

24.  $\int_{ABC} (x^2 + y) dx - (y^2 + x) dy$ , вдоль ломаной ABC, где  $A(1;2)$ ,  $B(3;5)$ .

25.  $\int (xy - x^2) dx - xdy$ , вдоль дуги параболы  $y = 2x^2$  от точки  $A(0;0)$  до точки  $B(1;2)$ .

*2. 2 часть 2 смена*

**Задание 7. Вычислить двойной интеграл  $\iint_D f(x; y) dx dy$  по области  $D$  с заданной границей  $\partial D$ .**

1.  $f(x; y) = x/4 + y - 1$   $\partial D: \begin{cases} x + y = 1; x + y = 2; \\ x = 0; y = 0 \end{cases}$

2.  $f(x; y) = 1 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3}$   $\partial D: \begin{cases} y = x; y = 2x; \\ x = 0; x = 2 \end{cases}$

3.  $f(x; y) = x^2 + y^2$   $\partial D: \{x^2 + y^2 = 4y\}$

4.  $f(x; y) = x + y + 1$   $\partial D: \begin{cases} y = -x; x = \sqrt{y}; \\ y = 2 \end{cases}$

5.  $f(x; y) = 2x - y - 1$   $\partial D: \{y^2 = x + 1; x + y = 1\}$

6.  $f(x; y) = xy$   $\partial D: \begin{cases} y = e^x; x = 0; \\ x = 3; y = 0 \end{cases}$

7.  $f(x; y) = x^2/y^2$   $\partial D: \begin{cases} xy = 1; y = x; \\ x = 2 \end{cases}$

8.  $f(x; y) = y - 2x$   $\partial D: \begin{cases} y = x^2; x + y = 2; \\ y = 0 \end{cases}$

9.  $f(x; y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$   $\partial D: \{x^2 + y^2 = 1\}$

10.  $f(x; y) = 2y$   $\partial D: \begin{cases} y + x = 2; y = \sqrt{x}; \\ y = 0 \end{cases}$

11.  $f(x; y) = x/2$   $\partial D: \begin{cases} x = 0; x = \sin y; \\ y = 0; y = \pi \end{cases}$

12.  $f(x; y) = xy$   $\partial D: \begin{cases} x - y + 5 = 0; 2y = x; \\ y = 5 \end{cases}$

13.  $f(x; y) = x + 5y + 4$   $\partial D: \{y = x^2; x + y = 2\}$

14.  $f(x; y) = x^2 + y$   $\partial D: \{y = -x; x^2 = y\}$

15.  $f(x; y) = \ln x$   $\partial D: \begin{cases} y = x; y = x\sqrt{3}; \\ x = 1; x = 2 \end{cases}$

16.  $f(x; y) = 2x + 3y - 4$   $\partial D: \{x^2 + y^2 = 4x; x = 2y\}$

17.  $f(x; y) = x + y$   $\partial D: \{y = x^2; y = x\}$

18.  $f(x; y) = y$   $\partial D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x; x^2 + y^2 = 4x; \\ y = 0; y = x \end{cases}$

19.  $f(x; y) = 1/(x + y)^2$   $\partial D: \begin{cases} x + y = 2; x - y = 0; \\ y = 1/2 \end{cases}$

20.  $f(x; y) = xy/(x^2 + y^2)$   $\partial D: \begin{cases} x = y; x - 2y = 0; \\ x = 0; x = 2 \end{cases}$

21.  $f(x; y) = e^x$   $\partial D: \begin{cases} y = e^x; x = 0; \\ y = 2 \end{cases}$

22.  $f(x; y) = y(x^2 + y^2)^2$   $\partial D: \begin{cases} x^2 + y^2 = x; x^2 + y^2 = 2x; \\ y = 0; y = x \end{cases}$

$$23. f(x; y) = x + y \quad \partial D: \begin{cases} x + y = 4; x - y = 0; \\ x = 0 \end{cases}$$

$$24. f(x; y) = x - y \quad \partial D: \{y^2 = x; y = -x\}$$

25.  $f(x; y) = x$ , а область  $D$  представляет собой параллелограмм с вершинами  $A(1;2)$ ,  $B(2;4)$ ,  $C(2;7)$ ,  $E(1;5)$ .

### Дифференциальные уравнения

**Задание 8.** Решить дифференциальные уравнения первого порядка. Если даны начальные условия, то найти удовлетворяющее им частное решение.

1. a)  $(2x+5)dy + ydx = 0$ ,  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 0$ ;

b)  $y' = \frac{y}{x} + e^{y/x}$ ; c)  $x^2 y' = 2xy + 3$ .

2. a)  $xy - y' = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 10$ ;

b)  $(2x - y)dx + (x = y)dy = 0$ , c)  $xy' = x^4 - 2y$ .

3. a)  $y' - (2x+2)\sqrt{1-y^2} = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ ;

b)  $y' = \frac{x+y}{x-y}$ ; c)  $(x^2+1)dy = (3-4xy)dx$ .

4. a)  $y'\sqrt{1+x^2} - y = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 4$ ;

b)  $(x^2 - y^2)dx + xydy = 0$ ; c)  $(x^2 - 1)y' = x^3 - x + xy$

5. a)  $y'(4-x^2) - 4y = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 5$ ;

b)  $(y^2 - xy)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$ ; c)  $(1-x^2)y' = 2xy + 3$ .

6. a)  $y'\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{9-y^2} = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ;

b)  $xy' = y \ln \frac{y}{x}$ ; c)  $x dy = (3x^3 - y) dx$ .

7. a)  $y' - 2xy - y = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = \sqrt{3}$ ;

b)  $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{x^2 + y^2}$ ; c)  $y' + y = e^x$ .

8. a)  $\sqrt{9-x^2} dy - y dx = 0$ ,  $x_0 = 3/2$ ,  $y_0 = 1$ ;

b)  $\frac{xy' - y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ ; c)  $y' + y = e^x \sin x$ .

9. a)  $2dy - (1+4y^2)dx = 0$ ,  $x_0 = \pi/12$ ,  $y_0 = -1/2$ ;

b)  $xy' = y \left(1 + \ln \frac{y}{x}\right)$ ; c)  $y' + \frac{1-2x}{x} y = 1$ .

10. a)  $x\sqrt{25-y^2} - e^{-x} y' = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ;

b)  $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$ ; c)  $xy' + y = \sin x$ .

11. a)  $dy - 2y dx = dx$ ,  $x_0 = \ln 2$ ,  $y_0 = 5/2$ ;

b)  $xy' = y + \sqrt{25x^2 - y^2}$ ; c)  $y' + y = e^{-x}$ .

12. a)  $y' \operatorname{tg} x = 2y + 1$ ,  $x_0 = \pi/4$ ,  $y_0 = 1/2$ ;

b)  $y^2 x dy = (x^3 + y^3) dx$ ; c)  $x dy + y dx + e^x dx = 0$ .

13. a)  $\sqrt{x} dy - y dx = dx$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ;

- b)  $2x^2y' = 3x^2 + 6xy + y^2$ ;      c)  $y' - 5x^4y = e^{x^5}$ .
- 14.a)  $y'x + \sqrt{4-y^2} = 0$ ,  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 0$ ;  
 b)  $x^2dy = (x^2 + y^2 + xy)dx$ ;      c)  $xy' - y = x\sqrt{x}$ .
- 15.a)  $x + xy + y'(y + xy) = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ;  
 b)  $x^2y' = y^2 + xy$ ;      c)  $xy' + y = \ln x + 1$ .
- 16.a)  $2x^2ydy = (1 + x^2)dx$ ,  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 2$ ;  
 b)  $x^3dy = (x^2 - y^2)ydx$ ;      c)  $\sqrt{1-x^2}(xy' + y) = 1$ .
- 17.a)  $3dy = (1 - 3y^2)y \sin x dx$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1/\sqrt{3}$ ;  
 b)  $xdy = (y - 2\sqrt{xy})dx$ ;      c)  $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$ .
- 18.a)  $xydx + (1 + y^2)\sqrt{1+x^2}dy = 0$ ,  $x_0 = \sqrt{8}$ ,  $y_0 = 1$ ;  
 b)  $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x$ ;      c)  $xy' - \frac{y}{x+1} = x$ .
- 19.a)  $(y^2 - 1) + (2xy + 3y)y' = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 2$ ;  
 b)  $(x + y)^2 dx = xydy - y^2 dx$ ;      c)  $e^x(dy + ydx) = \sin 2x dx$ .
- 20.a)  $xy' + y = y^2$ ,  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 0,5$ ;  
 b)  $(x^2 + y^2)y' = 2xy$ ;      c)  $x^2y' + xy + 1 = 0$ .
- 21.a)  $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ ,  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 0$ ;  
 b)  $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$ ;      c)  $(2x + 1)y' = 4x + 2y$ .

- 22.a)  $y'(x^2 - 1) + 2xy^2 = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ ;  
 b)  $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$ ;      c)  $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}$ .
- 23.a)  $\sqrt{9 - y^2} dx - xdy = 0$ ,  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 3/2$ ;  
 b)  $xy' - y = (x + y)\ln \frac{x+y}{x}$ ;      c)  $xy' - 2y = 2x^4$ .
- 24.a)  $2dx - (1 + 4x^2)dy = 0$ ,  $x_0 = -1/2$ ,  $y_0 = \pi/12$ ;  
 b)  $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$ ;      c)  $(xy + e^x)dx = xdy$ .
- 25.a)  $(1 + e^x)yy' = e^x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ ;  
 b)  $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$ ;      c)  $xdy + ydx + e^x dx = 0$ .

**Задание 9. Найти общее решение дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижения порядка.**

- $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$ .
- $y'' + y'tgx = \sin x \cos x$ .
- $y'' + 2y(y')^3 = 0$ .
- $xy'' + xy' = 1$ .
- $yy'' + (y')^2 = 0$ .
- $(y')^2 - 2yy'' = 0$ .
- $y''x \ln x = y'$ .
- $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$ .
- $y^3y'' = 1$ .
- $2yy'' + y'' + (y')^4 = 0$ .
- $y'' + \frac{1}{x}y' = 0$ .
- $yy'' + (y')^2 = y^2 \ln y$ .
- $xy'' = 1 + x^2$ .
- $(1 - x^2)y'' - xy' = 0$ .

$$15. y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0.$$

$$16. y'' = 2 - y.$$

$$17. xy'' - y' = e^x x^2.$$

$$18. x(y'' + 1) + y' = 0.$$

$$19. y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2.$$

$$20. (y'')^2 = (y')^2 + 1.$$

$$21. y''(2y' + x) = 1.$$

$$22. y'' = 2yy'.$$

$$23. y'' = e^y.$$

$$24. (y')^2 = (3y - 2y')y''.$$

$$25. xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}.$$

### Ряды

**Задание 10.** Установить сходимость или расходимость следующих числовых рядов.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n!}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(n+1)^2}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(n+1)^2}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^4}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^3+5}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n}2^n}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n^2}{n^3}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{3^n}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(3n)!}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n!}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{(3n)!}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n!}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!2^n}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n}3^n}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}.$$

**Задание 11.** Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n}{3n+2}.$$

$$3. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{100n+1}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[3]{n}}{n+2}.$$

$$6. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)^2}{n^2+1}.$$

$$8. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3n-2)!}{(2n+5)!}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{(2n-1)\sqrt{3^n}}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^n}{n4^n}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n n\sqrt{n}}.$$

$$18. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n-1)}{3^{n+1}}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}} \quad 20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1} \quad 21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n} \quad 23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \quad 24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+1}}$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)^n}{2^{n-1}n^n}$$

$$22. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n+3^n}$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+1)!} x^n$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

$$25. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+2)}$$

**Задание 12. Найдите интервалы сходимости рядов.**

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/3}}{n!} x^n \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} x^n \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt{n}} x^n$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} x^n \quad 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)} x^n \quad 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n} x^n$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n+1)^n} x^n \quad 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)5^n} x^n \quad 9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{(n+1)^n} x^n$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{(2n-1)3^n}} \quad 11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x/3)^n}{(n+1)(n+2)} \quad 12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{(2n-1)5^n}}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} x^n \quad 14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{(n^2+1)5^n} \quad 15. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^n}{3n^2+1} \quad 17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n/3}}{n!} x^n \quad 18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n(n+1)} x^n$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} x^n \quad 20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)}{8^n(n+1)} x^n \quad 21. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} x^n$$

**Библиографический список**

1. Баврин И.И. Высшая математика: Учебник. – М.: Высшая школа, 2001. – 612 с.
2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989. – 656 с.
3. Шитачев В.С. Высшая математика: Учебник. – М.: Высшая школа, 2002. – 479 с.