ГРУППА

Фамилия имя отчество ____№

Теория вероятностей.

Контрольная работа: задачи на подсчет вероятностей.

Домашнее задание №1. Непрерывные случайные величины.

Дана плотность распределения $f(x)=\begin{cases} C & x\in(q_1;q_2) \\ A|x-z_3| & x\in(z_1;z_2) \\ 0 & x\notin(q_1;q_2)\mathrm{U}(z_1;z_2) \end{cases}$ случайной величины X, причем известно, что $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(x)dx=R$. В условии домашнего задания отсутствуют значения некоторых параметров.

q_1	q_2	z_1	z_2	z_3	R	C	A

Требуется:

1) найти недостающие значения параметров и занести их в таблицу;
2) найти аналитическое выражение плотности распределения случайной величины X;
3) построить график плотности распределения;
4) найти аналитическое выражение функции распределения случайной величины X;
5) построить график функции распределения;
6) найти математическое ожидание MX случайной величины X: $MX=$

7) найти дисперсию DX случайной величины X: $DX=$

8) найти среднее квадратичное отклонение (стандартное отклонение) $\sigma=\sqrt{DX}$ случайной величины X: $\sigma=$

9) найти медиану mX случайной величины X $mX=$

10) найти $P(|X-MX|<\sigma)$: $P(|X-MX|<\sigma)=$

ДАТА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ ДАТА ЗАЩИТЫ

Самостоятельно решать задачи из сборника задач по математике для втузов часть 4 под редакцией А.В.Ефимова и А.С.Поспелова,

ГРУППА

Фамилия имя отчество ____№

Математическая статистика

Домашнее задание №2. Первичная обработка экспериментальных данных.

Даны 2 серии результатов измерений некоторого параметра, полученных в результате экспериментов.

Требуется:

1) найти точечную оценку $\bar{x}_1$ математического ожидания для первой серии: $\bar{x}_1 =$

2) найти точечную оценку $\bar{x}_2$ математического ожидания для второй серии: $\bar{x}_2 =$

3) найти точечную оценку s_1^2 дисперсии для первой серии: $s_1^2 =$

4) найти точечную оценку s_1 стандартного отклонения (точность измерений) для первой серии: $s_1 =$

5) найти точечную оценку s_2^2 дисперсии для второй серии: $s_2^2 =$

6) найти точечную оценку s_2 стандартного отклонения (точность измерений) для второй серии: $s_2 =$

7) найти доверительный интервал для математического ожидания для первой серии с надежностью (доверительной вероятностью) 0,95:

8) найти доверительный интервал для математического ожидания для второй серии с надежностью (доверительной вероятностью) 0,95:

9) найти доверительный интервал для стандартного отклонения для первой серии с надежностью (доверительной вероятностью) 0,95:

10) найти доверительный интервал для стандартного отклонения для второй серии с надежностью (доверительной вероятностью) 0,95:

11) проверить гипотезу о равенстве дисперсий в двух сериях с надежностью (доверительной вероятностью) 0,95:

12) проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий в двух сериях с надежностью (доверительной вероятностью) 0,95:

13) объединить обе серии и найти $\bar{x}$ сводную (улучшенную) точечную оценку математического ожидания $\bar{x} =$

14) объединить обе серии и найти s^2 сводную (улучшенную) точечную оценку дисперсии $s^2 =$ и $s = \sqrt{s^2} =$

15) объединить обе серии и найти наибольшее и наименьшее значения, затем полученный интервал разбить на 10 частей, посчитать количество измерений, попавших в каждый интервал (пограничные значения отнести к тому интервалу, в который попало меньше чисел) и построить гистограмму;

16) интервалы, в которые попало меньше 5 чисел, объединить с соседним интервалом, в который попало меньше чисел;

19) пользуясь критерием Пирсона (критерий χ^2), проверить гипотезу о нормальности распределения с параметрами $\bar{x}$ и s .

ДАТА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ ДАТА ЗАЩИТЫ

ГРУППА

Фамилия имя отчество ____№

Математическая статистика

Домашнее задание №3. Построение регрессионной модели (сглаживание экспериментальных данных).

Задание содержит 10 точных значений аргумента x_i и соответствующие им полученные в результате дублированных независимых измерений значения функции $y(x_i)$, т.е. заданные значения y_i представляют собой значения функции $y(x_i)+e_i$, где e_i – ошибка измерений. Предполагается, что результаты измерений являются равноточными и ошибки измерений – значения независимых случайных величин, каждая из которых имеет нормальное распределение с параметрами $(0;\sigma)$. (все вычисления вести с точность до 10^{-4})

Требуется:

1) Построить систему многочленов: $T_1=1;\ T_2=X;\ T_3=X^2+\mu X+\nu$, ортогональных с данными весами (процесс ортогонализации Грама–Шмидта).

Для этого необходимо

а) посчитать веса w_i – количество дублированных измерений y_{ij} , соответствующих данному значению x_i, и вычислить сумму весов (квадрат нормы $T_1=1$: $W=\sum\limits_{i=1}^{10} w_i=\|1\|^2=<1,1>=$

б) сделать линейное преобразование аргументов x_i, чтобы в дальнейшем иметь дело с целыми числами $h\cdot x_i$, вычислить $\bar{x}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10} h\cdot x_i\cdot w_i}{W}$ и получить кодированные значения аргумента X :

$X_i=hx_i-\bar{x}$ (они должны получиться в промежутке [–10; 10]).

в) **Проверить ортогональность с данными весами** $T_1=1$ и $T_2=X$, т.е.

$<1,X>=\sum\limits_{i=1}^{10} X_i\cdot w_i=0$.

г) Вычислить квадрат нормы X : $\|X\|^2=<X,X>=\sum\limits_{i=1}^{10} X_i^2\cdot w_i=$

д) Построить многочлен $T_3=X^2+\mu X+\nu$. Для этого просчитать

$<X^2,X>=\sum\limits_{i=1}^{10} X_i^3\cdot w_i=$

$\mu=-\dfrac{<X^2,X>}{\|X\|^2}==$

$\nu=-\dfrac{<X^2,1>}{\|1\|^2}=$

е) Просчитать значения $T_3(X_i)$

ж) **Проверить ортогональность с данными весами** $T_3=X^2+\mu X+\nu$ и $T_1=1$,

$T_3=X^2+\mu X+\nu$ и $T_2=X$, т.е. $<1,T_3>=0$ и $<X,T_3>=0$

з) Просчитать квадрат нормы $T_3=\sum\limits_{i=1}^{10} T_3(X_i)^2\cdot w_i=\|T_3\|^2=$

2) Провести первичную обработку результатов измерений.

а) Для каждого значения X_i просчитать средние значения y_{ij}, т.е. получить $Y_i = \frac{\sum_{j=1}^{w_i} y_{ij}}{w_i}$.

б) На миллиметровой бумаге в системе координат X, Y нанести точки с координатами (X_i, Y_i).

в) Для каждого значения X_i просчитать точечную оценку $s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{w_i} y_{ij}^2 - w_i Y_i^2}{w_i - 1}$.

г) Просчитать сводную оценку для дисперсии $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} s_i^2 \cdot (w_i - 1)}{W - 10} =$

3) Построить линейную модель: $Y_{лин} = B_1 \cdot T_1 + B_2 \cdot T_2 = B_1 \cdot 1 + B_2 \cdot X$.

Для этого

а) Вычислить B_1, B_2 – коэффициенты Фурье, т.е.

$$B_1 = \frac{< Y, T_1 >}{\|T_1\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^{10} Y_i \cdot 1 \cdot w_i}{W} =$$

$$B_2 = \frac{< Y, T_2 >}{\|T_2\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^{10} Y_i \cdot X_i \cdot w_i}{\|X\|^2} =$$

б) вычислить значения линейной модели $Y_{лин}(X_i)$

в) На той же миллиметровке нанести точки с координатами $(X_i, Y_{лин}(X_i))$, т.е. нарисовать прямую – график линейной модели.

г) просчитать отклонения от линейной модели $\Delta Y_{лин}(X_i) = Y_i - Y_{лин}(X_i)$

д) **проверить ортогональность** $\Delta Y_{лин}$ и $T_1 = 1$, т.е. $\sum_{i=1}^{10} \Delta Y_{лин}(X_i) \cdot 1 \cdot w_i = 0$, а также $\Delta Y_{лин}$ и $T_2 = X$, т.е. $\sum_{i=1}^{10} \Delta Y_{лин}(X_i) \cdot X_i \cdot w_i = 0$.

е) На новой миллиметровке (с соответствующим масштабом) нанести точки с координатами $(X_i, \Delta Y_{лин}(X_i))$ и соединить их.

ж) Провести анализ полученного графика и сделать соответствующий вывод.

з) Вычислить квадрат нормы $\Delta Y_{лин}$, равный $\sum_{i=1}^{10} \Delta Y_{лин}(X_i)^2 \cdot w_i$.

и) Вычислить $S^2_{адлин} = \frac{1}{8} \|\Delta Y_{лин}\|^2$

к) Пользуясь критерием Фишера, проверить адекватность линейной модели с надежностью 0,95.

Для этого вычислить $\frac{S^2_{адлин}}{s^2} =$ и сравнить его с критическим значением.

4) Построить квадратичную модель:
$Y_{кв} = Y_{лин} + B_3 \cdot T_3 = B_1 \cdot T_1 + B_2 \cdot T_2 + B_3 \cdot T_3 = B_1 \cdot 1 + B_2 \cdot X + +B_3 \cdot T_3$.

Для этого

а) Вычислить B_3 – коэффициент Фурье, т.е.

$$B_3 = \frac{< Y, T_3 >}{\|T_3\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^{10} Y_i \cdot T_3(X_i) \cdot w_i}{\|T_3\|^2} =$$

б) вычислить значения квадратичной модели $Y_{кв}(X_i)$

в) На той же миллиметровке нанести точки с координатами $(X_i, Y_{кв}(X_i))$, т.е. нарисовать параболу – график квадратичной модели.

г) просчитать отклонения от квадратичной модели $\Delta Y_{кв}(X_i) = Y_i - Y_{кв}(X_i)$

д) **проверить ортогональность** $\Delta Y_{кв}$ и $T_1 = 1$, т.е. $\sum_{i=1}^{10} \Delta Y_{кв}(X_i) \cdot 1 \cdot w_i = 0$, $\Delta Y_{кв}$ и $T_2 = X$, т.е. $\sum_{i=1}^{10} \Delta Y_{кв}(X_i) \cdot X_i \cdot w_i = 0$, а также $\Delta Y_{кв}$ и T_3, т.е. $\sum_{i=1}^{10} \Delta Y_{кв}(X_i) \cdot T_3(X_i) \cdot w_i = 0$.

е) На новой миллиметровке (с соответствующим масштабом) нанести точки с координатами $(X_i, \Delta Y_{кв}(X_i))$ и соединить их.

ж) Провести анализ полученного графика и сделать соответствующий вывод.

з) Вычислить квадрат нормы $\Delta Y_{кв}$, равный $\sum_{i=1}^{10} \Delta Y_{кв}(X_i)^2 \cdot w_i$.

и) Вычислить $S^2_{адкв} = \frac{1}{7} \|\Delta Y_{кв}\|^2$

к) Пользуясь критерием Фишера, проверить адекватность линейной модели с надежностью 0,95.

Для этого вычислить $\frac{S^2_{адкв}}{s^2}$ = и сравнить его с критическим значением.

5) Построить доверительные интервалы для коэффициентов регрессии с надежность 0,95 и сделать вывод относительно значимости этих коэффициентов.

Для этого использовать распределением Стьюдента. Так как B_i представляют собой несмещенные оценки для соответствующих истинных коэффициентов квадратичной функции β_i и имеют нормальные распределения с параметрами $(\beta_i, \frac{\sigma}{\|T_i\|})$, а $\frac{s^2(W-10)}{\sigma}$ имеет распределение χ^2 с параметром $k = W - 10$ и эти оценки независимы, то можно для заданной надежности 0,95 для каждого β_i построить доверительный интервал

для β_1: $(B_1 - \tau\sqrt{s^2 / \|T_1\|^2} ; B_1 + \tau\sqrt{s^2 / \|T_1\|^2})$

для β_2: $(B_2 - \tau\sqrt{s^2 / \|T_2\|^2} ; B_2 + \tau\sqrt{s^2 / \|T_2\|^2})$

для β_3: $(B_3 - \tau\sqrt{s^2 / \|T_3\|^2} ; B_3 + \tau\sqrt{s^2 / \|T_3\|^2})$

6) Сделать выводы по результатам всей этой работы.

ДАТА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ ДАТА ЗАЩИТЫ