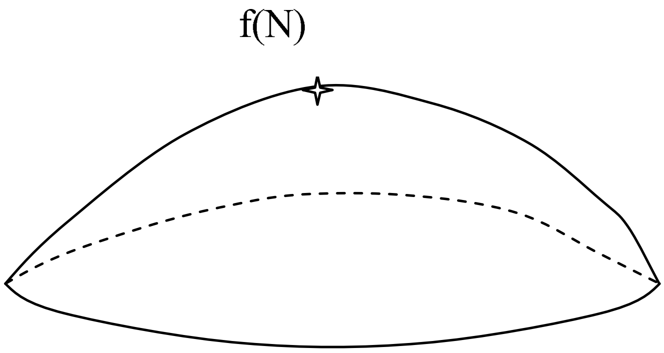

Рис. 4: Локальный максимум.

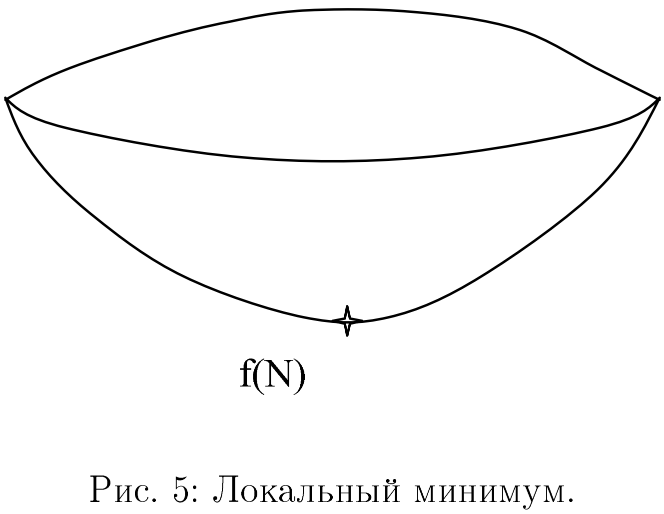

Рис. 5: Локальный минимум.

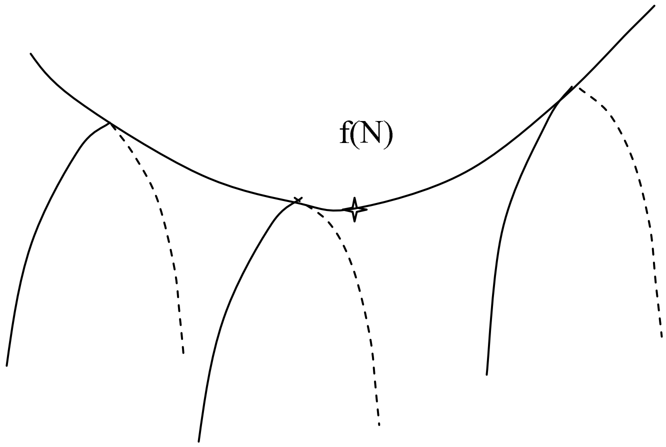

Рис. 6: Окрестность седловой точки.

Теорема Пусть $f(x, y)$ имеет в окрестности точки $N = (x_0, y_0)$ непрерывные производные до 2-го порядка включительно,

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0),$$

и выполняются следующие условия:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(N) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(N) = 0, \tag{16}$$

$$AC - B^2 > 0, \quad A < 0. \tag{17}$$

Тогда в точке N функция $f(x, y)$ имеет локальный максимум. Если вместо (17) выполняется

$$AC - B^2 > 0, \quad A > 0, \tag{18}$$

в точке N функция $f(x, y)$ имеет локальный минимум. Если вместо (17) выполняется

$$AC - B^2 < 0, \tag{19}$$

в точке N функция имеет седловую точку.

Пример. Найти точки экстремума функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ и определить их характер.

Вычисляем сначала первые частные производные функции, приравниваем их нулю и получаем пару уравнений для нахождения точек экстремума $z(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0.$$

Решая эту пару уравнений, находим точки: $M_1 = (1, 1)$, $M_2 = (0, 0)$. Далее вычисляем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} = 6y.$$

Для точки M_1 имеем: $A = 6, B = -3, C = 6, AC - B^2 = 27 > 0$, так что это точка минимума. Для M_2: $A = 0, B = -3, C = 0, AC - B^2 = -9 < 0$, так что M_2 - седловая точка.

4.5 Глобальные максимумы и минимумы (наибольшие и наименьшие значения)

Определение. Точка $N \in \Omega$ называется точкой глобального максимума функции $f(x, y)$, заданной в области Ω, если для всех $M \in \Omega$ верно: $f(M) \leq f(N)$. При этом само значение $f(N)$ называется глобальным максимумом (наибольшим значением) функции $f(x, y)$ в области Ω.

Аналогично определяется глобальный минимум (наименьшее значение) функции $f(x, y)$ в области Ω.

Пусть функция $f(x, y)$ задана в ограниченной замкнутой (т.е. содержащей свою границу) области Ω, причем функция имеет в этой области непрерывные производные. При этом для поиска экстремумов можно применять уравнения (15). Глобальный максимум $f(x, y)$ в области Ω существует, согласно теореме о свойствах непрерывных функций. Пусть граница $\partial\Omega$ состоит из конечного набора гладких кривых вида $y = h(x)$ или $x = g(y)$, заданных на каких-то интервалах $[a, b]$. Глобальный максимум может находиться либо во внутренней точке области Ω, либо лежать на одной из кривой, ограничивающих область, либо в точках сочленения этих кривых. В связи с этим создается набор точек, состоящий из трех множеств.

1. Ищем набор экстремальных точек внутри области, решения пары уравнений для двух неизвестных - координат точки:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(N) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(N) = 0.$$

Пусть точки $N_1, N_2, N_3, ..., N_k$ составляют множество решений этих уравнений, принадлежащих области Ω.

2. Для каждой кривой, ограничивающей Ω, находим "сужение"функции $f(x, y)$ на эту кривую. Если уравнение кривой, например, $y = h(x)$, причем переменная x принадлежит интервалу $[a, b]$, мы получаем функцию одной переменной $F(x) = f(x, h(x))$, заданную на этом интервале. Ищем экстремальные точки функции $F(x)$ на этом интервале, т.е. решения уравнения $dF(x)/dx = 0$, принадлежащие этому интервалу. Вторую координату точки находим согласно $y = h(x)$. В итоге находим набор точек $M_1, M_2, ...$. Взяв объединение этих множеств по всем кривым, ограничивающим область, находим второе множество точек.

3. Третье множество "подозрительных"точек составляют точки $L_1, L_2, ...L_m$, в которых стыкуются разные кривые, ограничивающие область.

Объединение найденных множеств составляет полный набор "подозрительных"точек - $N_1, N_2, ..., M_1, M_2, ..., L_1, L_2, ...$ Это будет конечный набор точек. Вычисляем значение функции $f(x, y)$ в каждой из точек этого набора и находим наибольшее значение - это будет искомый глобальный максимум, и наименьшее значение - это будет глобальный минимум функции $f(x, y)$ в этой области. Соответствующие точки будут точками глобального максимума и минимума соответственно.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - 2y^2$ в круге $x^2 + y^2 \leq 4$.

Найдем сначала экстремальные точки. Составим уравнения:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

откуда находим экстремальную точку $N_1 = (0, 0)$. Далее, рассмотрим "сужение"функции на границу. Для этого достаточно подставить $y^2 = 4 - x^2$ в выражение для $z(x, y)$ и получить: $g(x) = z(x, y(x)) = 3x^2 - 8$. Здесь $x \in [-2, 2]$. Выписываем уравнение для экстремальных точек функции $g(x)$: $\frac{dg(x)}{dx} = 6x = 0$, откуда находим еще 2 точки: $M_1 = (0, 2), M_2 = (0, -2)$. Граница состоит из 2 кусков: при $y > 0$ и $y < 0$ соответственно. Точки их смыкания $L_1 = (2, 0), L_2 = (-2, 0)$. Вычисляя значения функции $z(x, y)$ в точках N_1, M_1, M_2, L_1, L_2, находим: наибольшее значение равно 4, достигается в точках L_1, L_2, наименьшее значение равно -8, достигается в точках M_1, M_2.

5 Интегрирование функций двух переменных.

5.1 Двойной интеграл.

Пусть в плоскости (x, y) задана ограниченная область Ω, граница которой состоит из конечного числа гладких кривых. Пусть в этой области задана функция $f(x, y)$. Для этой функции можно построить объект, аналогичный определенному интегралу в одномерной ситуации. А именно, разобъем непрерывными кривыми область Ω на n частей $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$, в каждой части выберем точку M_k (см. рис. 11). Определим интегральную сумму, соответствующую этому разбиению (обозначим σ способ разбиения и выбора точек M_k),

$$I_\sigma = \sum_k f(M_k)\Delta S_k, \tag{20}$$

где ΔS_k - площадь соответствующей части области. Пусть δ - наибольший диаметр областей $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$.

Определение . Если существует конечный предел $\lim_{\delta \to 0} I_\sigma$, не зависящий от σ, этот предел называется двойным интегралом функции $f(x, y)$ по области

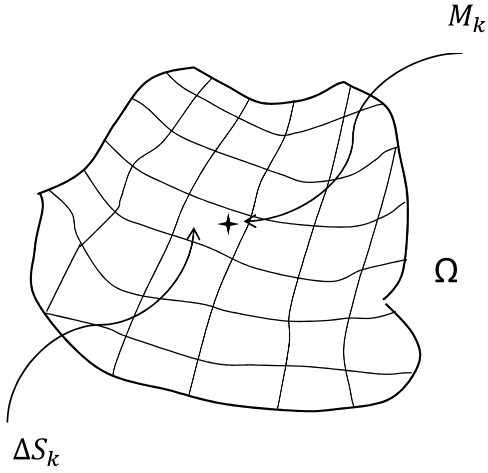

Рис. 7: Разбиение области интегрирования.

Ω и обозначается $\int\int_\Omega f(x,y)dxdy$ или $\int_\Omega f(x,y)dxdy$ или $\int_\Omega f(x,y)dS$. Область Ω называется областью интегрирования. Функция $f(x,y)$ называется при этом интегрируемой в области Ω.

Теорема. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в области Ω, причем граница этой области состоит из конечного набора непрерывных кривых. Тогда $f(x,y)$ интегрируема в области Ω.

Основные свойства двойного интеграла

Линейность по функции. Пусть $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ - интегрируемые в Ω функции. Тогда для любых чисел c_1, c_2 функция $[c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y)]$ тоже интегрируема в Ω, причем

$$\int\int_\Omega [c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y)]dS = c_1 \int\int_\Omega f_1(x,y)dS + c_2 \int\int_\Omega f_2(x,y)dS.$$

Аддитивность по области. Пусть $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$, причем $\Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \emptyset$, $f(x,y)$ интегрируема в Ω_1 и в Ω_2. Тогда $f(x,y)$ интегрируема в Ω, причем

$$\int\int_\Omega f(x,y)dS = \int\int_{\Omega_1} f(x,y)dS + \int\int_{\Omega_2} f(x,y)dS.$$

Монотонность интеграла. Пусть $f(x,y)$ интегрируема в области Ω, причем $f(x,y) \geq 0$ в области Ω. Тогда

$$\int\int_\Omega f(x,y)dS \geq 0$$

.

Площадь области. Если $f(x,y) \equiv 1$ интегрируема в области Ω, то интеграл $\int\int_\Omega 1 \cdot dS$ равен площади области Ω.

5.2 Повторный интеграл

Определение. Пусть $x_1 < x_2$, функции $y = g_1(x), y = g_2(x)$ непрерывны на интервале $[x_1, x_2]$, причем $g_1(x) < g_2(x)$ при $x \in [x_1, x_2]$. Область $\Omega = \{x \in [x_1, x_2], g_1(x) < y < g_2(x)\}$ называется *правильной* в y-направлении, см. рис. 8.

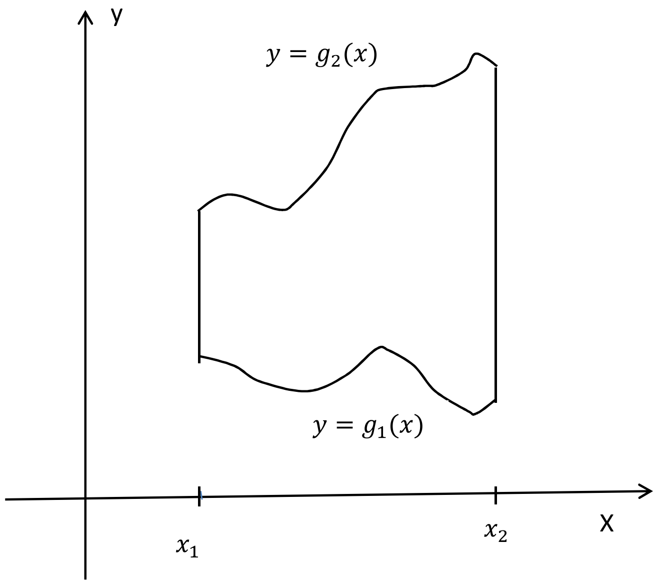

Рис. 8: Область, правильная в y-направлении.

Рассмотрим область, правильную в y-направлении. Для нее можно определить интеграл

$$F(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy.$$

Теорема. Пусть $f(x, y)$ непрерывна в Ω, $g_1(x), g_2(x)$ непрерывны на интервале $[x_1, x_2]$. Тогда $F(x)$ непрерывна на интервале $[x_1, x_2]$.

Тогда функцию $F(x)$ можно интегрировать на интервале $[x_1, x_2]$, и построить величину $I = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$.

Определение. Интеграл

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$$

называется повторным интегралом от функции $f(x, y)$ по области Ω, правильной в y-направлении.

Аналогичным образом можно определить область правильную в x-направлении и соответствующий повторный интеграл. Существуют области, правильные в обоих направлениях. Известные свойства одномерных интегралов приводят к соответствующим свойствам повторных интегралов.

Основные свойства повторного интеграла

Линейность по функции. Пусть Ω - правильная в y-направлении область, $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ - интегрируемые в Ω функции. Тогда для любых чисел c_1, c_2 функция $[c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y)]$ тоже интегрируема в Ω, причем

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} [c_1 f_1(x,y)+c_2 f_2(x,y)]dy = c_1 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_1(x,y)dy+c_2 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_2(x$$

Аддитивность по области. Пусть $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$, причем $\Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \emptyset$, $f(x,y)$ интегрируема в Ω_1 и в Ω_2, области $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ - правильные в y-направлении. Пусть, например, $\Omega_1 = \{x \in [x_1, x_2], g_1(x) < y < g_2(x)\}$, $\Omega_2 = \{x \in [x_2, x_3], g_1(x) < y < g_2(x)\}$, $\Omega = \{x \in [x_1, x_3], g_1(x) < y < g_2(x)\}$. Тогда $f(x,y)$ интегрируема в Ω, причем

$$\int_{x_1}^{x_3} dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy + \int_{x_2}^{x_3} dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy.$$

Монотонность интеграла. Пусть $f(x,y)$ интегрируема в области Ω, причем $f(x,y) \geq 0$ в области Ω, Ω - правильная в y-направлении. Тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \geq 0$$

.

Пример. Вычислим интеграл:

$$\int_2^4 dx \int_x^{2x} \frac{y}{x}dy = \int_2^4 \frac{1}{x}dx \int_x^{2x} ydy = \int_2^4 \frac{1}{x}dx\frac{y^2}{2}|_x^{2x} = \tag{21}$$

$$\int_2^4 \frac{3x}{2}dx = \frac{3x^2}{4}|_2^4 = 12 - 3 = 9.$$

5.3 Связь повторного и двойного интеграла

В области, правильной в каком-нибудь направлении, можно определить для одной и той же функции двойной и повторный интегралы. Между ними существует связь.

Теорема. Пусть Ω - правильная в y-направлении область с кусочно гладкой границей, $\Omega = \{x \in [x_1, x_2], g_1(x) < y < g_2(x)\}$, $f(x,y)$ - непрерывная в этой области функция. Тогда

$$\int\int_\Omega f(x,y)dS = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy.$$

Аналогичное соотношение справедливо и для областей, правильных в x-направлении. Эта теорема дает возможность аналитического вычисления двойного интеграла в том случае, если исходную область Ω можно представить как объединение правильных (в каком-нибудь направлении) областей. Далее, если область правильна в обоих направлениях, эта теорема дает возможность заменить порядок повторного интеграла.

Пример. Поменяем порядок интегрирования в интеграле:

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$$

Исходная область интегрирования: $\{y \in [0,1], y < x < \sqrt{y}\}$. Ее можно представить в виде: $\{x \in [0,1], x^2 < y < x\}$, т.е. она правильна в обоих направлениях, см. рис. 9. Соответственно, получаем:

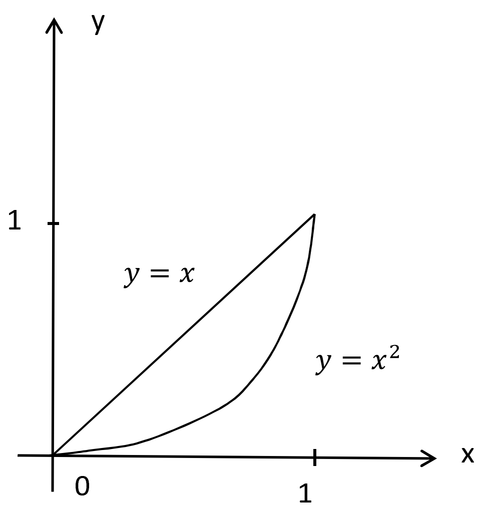

Рис. 9: Замена порядка интегрирования в области, правильной в обоих направлениях.

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy.$$

5.4 Замена переменных в двойном интеграле

Пусть в ограниченной области Ω, граница которой составлена из конечного числа гладких кривых, задана непрерывная функция $f(x,y)$, так что существует двойной интеграл $\int_\Omega f(x,y)dS$, и пара непрерывно дифференцируемых функций $x = \phi(u,v), y = \psi(u,v)$ реализует взаимно-однозначное преобразование области ω на плоскости переменных u, v в область Ω на плоскости переменных

x, y. Тогда справедливо следующее соотношение, реализующее замену переменных в двойном интеграле:

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\int_{\omega} f(\phi(u,v), \psi(u,v))|J(u,v)|dudv,$$

где выражение

$$J(u,v) = \frac{\partial\phi(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial\phi(u,v)}{\partial v}\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}$$

называется якобианом замены переменных. Замена переменных применяется тогда, когда область интегрирования (и/или подинтегральная функция) упрощается после перехода к новым переменным.

Пример. Вычислим интеграл:

$$\int\int_{\Omega} x^2y^2dxdy$$

по области Ω - кругу радиуса R. Перейдем в плоскости интегрирования к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$,$y = r\sin\varphi$. Исходная область интегрирования превратится в новых координатах в $\omega = \{0 \le r \le R, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ - правильную в обоих направлениях область. При этом

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = -r\sin\varphi, \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi, \frac{\partial y}{\partial\varphi} = r\cos\varphi, \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi,$$

так что

$$J(r,\varphi) = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial\varphi} - \frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial r} = r.$$

Эта формула дает якобиан перехода от декартовых координат к полярным. Переходя в двойном интеграле к новым переменным, получаем:

$$\int\int_{\Omega} x^2y^2dxdy = \int\int_{\omega} r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi r dr d\varphi = \int_0^R r^5dr\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi =$$

$$\frac{r^6}{6}|_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 2\varphi}{4}d\varphi = \frac{R^6}{48}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)d\varphi = \frac{\pi R^6}{24}.$$

6 Криволинейные интегралы

6.1 Криволинейные интегралы первого рода

Пусть функция $f(x,y)$ задана в области Ω, рассмотрим гладкую кривую L, лежащую в этой области, рис. 10. Для кривой может использоваться различная

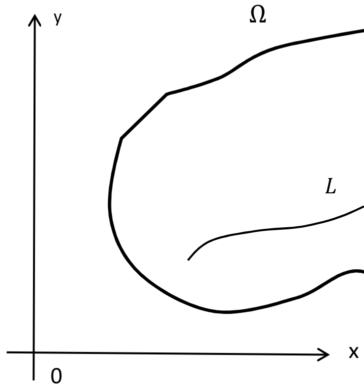

Рис. 10: Кривая L, вдоль которой интегрируется функция $f(x, y)$.

параметризация. Параметрическое описание кривой задается 2 функциями: $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$. Иногда в качестве параметра t выступает переменная x, так что для описания кривой достаточно одной функции: $y = \psi(x)$. Если в качестве t выступает y, имеем: $x = \varphi(y)$.

В приложениях возникает следующая конструкция. Разобъем кривую L на N достаточно малых частей, в каждой части выберем точку $M_k, 1 \leq k \leq N$, и пусть Δs_k - длина отрезка, разбивающего последовательные концы куска кривой. Построим интегральную сумму

$$I_\sigma = \sum_{k=1}^{k=N} f(M_k)\Delta s_k,$$

где σ обозначает способ разбиения кривой и выбора точек M_k. Пусть δ - наибольшее расстояние между последовательными точками разбиения.

Определение. Если существует конечный предел

$$\lim_{\delta \to 0} I_\sigma = \widetilde{I},$$

не зависящий от способа разбиения кривой, то говорят, что функция $f(x, y)$ интегрируема по кривой L, этот предел обозначают

$$\widetilde{I} = \int_L f(x, y)ds$$

и называют криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x, y)$ по кривой L.

Этот интеграл обладает всеми стандартными свойствами интеграла (линейность по функции, аддитивность по кривой, монотонность). Если кривая L имеет параметризацию $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, этот интеграл может быть сведен к одномерному интегралу:

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi^2(t)+\psi^2(t)}dt.$$

Пример.

Вычислим интеграл $\int_L (x+4y)ds$, где L - правая петля кривой $r^2 = cos(2\phi)$, $x \geq 0$.

Будем использовать полярные координаты, коль скоро сама кривая записана в этих координатах. Из условия следует, что правая ветвь кривой соответствует углам $-\pi/4 \leq \phi \leq \pi/4$. Для этой кривой имеем: $r = \sqrt{\cos(2\phi)}, x = rcos\phi = \sqrt{\cos(2\phi)}cos\phi, y = r\sin\phi = \sqrt{\cos(2\phi)}sin\phi$,

$$dr = -\frac{\sin(2\phi)d\phi}{\sqrt{\cos(2\phi)}}, ds = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\phi)^2} = \frac{d\phi}{\sqrt{\cos(2\phi)}},$$

(напомним, что в полярной системе кординат $dx = \cos\phi dr - r\sin\phi d\phi$,$dy = r\cos\phi d\phi + \sin\phi dr$, так что $ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\phi)^2}$.) Подставляя в интеграл, получаем:

$$\int_L (x+4y)ds = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [\cos\phi + 4\sin\phi]d\phi = (\sin\phi - 4\cos\phi)|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \sqrt{2}.$$

6.2 Криволинейные интегралы второго рода

Пусть функции $P(x,y), Q(x,y)$ заданы в области Ω, гладкая кривая L лежит в этой области, рис. 10. В приложениях также возникает следующая конструкция, связанная с этими функциями и кривой.

Разобъем кривую L на N достаточно малых частей, в каждой части выберем точку $M_k, 1 \leq k \leq N$, и пусть Δx_k Δy_k - длины соответствующих приращений отрезка разбиения. Построим интегральную сумму

$$I_\sigma = \sum_{k=1}^{k=N} (P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k),$$

где σ обозначает способ разбиения кривой и выбора точек M_k. Пусть δ - наибольшее расстояние между последовательными точками разбиения.

Определение. Если существует конечный предел

$$\lim_{\delta \to 0} I_\sigma = \widetilde{I},$$

не зависящий от способа разбиения кривой, то говорят, что что пара функций $P(x,y), Q(x,y)$ интегрируема по кривой L, этот предел обозначают

$$\widetilde{I} = \int_L (P(x,y)dx + Q(x,y)dy)$$

и называют криволинейный интеграл второго рода от пары функций $P(x,y), Q(x,y)$ по кривой L.

Отметим, что при этом у кривой L следует указывать направление обхода (т.е. мы рассматриваем ориентируемые кривые), так как знак интеграла зависит от выбора направления обхода кривой.

Если ввести вектор-функцию $\overrightarrow{f(x,y)} = (P(x,y), Q(x,y))$, и вектор $d\overrightarrow{s} = (dx, dy)$, то криволинейный интеграл второго рода можно записать с помощью скалярного произведения,

$$\widetilde{I} = \int_L (\overrightarrow{f(x,y)}, d\overrightarrow{s}).$$

Криволинейный интеграл второго рода также обладает стандартными свойствами обычных интегралов: линейность по функции (точнее, по вектор-функции $\overrightarrow{f(x,y)}$), аддитивность по кривой (с учетом ориентации). Если кривая $\widetilde{L}$ отличается от L только ориентацией, то

$$\int_L (\overrightarrow{f(x,y)}, d\overrightarrow{s}) = -\int_{\widetilde{L}} (\overrightarrow{f(x,y)}, d\overrightarrow{s}).$$

Связь криволинейных интегралов первого и второго рода. Если L - ориентированная гладкая кривая, $n(x,y) = (\cos(\alpha(x,y)), \sin(\alpha(x,y))$ - единичный вектор, касательный к L и направленный в соответствии с ее ориентацией, то

$$\int_L (\overrightarrow{f(x,y)}, d\overrightarrow{s}) = \int_L [P(x,y)\cos(\alpha(x,y)) + Q(x,y)\sin(\alpha(x,y))]ds,$$

где слева - криволинейный интеграл второго рода, справа - соответствующий криволинейный интеграл первого рода.

Пример.

Вычислим

$$\int_L [(y^2 + 2xy)dx + (x^2 - 2xy)dy],$$

где L - дуга параболы $y = x^2$ от точки (1,1) до точки (2,4).

Сведем этот интеграл к интегралу первого рода и, тем самым, к обычному одномерному интегралу. На кривой $y = x^2$ имеем: $dy = 2xdx$, так что

$$\int_L [(y^2+2xy)+(x^2-2xy)dy] = \int_1^2 [x^4+2x^3+(x^2-2x^3)2x]dx = \int_1^2 (4x^3-3x^4)dx = -18/5.$$

Связь криволинейных и двойных интегралов.

Теорема (формула Грина).

Пусть ограниченная область Ω имеет в качестве границы конечный набор гладких кривых, обозначим L объединение этих кривых, ориентированное так, что при обходе вдоль L область Ω остается слева. Пусть функции

$P(x,y), Q(x,y)$ непрерывны в Ω вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда

$$\int_L [P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = \int\int_\Omega \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right] dxdy.$$

Контрольная работа.

Задание 1. Даны функция $z = f(x,y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$. Найти: 1) $gradz(x,y)$ и его значение в точке A, 2) производную в точке A по направлению $\overrightarrow{a}$, $z = 4x^2 - xy$, $A(-1,1)$, $\overrightarrow{a} = (4,3)$.

Решение. Вычисляем $gradz(x,y) = (\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = (8x - y, -x)$, подставляя координаты точки A, находим: $gradz(A) = (-9, 1)$. Далее, вектор единичной длины вдоль $\overrightarrow{a}$: $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{a}/|\overrightarrow{a}| = (4,3)/\sqrt{4^2+3^2} = (4/5, 3/5)$. Соответственно, $\frac{\partial z}{\partial s} = (gradz, \overrightarrow{e}) = (-9 \cdot 4 + 1 \cdot 3)/5 = 7$.

Задание 2. Найти локальные максимумы, минимумы и седловые точки функции $f(x,y)$, $f(x,y) = 9 - 6x + 8xy - x^2 - 4y^2$.

Решение. Вычисляем частные производные $\frac{\partial f}{\partial x} = -6 + 8y - 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 8x - 8y$. Приравниваем их нулю - ищем точки экстремума, для которых получаем систему уравнений: $-6+8y-2x = 0, 8x-8y = 0$. Решаем эту систему: $x_1 = y_1 = 1$. Далее, вычисляем вторые частные производные в точке (x_1, y_1): $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -8$. Следовательно, $AC - B^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 = (-2)\cdot(-8) - 8^2 = -48 < 0$, так что это седловая точка функции $f(x,y)$.

Задание 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y)$ в замкнутой области Ω, заданной системой неравенств. Сделать чертеж. $z = x^2 - xy + 2x$, $-4x^2 + 4 \geq y \geq 0$.

Решение. Область представлена на рисунке 11, нижняя граница - прямая $y = 0$, верхняя - парабола $y = 4 - 4x^2$. Ищем экстремальные точки функции, решая систему $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 2 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -x = 0$, откуда находим: $x_1 = 0$, $y_1 = 2$. Она принадлежит указанной области.

Далее, рассмотрим сужение функции $z(x,y)$ на нижнюю границу. Для этого подставляем в $z(x,y)$ значение $y = 0$, так что $z_1(x) = x^2+2x$, при этом $-1 \leq x \leq 1$. Находим экстремальную точку функции $z_1(x)$ из уравнения $\frac{dz_1}{dx} = 2x+2 = 0$, так что $x_2 = -1$, соответственно $y_2 = 0$. Рассмотрим сужение функции $z(x,y)$ на верхнюю границу, для чего подставим $y = 4 - 4x^2$. При этом $z_2(x) = 4x^3 + x^2 - 2x$, $-1 \leq x \leq 1$. Ищем экстремальные точки: $\frac{z_2(x)}{dx} = 12x^2 + 2x - 2 = 0$, находим: $x_{3,4} = (-1 \pm \sqrt{13})/12$, $y_{3,4} = (65 \pm \sqrt{13})/18$. Добавляем еще пару точек (тех, где смыкаются линии, ограничивающие область): $x_5 = -1, y_5 = 0$, $x_6 = 1, y = 0$, причем пятая точка совпадает со второй. Итого имеем 5 "подозрительных"точек. Вычисляя значения $z(x,y)$ в этих точках, находим: $z_{max} = z(1,0) = 3$, $z_{min} = z(-1,0) = -1$.

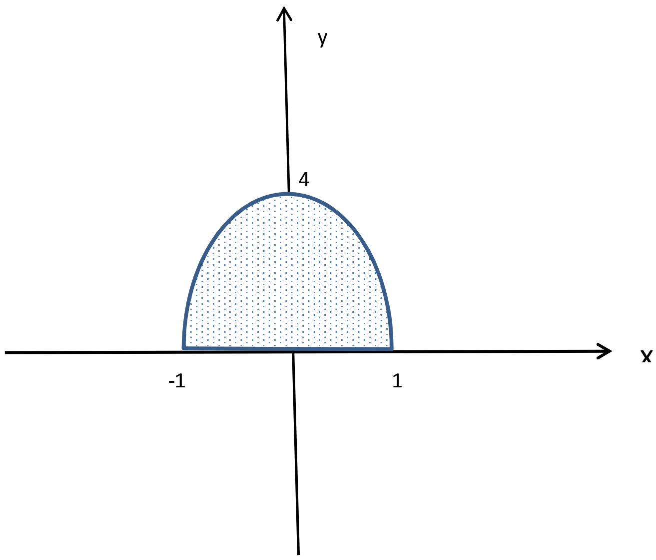

Рис. 11: Область, ограниченная параболой и прямой

Задание 4. Вычислить с помощью полярных координат

$$\int\int_{\Omega}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dxdy,$$

где $\Omega=\{(x,y):x^2+y^2\leq a^2\}$.

Решение. Перейдем к полярным координатам, $x=rcos\phi, y=rsin\phi$, в этих координатах наша область имеет вид: $0\leq\phi\leq 2\pi$, $0\leq r\leq a$, причем якобиан замены переменных равен r. Следовательно, в полярных координатах наш интеграл имеет вид:

$$\int\int_{\Omega}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{r^2(cos^2\phi-sin^2\phi)}{r^2}rdrd\phi=\int_0^{2\pi}cos(2\phi)d\phi\int_0^a rdr=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{sin(}{2}$$

Задание 5. $\int_L\frac{ds}{x+2y}$, где L - отрезок AB, A=(1,2), B=(4,5).

Решение. Выпишем сначала уравнение прямой, на которой лежит отрезок L. Нетрудно установить, что это $y=x+1$. Таким образом, мы можем подставить это выражение в интеграл, причем $y'(x)=1$, так что $\sqrt{1+(y'(x))^2}=\sqrt{2}$. Получаем:

$$\int_L\frac{ds}{x+2y}=\int_1^4\frac{\sqrt{2}dx}{x+2(x+1)}=\sqrt{2}\int_1^4\frac{dx}{3x+2}=\frac{\sqrt{2}}{3}\ln(14/5).$$

Контрольная работа 4.

Вариант 1

1. Даны функция $z=f(x,y)$, точка $A(x_0,y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$. Найти: 1) $gradz(x,y)$ и его значение в точке A, 2) производную в точке A по направлению $\overrightarrow{a}$, $z=2x^2+xy$, $A(-1,2)$, $\overrightarrow{a}=(3,4)$.

2. Найти локальные максимумы, минимумы и седловые точки функции $f(x,y)$, $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y)$ в замкнутой области Ω, заданной системой неравенств. Сделать чертеж. $z = x^2 + xy$, $-1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 3$.

4. Вычислить

$$\int_1^2 dx \int_3^4 \frac{dy}{(x+y)^2}.$$

5. Вычислить $\int_L \frac{ds}{x-y}$, где L - отрезок AB, A=(0,-2), B=(4,0).

Вариант 2

1. Даны функция $z = f(x,y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$. Найти: 1) $gradz(x,y)$ и его значение в точке A, 2) производную в точке A по направлению $\overrightarrow{a}$, $z = arctg(xy^2)$, $A(2,3)$, $\overrightarrow{a} = (4,-3)$.

2. Найти локальные максимумы, минимумы и седловые точки функции $f(x,y)$, $f(x,y) = xy(1-x-y)$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y)$ в замкнутой области Ω, заданной системой неравенств. Сделать чертеж. $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$, $x \leq 1; y \geq 0; y \leq x$.

4. Вычислить

$$\int_0^1 \int_{x^2-1}^{1-x} xydy.$$

5. Вычислить $\int_L \frac{ds}{x^2-2y}$, где L - отрезок AB, A=(-1,-2), B=(4,0).

Вариант 3

1. Даны функция $z = f(x,y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$. Найти: 1) $gradz(x,y)$ и его значение в точке A, 2) производную в точке A по направлению $\overrightarrow{a}$, $z = 5x^2 + 6xy$, $A(2,1)$, $\overrightarrow{a} = (1,2)$.

2. Найти локальные максимумы, минимумы и седловые точки функции $f(x,y)$, $f(x,y) = \frac{x^2y^2-8x+y}{xy}$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y)$ в замкнутой области Ω, заданной системой неравенств. Сделать чертеж. $z = x^2 + xy - 2$, $4x^2 - 4 \leq y \leq 0$.

4. Вычислить

$$\int\int_\Omega xydxdy,$$

где область Ω ограничена осями координат и кривой $x = acos^3t, y = asin^3t, 0 \leq t \leq \pi/2$.

5. Вычислить $\int_L (x^2 + y)ds$, L отрезок AB, A=(0,1), B=(-2,3).

Вариант 4

1. Даны функция $z = f(x,y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$. Найти: 1) $gradz(x,y)$ и его значение в точке A, 2) производную в точке A по направлению $\overrightarrow{a}$, $z = ln(2x+3y)$, $A(2,2)$, $\overrightarrow{a} = (2,-3)$.

2. Найти локальные максимумы, минимумы и седловые точки функции $f(x,y)$, $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y)$ в замкнутой области Ω, заданной системой неравенств. Сделать чертеж. $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$, $x \geq 0; y \geq 0; 2x + 3y \leq 12$.

4. Вычислить с помощью полярных координат

$$\int\int_{\Omega} cos(x^2 + y^2)dxdy,$$

где $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

5. Вычислить $\int_L xyds$, L есть контур квадрата, ограниченного линиями $x \pm y = 1, x \pm y = -1$.

Вариант 5

1. Даны функция $z = f(x,y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$. Найти: 1) $gradz(x,y)$ и его значение в точке A, 2) производную в точке A по направлению $\overrightarrow{a}$, $z = arctg(xy)$, $A(2,3)$, $\overrightarrow{a} = (4,3)$.

2. Найти локальные максимумы, минимумы и седловые точки функции $f(x,y)$, $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y)$ в замкнутой области Ω, заданной системой неравенств. Сделать чертеж. $z = 2x + y - xy$, $0 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 4$.

4. Вычислить с помощью полярных координат

$$\int\int_{\Omega} \frac{x^2}{x^2 + y^2} dxdy,$$

где $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

5. Вычислить $\int_L xyds$, L есть четверть окружности $x^2 + y^2 = 1$, лежащая в первом квадранте.

Вариант 6

1. Даны функция $z = f(x,y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$. Найти: 1) $gradz(x,y)$ и его значение в точке A, 2) производную в точке A по направлению $\overrightarrow{a}$, $z = arctg(y/x)$, $A(-1,1)$, $\overrightarrow{a} = (1,-1)$.

2. Найти локальные максимумы, минимумы и седловые точки функции $f(x,y)$, $f(x,y) = \exp(4y - x^2 - y^2)$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y)$ в замкнутой области Ω, заданной системой неравенств. Сделать чертеж. $z = x^2 + y^2 + x^2y + 4$, $|x| \leq 1; |y| \leq 1$.

4. Вычислить с помощью полярных координат

$$\int\int_{\Omega} \ln(1 + x^2 + y^2)dxdy,$$

где $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

5. Вычислить $\int_L (x^2 - y^2) ds$, где L - отрезок AB, A=(0,-2), B=(4,2).

Вариант 7

1. Даны функция $z = f(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$. Найти: 1) $gradz(x, y)$ и его значение в точке A, 2) производную в точке A по направлению $\overrightarrow{a}$, $z = arcsin(x^2/y)$, $A(1, 2)$, $\overrightarrow{a} = (5, -12)$.

2. Найти локальные максимумы, минимумы и седловые точки функции $f(x, y)$, $f(x, y) = x^3 y + 12x^2 - 8y$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области Ω, заданной системой неравенств. Сделать чертеж. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$, $x \leq 1; y \leq 1; x + y \geq 1$.

4. Вычислить с помощью полярных координат

$$\int\int_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dxdy,$$

где $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq ay\}$.

5. Вычислить $\int_L yds$, L есть дуга параболы $y^2 = 2x$ от точки (2,-2) до точки (8,4).

Вариант 8

1. Даны функция $z = f(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$. Найти: 1) $gradz(x, y)$ и его значение в точке A, 2) производную в точке A по направлению $\overrightarrow{a}$, $z = x^3 + xy^3$, $A(1, 3)$, $\overrightarrow{a} = (-5, 12)$.

2. Найти локальные максимумы, минимумы и седловые точки функции $f(x, y)$, $f(x, y) = \exp(y)\cos(x)$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области Ω, заданной системой неравенств. Сделать чертеж. $z = x^2/2 - xy$, $y \geq x^2/3; y \leq 3$.

4. Вычислить с помощью полярных координат

$$\int\int_{\Omega} y^2 \sqrt{a^2 - x^2} dxdy,$$

где $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

5. Вычислить $\int_L (x + y) ds$, $L = \{(x, y) : x = acost, y = asint, 0 \leq t \leq \pi/2.\}$

Вариант 9

1. Даны функция $z = f(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$. Найти: 1) $gradz(x, y)$ и его значение в точке A, 2) производную в точке A по направлению $\overrightarrow{a}$, $z = 3x/y^2$, $A(3, 4)$, $\overrightarrow{a} = (-3, -4)$.

2. Найти локальные максимумы, минимумы и седловые точки функции $f(x, y)$, $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 y^2}$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области Ω, заданной системой неравенств. Сделать чертеж. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$, $x \leq 0; y \leq 0; x + y \geq -3$.

4. Вычислить
$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{xdy}{(1+x^2+y^2)^3/2}.$$

5. Вычислить $\int_L (2x+3y)ds$, где L - отрезок AB, A=(0,-2), B=(4,4).

Вариант 10

1. Даны функция $z = f(x,y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$. Найти: 1) $gradz(x,y)$ и его значение в точке A, 2) производную в точке A по направлению $\overrightarrow{a}$, $z = 5x^2 - 2xy + y^2$, $A(1,1)$, $\overrightarrow{a} = (1,2)$.

2. Найти локальные максимумы, минимумы и седловые точки функции $f(x,y)$, $f(x,y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y)$ в замкнутой области Ω, заданной системой неравенств. Сделать чертеж. $z = xy - 2x - y$, $0 \le x \le 3; 0 \le y \le 4$.

4. Вычислить
$$\int_0^{\pi/2} dx \int_0^x \cos(x+y)dy$$
.

5. Вычислить $\int_L (x^2 - 2y)ds$, где L - отрезок AB, A=(0,-2), B=(4,0).

Вариант 11

1. Даны функция $z = f(x,y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$. Найти: 1) $gradz(x,y)$ и его значение в точке A, 2) производную в точке A по направлению $\overrightarrow{a}$, $z = 5x + 10x^2y + y^5$, $A(1,2)$, $\overrightarrow{a} = (4,-3)$.

2. Найти локальные максимумы, минимумы и седловые точки функции $f(x,y)$, $f(x,y) = x^2y^2 - 2xy^2 - 6x^2y + 12xy$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y)$ в замкнутой области Ω, заданной системой неравенств. Сделать чертеж. $z = x^2 + y^2 - 4x$, $-2 \le x \le 1; -1 \le y \le 3$.

4. Вычислить
$$\int\int_\Omega \frac{dxdy}{(x+y+1)^2},$$
$\Omega = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

5. Вычислить $\int_L x^2 ds$, $L = \{x^2 + y^2 = R^2, y \ge 0\}$

Вариант 12

1. Даны функция $z = f(x,y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$. Найти: 1) $gradz(x,y)$ и его значение в точке A, 2) производную в точке A по направлению $\overrightarrow{a}$, $z = 1 + x^2y^3$, $A(-1,1)$, $\overrightarrow{a} = (1,3)$.

2. Найти локальные максимумы, минимумы и седловые точки функции $f(x,y)$, $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y)$ в замкнутой области Ω, заданной системой неравенств. Сделать чертеж. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$, $0 \le x \le 2; -1 \le y \le 1$.

4. Вычислить
$$\int\int_{\Omega}\frac{ydxdy}{x^2},$$
$\Omega=\{x\geq 0, x^3\leq y\leq x^2\}$.

5. Вычислить $\int_L(2xydx+x^2dy)$, $L=\{(x,y): y=x^2/4, 0\leq x\leq 2.\}$

Вариант 13

1. Даны функция $z=f(x,y)$, точка $A(x_0,y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$. Найти: 1) $gradz(x,y)$ и его значение в точке A, 2) производную в точке A по направлению $\overrightarrow{a}$, $z=yx^y$, $A(2,1)$, $\overrightarrow{a}=(1,-1)$.

2. Найти локальные максимумы, минимумы и седловые точки функции $f(x,y)$, $f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=f(x,y)$ в замкнутой области Ω, заданной системой неравенств. Сделать чертеж. $z=x^2-2y+3$, $y-x\leq 1, x\leq 0; y\geq 0$.

4. Вычислить
$$\int\int_{\Omega}x^2y^2dxdy,$$
$\Omega=\{y^2\leq x\leq 1\}$.

5. Вычислить $\int_L(yx^{-1}dx+dy)$, $L=\{(x,y): y=\ln x, 1\leq x\leq e.\}$

Вариант 14

1. Даны функция $z=f(x,y)$, точка $A(x_0,y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$. Найти: 1) $gradz(x,y)$ и его значение в точке A, 2) производную в точке A по направлению $\overrightarrow{a}$, $z=x\sin(x+y)$, $A(\pi/4,\pi/4)$, $\overrightarrow{a}=(-1,1)$.

2. Найти локальные максимумы, минимумы и седловые точки функции $f(x,y)$, $f(x,y)=2x^4+y^4-x^2-2y^2$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=f(x,y)$ в замкнутой области Ω, заданной системой неравенств. Сделать чертеж. $z=x^2y$, $x^2+y^2\leq 1$.

4. Вычислить
$$\int\int_{\Omega}xy^2dxdy,$$
$\Omega=\{x^2+y^2\leq a^2, x\geq 0\}$.

5. Вычислить $\int_L(xdy-ydx)$, $L=\{(x,y): y=x^3, 0\leq x\leq 2.\}$

Вариант 15

1. Даны функция $z=f(x,y)$, точка $A(x_0,y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$. Найти: 1) $gradz(x,y)$ и его значение в точке A, 2) производную в точке A по направлению $\overrightarrow{a}$, $z=3x^4+y^3+xy$, $A(1,2)$, $\overrightarrow{a}=(-1,1)$.

2. Найти локальные максимумы, минимумы и седловые точки функции $f(x,y)$, $f(x,y)=xy^2(12-x-y), x>0, y>0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=f(x,y)$ в замкнутой области Ω, заданной системой неравенств. Сделать чертеж. $z=x^2+y^2-xy-x-y$, $x+y\leq 3; y\geq 0; x\geq 0$.

4. Вычислить
$$\int\int_{\Omega}(x^3+y^3)dxdy,$$
$\Omega=\{x^2+y^2\le R^2, y\ge 0\}$.

5. Вычислить $\int_L (x-1/y)dy$, $L=\{(x,y): y=x^2, 1\le x\le 2.\}$

Вариант 16

1. Даны функция $z=f(x,y)$, точка $A(x_0,y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$. Найти: 1) $gradz(x,y)$ и его значение в точке A, 2) производную в точке A по направлению $\overrightarrow{a}$, $z=arctg(y/x)$, $A(1/2,\sqrt{3}/2)$, $\overrightarrow{a}=(1,1)$.

2. Найти локальные максимумы, минимумы и седловые точки функции $f(x,y)$, $f(x,y)=x^2y^3(6-x-y)$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=f(x,y)$ в замкнутой области Ω, заданной системой неравенств. Сделать чертеж. $z=xy(6-x-y)$, $x+y\le 12, y\ge 0; x\ge 0$.

4. Вычислить
$$\int\int_{\Omega}(x+2y)dxdy,$$
$\Omega=\{2\le x\le 3, x\le y\le 2x\}$.

5. Вычислить $\int_L (xydx-y^2dy)$, $L=\{(x,y): y^2=2x, 0\le x\le 2.\}$

Вариант 17

1. Даны функция $z=f(x,y)$, точка $A(x_0,y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$. Найти: 1) $gradz(x,y)$ и его значение в точке A, 2) производную в точке A по направлению $\overrightarrow{a}$, $z=x-3y+\sqrt{3xy}$, $A(3,1)$, $\overrightarrow{a}=(1,0)$.

2. Найти локальные максимумы, минимумы и седловые точки функции $f(x,y)$, $f(x,y)=(x+y)x^{-1}y^{-1}-xy$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=f(x,y)$ в замкнутой области Ω, заданной системой неравенств. Сделать чертеж. $z=x+3y$, $x+y\le 6; x+4y\ge 4, y\le 2$.

4. Вычислить
$$\int\int_{\Omega}(x+y)dxdy,$$
$\Omega=\{x^2+y^2\le R^2, x\le y\}$.

5. Вычислить $\int_L xdy$, $L=\{(x,y): y^2+x^2=a^2, 0\le x, -a\le y\le a.\}$

Вариант 18

1. Даны функция $z=f(x,y)$, точка $A(x_0,y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$. Найти: 1) $gradz(x,y)$ и его значение в точке A, 2) производную в точке A по направлению $\overrightarrow{a}$, $z=(x+\sqrt{y})y^{-1}$, $A(2,1)$, $\overrightarrow{a}=(1,2)$.

2. Найти локальные максимумы, минимумы и седловые точки функции $f(x,y)$, $f(x,y)=(x+y^2)\exp(x/2)$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=f(x,y)$ в замкнутой области Ω, заданной системой неравенств. Сделать чертеж. $z=(y^2-x^2)\exp(1-x^2+y^2)$, $x^2+y^2\le 4$.

4. Вычислить
$$\int\int_\Omega xydxdy,$$
$\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 25, 3x + y \geq 5\}$.

5. Вычислить $\int_L (2xydx - x^2dy)$, $L = \{(x, y) : y = \sqrt{x/2}, 0 \leq x \leq 2.\}$

Вариант 19

1. Даны функция $z = f(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$. Найти: 1) $gradz(x, y)$ и его значение в точке A, 2) производную в точке A по направлению $\overrightarrow{a}$, $z = 3x^2y + 5xy^2$, $A(1, 1)$, $\overrightarrow{a} = (1, 2)$.

2. Найти локальные максимумы, минимумы и седловые точки функции $f(x, y)$, $f(x, y) = (5 - 2x + y)\exp(x^2 - y)$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области Ω, заданной системой неравенств. Сделать чертеж. $z = x^3+y^3-3xy$, $0 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 2$.

4. Вычислить
$$\int\int_\Omega (2y - x)dxdy,$$
$\Omega = \{y(y - x) \leq 2, x(x + y) \leq 3\}$.

5. Вычислить $\int_L ((xy - y^2)dx + xdy)$, $L = \{(x, y) : y = 2\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1.\}$

Вариант 20

1. Даны функция $z = f(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$. Найти: 1) $gradz(x, y)$ и его значение в точке A, 2) производную в точке A по направлению $\overrightarrow{a}$, $z = x^3 + 7xy^2$, $A(-1, 1)$, $\overrightarrow{a} = (-1, 2)$.

2. Найти локальные максимумы, минимумы и седловые точки функции $f(x, y)$, $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области Ω, заданной системой неравенств. Сделать чертеж. $z = y^4 - x^4$, $x^2 + y^2 \leq 9$.

4. Вычислить
$$\int\int_\Omega \exp(x - y)dxdy,$$
$\Omega = \{-1 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x\}$.

5. Вычислить $\int_L (x^2 + y^2)^n ds$, $L = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\}$

Список литературы

[1] *Пискунов Н.С.*Дифференциальное и интегральное исчисление, т.1. Издательство "Интеграл-Пресс 2009.

[2] *Бугров С.Я., Никольский С.М.* Высшая математика: Дифференциальное и интегральное исчисление. Издательство Дрофа, 2004.

[3] *Булдырев В.С., Павлов Б.С.* Линейная алгебра и функции многих переменных. Издательство ЛГУ, 1985.

[4] *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.Н.* Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных. СПб., Кристалл, 2009.

[5] *Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу, ч.2. М.:МГУ, 2007.