МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
„МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ“

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

II семестр

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Для студентов очного обучения
факультетов Электроники, ИТ, РТС

МОСКВА 2012

Составители: В.П.Барашев, Е.О.Сивкова

Редактор Г.Г.Магарил-Ильяев

Контрольные задания содержат типовой расчет по алгебре и геометрии. Представлены все основные типы задач, связанных с разложением многочленов на множители, вычислениями с комплексными числами, алгеброй линейных операторов, а также задачи по теории линейных и евклидовых пространств и теории билинейных и квадратичных форм. Все перечисленные типы задач включены в программу I курса дневного отделения. Типовой расчет выполняется студентами в письменном виде и сдается преподавателю до начала зачетной сессии.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета университета.

Рецензенты: К.Ю.Осипенко,
Д.Л.Кудрявцев

Контрольные задания напечатаны в авторской редакции
Подписано в печать 16.01.2012. Формат 60 х 84 1/16.
Усл. печ. л. 2,09. Усл.кр.-отт. 8,37. Уч.изд.л. 2,25.
Тираж 200 экз. С 16

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
„Московский государственный технический университет
радиотехники, электроники и автоматики“
119454, Москва, пр.Вернадского, 78

II семестр

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

Задача 1.1. Найти рациональные корни и разложить многочлен

$$P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$$

а) на линейные множители;
б) на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами.

№	a	b	c	d	№	a	b	c	d
1	9	−4	9	−4	**2**	10	−73	114	119
3	9	−53	156	18	**4**	10	−57	112	39
5	4	−11	26	−15	**6**	9	−23	28	−10
7	6	−23	44	8	**8**	9	−37	76	−8
9	9	−20	49	−10	**10**	4	−13	8	15
11	9	−11	139	119	**12**	10	−23	56	−15
13	9	−43	145	−91	**14**	9	−41	65	−25
15	6	−37	114	−18	**16**	9	−4	9	−4
17	6	−19	10	25	**18**	6	−17	22	−10
19	9	−34	109	26	**20**	10	−47	158	−91
21	9	−4	9	−4	**22**	10	−73	114	119
23	9	−53	156	18	**24**	10	−57	112	39
25	4	−11	26	−15	**26**	9	−23	28	−10
27	6	−23	44	8	**28**	9	−37	76	−8
29	9	−20	49	−10	**30**	4	−13	8	15

Задача 1.2. Разложить многочлен

$$P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$$

а) на линейные множители;
б) на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами, если известен один из его корней z_0.

№	a	b	c	d	z_0
1	-14	71	-106	-102	$5+3i$
2	-20	148	-480	551	$5+2i$
3	-22	199	-942	1886	$4-5i$
4	-16	89	-186	78	$5+i$
5	-12	60	-216	391	$1+4i$
6	-16	109	-606	1628	$1-6i$
7	-24	234	-1080	1769	$6+5i$
8	-20	135	-314	50	$7+i$
9	-8	27	-44	-26	$2+3i$
10	-14	83	-378	858	$1-5i$
11	-20	165	-758	1598	$3-5i$
12	-12	68	-192	175	$3-4i$
13	-22	175	-586	666	$6+i$
14	-16	103	-266	82	$5+4i$
15	-18	119	-360	442	$3-2i$
16	-12	48	-60	-17	$4-i$
17	-12	58	-108	25	$4+3i$
18	-24	244	-1284	2623	$5-6i$
19	-16	108	-472	899	$2-5i$
20	-18	143	-922	3050	$1-7i$
21	-14	71	-106	-102	$5+3i$
22	-20	148	-480	551	$5+2i$

Продолжение задачи 1.2

№	a	b	c	d	z_0
23	-22	199	-942	1886	$4-5i$
24	-16	89	-186	78	$5+i$
25	-12	60	-216	391	$1+4i$
26	-16	109	-606	1628	$1-6i$
27	-24	234	-1080	1769	$6+5i$
28	-20	135	-314	50	$7+i$
29	-8	27	-44	-26	$2+3i$
30	-14	83	-378	858	$1-5i$

Задача 1.3. Решить уравнение. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

№	
1	$z^6 - 2z^3 + 4 = 0$
2	$z^8 - \left(2\sqrt{3} + 2i\right) z^4 + 2 + 2i\sqrt{3} = 0$
3	$z^6 - \left(3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}\right) z^3 + 9i = 0$
4	$z^8 - 3\sqrt{3}\, z^4 + 9 = 0$
5	$z^6 + 2z^3 + 4 = 0$
6	$z^8 + \left(2\sqrt{3} - 2i\right) z^4 + 2 - 2i\sqrt{3} = 0$
7	$z^6 + \left(3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}\right) z^3 - 9i = 0$
8	$z^8 + 3\sqrt{3}\, z^4 + 9 = 0$
9	$z^6 - 4z^3 + 16 = 0$
10	$z^8 - \left(4\sqrt{3} + 4i\right) z^4 + 8 + 8i\sqrt{3} = 0$

Продолжение задачи 1.3	
№	
11	$z^6-\left(5\sqrt{2}+5i\sqrt{2}\right)z^3+25i=0$
12	$z^8-5\sqrt{3}\,z^4+25=0$
13	$z^6+4z^3+16=0$
14	$z^8+\left(4\sqrt{3}-4i\right)z^4+8-8i\sqrt{3}=0$
15	$z^6+\left(5\sqrt{2}-5i\sqrt{2}\right)z^3-25i=0$
16	$z^8+5\sqrt{3}\,z^4+25=0$
17	$z^6-6z^3+36=0$
18	$z^8-\left(6\sqrt{3}+6i\right)z^4+18+18i\sqrt{3}=0$
19	$z^6-\left(7\sqrt{2}+7i\sqrt{2}\right)z^3+49i=0$
20	$z^8-7\sqrt{3}\,z^4+49=0$
21	$z^6-2z^3+4=0$
22	$z^8-\left(2\sqrt{3}+2i\right)z^4+2+2i\sqrt{3}=0$
23	$z^6-\left(3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}\right)z^3+9i=0$
24	$z^8-3\sqrt{3}\,z^4+9=0$
25	$z^6+2z^3+4=0$
26	$z^8+\left(2\sqrt{3}-2i\right)z^4+2-2i\sqrt{3}=0$
27	$z^6+\left(3\sqrt{2}-3i\sqrt{2}\right)z^3-9i=0$
28	$z^8+3\sqrt{3}\,z^4+9=0$
29	$z^6-4z^3+16=0$
30	$z^8-\left(4\sqrt{3}+4i\right)z^4+8+8i\sqrt{3}=0$

Задача 1.4. Представить комплексное число z в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.

№	z	№	z
1	$\left(\dfrac{(-1+i^{15})\,2e^{i\pi/7}}{-\sqrt{3}+i}\right)^{14}$	2	$\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})\,e^{-i\pi/7}}{1+i^{19}}\right)^{21}$
3	$\left(\dfrac{(2-2i^{17})\,5e^{-i\pi/5}}{\sqrt{150}+i\sqrt{50}}\right)^{20}$	4	$\left(\dfrac{(\sqrt{6}+i\sqrt{2})\,e^{i\pi/5}}{-2+2i^{21}}\right)^{20}$
5	$\left(\dfrac{(1-i^{23})\,e^{2i\pi/5}}{\sqrt{3}+i}\right)^{10}$	6	$\left(\dfrac{(\sqrt{18}+i\sqrt{6})\,e^{-2i\pi/5}}{-2+2i^{25}}\right)^{10}$
7	$\left(\dfrac{(2+2i^{27})\,e^{3i\pi/5}}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}\right)^{15}$	8	$\left(\dfrac{(\sqrt{15}+i\sqrt{5})\,e^{-3i\pi/5}}{-\sqrt{5}+i^{29}\sqrt{5}}\right)^{15}$
9	$\left(\dfrac{(2+2i^{31})\,e^{4i\pi/5}}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}\right)^{40}$	10	$\left(\dfrac{(\sqrt{21}-i\sqrt{7})\,e^{-4i\pi/5}}{-\sqrt{7}+i^{29}\sqrt{7}}\right)^{20}$
11	$\left(\dfrac{(-1+i^{31})\,2e^{i\pi/7}}{-\sqrt{6}+i\sqrt{6}}\right)^{14}$	12	$\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})\,e^{-i\pi/7}}{\sqrt{2}+i^{35}\sqrt{2}}\right)^{21}$
13	$\left(\dfrac{(\sqrt{2}-i^{33}\sqrt{2})\,5e^{-i\pi/5}}{\sqrt{150}+i\sqrt{50}}\right)^{20}$	14	$\left(\dfrac{(\sqrt{6}+i\sqrt{2})\,e^{i\pi/5}}{-\sqrt{8}+i^{37}\sqrt{8}}\right)^{20}$
15	$\left(\dfrac{(2-2i^{39})\,e^{2i\pi/5}}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}\right)^{10}$	16	$\left(\dfrac{(\sqrt{18}+i\sqrt{6})\,e^{-2i\pi/5}}{-\sqrt{18}+i^{41}\sqrt{18}}\right)^{10}$
17	$\left(\dfrac{(\sqrt{2}+i^{43}\sqrt{2})\,e^{3i\pi/5}}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}\right)^{15}$	18	$\left(\dfrac{(\sqrt{15}+i\sqrt{5})\,e^{-3i\pi/5}}{-\sqrt{10}+i^{45}\sqrt{10}}\right)^{15}$
19	$\left(\dfrac{(\sqrt[5]{64}+i^{47}\sqrt[5]{64})\,e^{4i\pi/5}}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}\right)^{40}$	20	$\left(\dfrac{(\sqrt{15}-i\sqrt{5})\,e^{-4i\pi/5}}{-10^{3/5}+i^{45}10^{3/5}}\right)^{20}$

Продолжение задачи 1.4			
№	z	№	z
21	$\left(\dfrac{\left(-1+i^{15}\right)2e^{i\pi/7}}{-\sqrt{3}+i}\right)^{14}$	22	$\left(\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)e^{-i\pi/7}}{1+i^{19}}\right)^{21}$
23	$\left(\dfrac{\left(2-2i^{17}\right)5e^{-i\pi/5}}{\sqrt{150}+i\sqrt{50}}\right)^{20}$	24	$\left(\dfrac{\left(\sqrt{6}+i\sqrt{2}\right)e^{i\pi/5}}{-2+2i^{21}}\right)^{20}$
25	$\left(\dfrac{\left(1-i^{23}\right)e^{2i\pi/5}}{\sqrt{3}+i}\right)^{10}$	26	$\left(\dfrac{\left(\sqrt{18}+i\sqrt{6}\right)e^{-2i\pi/5}}{-2+2i^{25}}\right)^{10}$
27	$\left(\dfrac{\left(2+2i^{27}\right)e^{3i\pi/5}}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}\right)^{15}$	28	$\left(\dfrac{\left(\sqrt{15}+i\sqrt{5}\right)e^{-3i\pi/5}}{-\sqrt{5}+i^{29}\sqrt{5}}\right)^{15}$
29	$\left(\dfrac{\left(2+2i^{31}\right)e^{4i\pi/5}}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}\right)^{40}$	30	$\left(\dfrac{\left(\sqrt{21}-i\sqrt{7}\right)e^{-4i\pi/5}}{-\sqrt{7}+i^{29}\sqrt{7}}\right)^{20}$

Задача 2.1. Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ заданы своими координатами в каноническом базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ пространства $\mathbb{V}_3$.
1) Показать, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуют базис пространства $\mathbb{V}_3$.
2) Найти координаты вектора $\mathbf{d}$ в базисе $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (с помощью матрицы перехода). Сделать проверку.

№		№	
1	$\mathbf{a}=(-1,5,-3)$ $\mathbf{b}=(3,1,2)$ $\mathbf{c}=(3,4,1)$ $\mathbf{d}=(4,15,-3)$	2	$\mathbf{a}=(4,-1,-3)$ $\mathbf{b}=(-6,1,4)$ $\mathbf{c}=(-1,5,1)$ $\mathbf{d}=(-20,14,15)$
3	$\mathbf{a}=(-6,-4,1)$ $\mathbf{b}=(-2,-1,2)$ $\mathbf{c}=(3,3,3)$ $\mathbf{d}=(5,5,6)$	4	$\mathbf{a}=(-3,4,3)$ $\mathbf{b}=(-1,2,3)$ $\mathbf{c}=(1,0,-1))$ $\mathbf{d}=(1,0,-9)$

Продолжение задачи 2.1			
5	$\mathbf{a}=(2,-5,1)$ $\mathbf{b}=(2,3,-3)$ $\mathbf{c}=(-1,4,-1)$ $\mathbf{d}=(6,-26,8)$	6	$\mathbf{a}=(1,-4,-3)$ $\mathbf{b}=(1,-1,2)$ $\mathbf{c}=(4,-6,-1)$ $\mathbf{d}=(11,-24,-11)$
7	$\mathbf{a}=(-3,2,3)$ $\mathbf{b}=(5,-4,2)$ $\mathbf{c}=(1,-2,4)$ $\mathbf{d}=(23,-20,-1)$	8	$\mathbf{a}=(4,6,7)$ $\mathbf{b}=(3,1,2)$ $\mathbf{c}=(3,-2,2)$ $\mathbf{d}=(9,-26,-7)$
9	$\mathbf{a}=(3,-2,1)$ $\mathbf{b}=(1,2,4)$ $\mathbf{c}=(2,-4,-4)$ $\mathbf{d}=(-2,-12,-24)$	10	$\mathbf{a}=(5,3,1)$ $\mathbf{b}=(-1,2,3)$ $\mathbf{c}=(2,2,2)$ $\mathbf{d}=(-3,11,17)$
11	$\mathbf{a}=(2,1,1)$ $\mathbf{b}=(2,2,-1)$ $\mathbf{c}=(1,-1,3)$ $\mathbf{d}=(3,-2,7)$	12	$\mathbf{a}=(1,3,2)$ $\mathbf{b}=(1,-2,0)$ $\mathbf{c}=(-4,3,1)$ $\mathbf{d}=(-19,8,0)$
13	$\mathbf{a}=(4,3,2)$ $\mathbf{b}=(3,-5,1)$ $\mathbf{c}=(2,1,1)$ $\mathbf{d}=(19,-8,8)$	14	$\mathbf{a}=(0,3,1)$ $\mathbf{b}=(1,-1,2)$ $\mathbf{c}=(2,-1,0)$ $\mathbf{d}=(8,-8,3)$
15	$\mathbf{a}=(1,4,2)$ $\mathbf{b}=(-5,3,1)$ $\mathbf{c}=(1,2,1)$ $\mathbf{d}=(7,20,10)$	16	$\mathbf{a}=(2,-1,4)$ $\mathbf{b}=(1,-1,2)$ $\mathbf{c}=(3,2,0)$ $\mathbf{d}=(2,4,-2)$
17	$\mathbf{a}=(-1,1,2)$ $\mathbf{b}=(3,1,-1)$ $\mathbf{c}=(1,2,2)$ $\mathbf{d}=(18,11,1)$	18	$\mathbf{a}=(1,-2,0)$ $\mathbf{b}=(-1,1,3)$ $\mathbf{c}=(1,0,4)$ $\mathbf{d}=(2,2,12)$
19	$\mathbf{a}=(5,1,-2)$ $\mathbf{b}=(-2,3,1)$	20	$\mathbf{a}=(2,-3,1)$ $\mathbf{b}=(1,1,0)$

Продолжение задачи 2.1			
	$\mathbf{c} = (3, 2, -1)$ $\mathbf{d} = (5, 14, -1)$		$\mathbf{c} = (4, 1, 2)$ $\mathbf{d} = (4, 6, 1)$
21	$\mathbf{a} = (2, -1, 1)$ $\mathbf{b} = (2, 1, -2)$ $\mathbf{c} = (4, 3, -2)$ $\mathbf{d} = (10, 11, -12)$	22	$\mathbf{a} = (2, -2, 4)$ $\mathbf{b} = (0, -1, 1)$ $\mathbf{c} = (3, 1, -2)$ $\mathbf{d} = (-3, 0, -7)$
23	$\mathbf{a} = (0, -2, 3)$ $\mathbf{b} = (1, -1, 1)$ $\mathbf{c} = (4, 0, 3)$ $\mathbf{d} = (32, 6, 15)$	24	$\mathbf{a} = (3, 1, -2)$ $\mathbf{b} = (0, 1, 3)$ $\mathbf{c} = (2, 2, -1)$ $\mathbf{d} = (5, 8, 1)$
25	$\mathbf{a} = (1, -1, -2)$ $\mathbf{b} = (2, -1, 4)$ $\mathbf{c} = (1, 0, 2)$ $\mathbf{d} = (11, -2, 22)$	26	$\mathbf{a} = (3, 0, 1)$ $\mathbf{b} = (-2, 1, -1)$ $\mathbf{c} = (4, 2, 2)$ $\mathbf{d} = (-2, 7, 1)$
27	$\mathbf{a} = (-2, 1, -1)$ $\mathbf{b} = (3, 2, 1)$ $\mathbf{c} = (-2, 0, 1)$ $\mathbf{d} = (14, 6, 7)$	28	$\mathbf{a} = (4, 2, -1)$ $\mathbf{b} = (2, -3, -1)$ $\mathbf{c} = (1, 2, 1)$ $\mathbf{d} = (-6, 15, 8)$
29	$\mathbf{a} = (3, 2, -1)$ $\mathbf{b} = (2, 0, 1)$ $\mathbf{c} = (-3, 1, -1)$ $\mathbf{d} = (-3, 10, -7)$	30	$\mathbf{a} = (1, 3, 2)$ $\mathbf{b} = (1, -3, 1)$ $\mathbf{c} = (0, -2, 2)$ $\mathbf{d} = (-1, 5, 4)$

Задача 2.2. Доказать, что векторы вида $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ образуют линейное подпространство в пространстве $\mathbb{R}^4$. Найти базис и размерность этого подпространства. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства. Найти матрицу перехода от канонического базиса пространства $\mathbb{R}^4$ к построенному базису.

№ вар.	$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$
1	$(2a,\ 3b - a,\ a,\ -b)$
2	$(5b,\ c - a,\ 2a + b,\ c)$

Продолжение задачи 2.2	
3	$(a+4b,\ 0,\ a-b,\ a)$
4	$(a-b+3c,\ -2b,\ c,\ a+2b)$
5	$(-2a,\ 3a+b,\ -b,\ a)$
6	$(a-2c,\ b-a,\ 3b,\ c)$
7	$(2a+b,\ a,\ 3b+a,\ -2a)$
8	$(b-2c,\ -a+b+c,\ a,\ -b)$
9	$(b,\ -3a,\ a-b,\ 0)$
10	$(2b+2c,\ -a,\ b,\ 2a-c)$
11	$(a-2b,\ b,\ 0,\ 2a-b)$
12	$(a,\ b-a-3c,\ 2a+c,\ 2b)$
13	$(b,\ -a,\ 3a+b,\ 2a+3b)$
14	$(2a,\ 2a+b+c,\ 2b,\ a-3c)$
15	$(2b+a,\ b-2a,\ a,\ 3b)$
16	$(a+5c,\ b-2a,\ a+c,\ -b)$
17	$(-2a,\ a,\ 4b+3a,\ -b)$
18	$(a+b+c,\ 3c,\ a-2b,\ a)$
19	$(0,\ 3b-2a,\ a,\ -4b)$
20	$(b,\ -a-c,\ 2a+b,\ 3c+a)$
21	$(2a+b,\ 0,\ -a-5b,\ b)$
22	$(a+5b-c,\ 2c,\ 2a+b,\ a)$
23	$(2a,\ -a,\ 4a,\ 3b-a)$
24	$(a+b+c,\ 3a,\ 2a+b,\ -2c)$
25	$(0,\ 4b-a,\ 2a,\ a-b)$
26	$(a-2b,\ 5b-c,\ c,\ 2a+b)$
27	$(3a-2b,\ 0,\ a,\ 3b)$
28	$(5b-c,\ -a,\ 2a+b+c,\ 3c)$
29	$(2a-3b,\ a+2b,\ 0,\ -b)$

Продолжение задачи 2.2	
30	$(a+b,\ -3a+c,\ 2a-b,\ 3c)$

Задача 2.3. Пусть M - множество многочленов $p \in \mathbb{P}_n$ с вещественными коэффициентами, удовлетворяющих указанным условиям. Доказать, что M - линейное подпространство в $\mathbb{P}_n$, найти его базис и размерность. Дополнить базис M до базиса всего пространства $\mathbb{P}_n$. Найти матрицу перехода от канонического базиса пространства $\mathbb{P}_n$ к построенному базису.

№ вар.	n	Условия на $p(t) \in M$
1	3	$p(-1) = p(1)$
2	3	$p'(-1) = p'(1)$
3	3	$p(-2) = 0$
4	4	$p(-2) = p(3) = 0$
5	4	$p(2-i) = 0$
6	3	$p'(1) = 0$
7	3	$p(0) + p'(-1) = 0$
8	4	$p(i-1) = 0$
9	4	$p(t) \,\vdots\, (t-3)^2$
10	3	$p''(1) = 0$
11	4	$p(t) \,\vdots\, (t^2+t+1)$
12	3	$p(1) = p(2) = 0$
13	3	$2p(0) + p(1) = 0$
14	3	$p(-1) + p(0) + p(1) = 0$
15	3	$p(0) + p'(2) = 0$
16	3	$p(2) = p(-2)$
17	4	$p(1) = p''(0) = 0$

Продолжение задачи 2.3		
18	3	$p(2) = 0$
19	4	$p(2) = p'(0) = 0$
20	4	$p(1 + i) = 0$
21	3	$p'(-1) = 0$
22	3	$p'(0) + p(1) = 0$
23	4	$p(-2 + i) = 0$
24	4	$p(-1) = p'(-1) = 0$
25	3	$p''(1) + p'(0) = 0$
26	4	$p(t) \,\vdots\, (t^2 + t + 2)$
27	3	$p(-1) + p''(0) = 0$
28	3	$p(-1) = 2p(0)$
29	3	$p(-1) + p'(0) + p(1) = 0$
30	4	$p''(0) = p(-1) = 0$

Задача 2.4. Доказать, что множество матриц M является подпространством в пространстве всех матриц данного размера. Построить базис и найти размерность подпространства M. Проверить, что матрица B принадлежит M и разложить ее по найденному базису.

№	M – множество матриц указанного вида	B
1	$\begin{pmatrix} 2b+2c & -a \\ b & 2a-c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} a-2b & b \\ 0 & 2a-b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} a & b-a-3c \\ 2a+c & 2b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

Продолжение задачи 2.4		
4	$\begin{pmatrix} b & -a \\ 3a+b & 2a+3b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 2a & 2a+b+c \\ 2b & a-3c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 2b+a & b-2a \\ a & 3b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} a+5c & b-2a \\ a+c & -b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} -2a & a \\ 4b+3a & -b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} a+b+c & 3c \\ a-2b & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 0 & 3b-2a \\ a & -4b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 13 \\ -2 & -12 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} b & -a-c \\ 2a+b & 3c+a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 2a+b & 0 \\ -a-5b & b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -13 & 2 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} a+5b-c & 2c \\ 2a+b & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 2a & -b \\ 4a & 3b-a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} a+b+c & 3a \\ 2a+b & -2c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 0 & 4b-a \\ 2a & a-b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

Продолжение задачи 2.4		
17	$\begin{pmatrix} a-2b & 5b-c \\ c & 2a+b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -17 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 3a-2b & 0 \\ a & 3b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 5b-c & -a \\ 2a+b+c & 3c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 2a-3b & a+2b \\ 0 & -b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -13 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} a+b & -3a+c \\ 2a-b & 3c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 2a & 3b-a \\ a & -b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 5b & c-a \\ 2a+b & c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$
24	$\begin{pmatrix} a+4b & 0 \\ a-b & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} a-b+3c & -2b \\ c & a+2b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$
26	$\begin{pmatrix} -2a & 3a+b \\ -b & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} a-2c & b-a \\ 3b & c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$
28	$\begin{pmatrix} 2a+b & a \\ 3b+a & -2a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} b-2c & -a+b+c \\ a & -b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Продолжение задачи 2.4		
30	$\begin{pmatrix} b & -3a \\ 4a-b & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -11 & 0 \end{pmatrix}$

Задача 2.5. Исследовать на линейную независимость систему функций.

№ вар.	Система функций
$1, 16$	$2,\ \cos 4t,\ \sin^2 2t,\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$2, 17$	$e^{3t},\ te^{3t},\ t^2e^{3t},\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$3, 18$	$1,\ \ln(4/t^2),\ \ln 2t,\ t \in (0,\ +\infty)$
$4, 19$	$1,\ \operatorname{tg} 2t,\ \operatorname{ctg} 2t,\ t \in (0,\ \frac{\pi}{4})$
$5, 20$	$\sin 2t,\ \sin^3 2t,\ \sin 6t,\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$6, 21$	$e^t,\ e^{-t},\ e^{2t},\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$7, 22$	$1,\ \lg 10t^3,\ \lg(100/t^2),\ t \in (0,\ +\infty)$
$8, 23$	$\sin 2t, \cos 2t,\ \operatorname{tg} 2t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$
$9, 24$	$\frac{1}{t},\ \frac{t}{t^2+1},\ \frac{1}{t(t^2+1)},\ t \in (0,\ +\infty)$
$10, 25$	$1,\ e^{3t},\ \operatorname{sh} 3t,\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$11, 26$	$\cos t,\ \cos^3 t,\ \cos 3t,\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$12, 27$	$\cos(t/2),\ \sin(t/2),\ \sin t,\ t \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$
$13, 28$	$\frac{1}{2t-1},\ \frac{1}{t+2},\ \frac{3}{2t^2+3t-2},\ t \in \left(-2,\ \frac{1}{2}\right)$
$14, 29$	$e^t,\ te^t,\ t^2e^t,\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$15, 30$	$1,\ \log_2 t,\ \ln 5t,\ t \in (0,\ +\infty)$

Задача 2.6*. Доказать, что множество M функций $x(t)$, задан-

ных на области D, образует линейное пространство. Найти его базис и размерность.

№ вар.	Множество $\mathbb{M}$ ($\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ — любые вещественные числа)
$1, 16$	$M = \{\alpha e^t + \beta e^{2t} + \gamma e^{3t}\},\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$2, 17$	$M = \left\{\alpha + \beta \cos t + \gamma \sin t + \delta \cos^2 \dfrac{t}{2}\right\},\ t \in [-\pi,\ +\pi]$
$3, 18$	$M = \{\alpha e^{-t} + \beta t e^t + (\beta - \alpha) t^2 e^t + \gamma t^3 e^t\},$ $t \in (-\infty,\ +\infty)$
$4, 19$	$M = \{\alpha e^{-3t} + \beta \operatorname{sh} 3t + \gamma e^{3t} + \delta\},\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$5, 20$	$M = \{\alpha + \beta \operatorname{ch} 2t + \gamma e^{2t}\},\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$6, 21$	$M = \left\{\dfrac{\alpha}{t} + \beta + \gamma t + \delta \dfrac{2t^2 - 1}{t}\right\},\ t \in (0,\ 1)$
$7, 22$	$M = \{\alpha \cos 2t + \beta \sin 2t + \gamma \sin 4t\},\ t \in \left(-\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$
$8, 23$	$M = \{\alpha e^{-t} + \beta \operatorname{ch} t + \gamma \operatorname{sh} t + \delta\},\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$9, 24$	$M = \{\alpha + \beta \operatorname{tg} 2t + \gamma \operatorname{ctg} 2t\},\ t \in \left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$
$10, 25$	$M = \{\alpha \ln t + \beta + \gamma t + \delta \ln 3t\},\ t \in (0,\ +\infty)$
$11, 26$	$M = \{\alpha \cos 2t + \beta \sin 2t + \gamma \operatorname{tg} t + \delta\},\ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$
$12, 27$	$M = \{\alpha e^{-t} + (\beta - \alpha) t e^{-t} + \gamma t^2 e^{-t} + \alpha t^3 e^{-t}\},$ $t \in (-\infty,\ +\infty)$
$13, 28$	$M = \{\alpha e^{3t} + \beta e^{-3t} + \gamma t e^{3t} + \delta t e^{-3t}\},\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$14, 29$	$M = \{\alpha + \beta \operatorname{tg}^2 t + \gamma \sec^2 t + \delta \operatorname{ctg}^2 t\},\ t \in \left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$
$15, 30$	$M = \{\alpha e^{2t} + \beta t e^{2t} + \gamma t^2 e^{2t} + \alpha t^3 e^{2t}\},\ t \in (-\infty,\ +\infty)$

Задача 2.7*. Образует ли линейное пространство заданное мно-

жество, в котором определены сумма любых двух элементов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и произведение любого элемента $\mathbf{x}$ на любое действительное число α?

1, 16. Множество всех векторов пространства $\mathbb{V}_3$, координаты которых — целые числа; сумма: $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, произведение $\alpha\mathbf{x}$.

2, 17. Множество всех векторов плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей $Ox,\ Oy$; сумма: $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, произведение $\alpha\mathbf{x}$.

3, 18. Множество всех векторов пространства $\mathbb{V}_3$; сумма: $[\mathbf{x},\ \mathbf{y}]$, произведение $\alpha\mathbf{x}$.

4, 19. Множество всех векторов пространства $\mathbb{V}_3$, лежащих на одной оси; сумма: $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, произведение $\alpha|\mathbf{x}|$.

5, 20. Множество всех функций $f(t),\ g(t)$, принимающих положительные значения; сумма: $(f\cdot g)(t)$, произведение: $f^{\alpha}(t)$.

6, 21. Множество всех четных функций $f(t),\ g(t)$, заданных на отрезке $[-1,\ 1]$; сумма: $(f\cdot g)(t)$, произведение: $(\alpha f)(t)$.

7, 22. Множество всех нечетных функций $f(t),\ g(t)$, заданных на отрезке $[-1,\ 1]$; сумма: $(f+g)(t)$, произведение: $(\alpha f)(t)$.

8, 23. Множество всех линейных функций $f(x,\ y),\ g(x,\ y)$; сумма: $(f+g)(x,\ y)$, произведение: $(\alpha f)(x,\ y)$.

9, 24. Множество всех многочленов $p(t)$ третьей степени; сумма: $(p+q)(t)$, произведение: $(\alpha p)(t)$.

10, 25. Множество всех сходящихся последовательностей $\{u_n\}$, $\{v_n\}$; сумма: $\{u_n+v_n\}$, произведение: $\{\alpha u_n\}$.

11, 26. Множество всех невырожденных матриц $A=(a_{ij})$ порядка n; сумма: $A+B$, произведение: αA.

12, 27. Множество всех невырожденных матриц $A=(a_{ij})$ порядка n; сумма: $A\cdot B$, произведение: αA.

13, 28. Множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел; сумма: $x+y$, произведение: αx.

14, 29. Множество $\mathbb{R}_-$ всех отрицательных чисел; сумма: $-|x| \cdot |y|$, произведение: $-|x|^{\alpha}$.

15, 30. Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел; сумма: $x \cdot y$, произведение: αx.

Задача 2.8*. Доказать, что множество матриц M является подпространством в пространстве всех матриц данного размера. Построить базис и найти размерность подпространства M. Проверить, что матрица B принадлежит M и разложить ее по найденному базису.

№	M – множество матриц указанного вида	B
1	Решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2	Решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
3	Матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4	Матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Продолжение задачи 2.8		
5	Матрицы, антиперестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
6	Матрицы, антиперестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
7	Симметричные матрицы 3-го порядка	$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
8	Кососимметричные матрицы 3-го порядка	$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
9	Верхнетреугольные матрицы 3-го порядка с нулевым следом	$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
10	Матрицы 3-го порядка с нулевыми суммами элементов главной и побочной диагоналей	$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$
11	Матрицы 3-го порядка, у которых суммы элементов любой строки и любого столбца одинаковы	$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

Продолжение задачи 2.8		
12	Матрицы 3-го порядка, у которых суммы элементов любой строки и любого столбца равны нулю	$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
13	Матрицы (2×3), у которых суммы элементов в обеих строках одинаковы	$B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -8 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
14	Матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
15	Матрицы, антиперестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$
16	Решения матричного уравнения $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
17	Решения матричного уравнения $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Продолжение задачи 2.8		
18	Матрицы, перестановочные с матрицей $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}3&0&0\\-2&3&0\\2&-2&3\end{pmatrix}$
19	Матрицы, перестановочные с матрицей $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}3&2&0\\0&-1&2\\0&2&3\end{pmatrix}$
20	Матрицы, антиперестановочные с матрицей $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&-2&0\\-1&1&2\end{pmatrix}$
21	Матрицы, антиперестановочные с матрицей $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
22	Симметричные матрицы 3-го порядка с нулевыми суммами элементов первого и третьего столбцов	$B=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&1&-2\\-1&-2&3\end{pmatrix}$
23	Кососимметричные матрицы 3-го порядка с нулевой суммой элементов первой строки	$B=\begin{pmatrix}0&2&-2\\-2&0&-3\\2&3&0\end{pmatrix}$
24	Нижнетреугольные матрицы 3-го порядка с нулевым следом и нулевой суммой элементов побочной диагонали	$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&2&0\\-2&5&-3\end{pmatrix}$

Продолжение задачи 2.8		
25	Симметричные матрицы 3-го порядка, у которых одинаковы суммы элементов строк, а суммы элементов столбцов знакочередуются	$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
26	Симметричные матрицы 3-го порядка, у которых одинаковы суммы элементов столбцов, а суммы элементов строк знакочередуются	$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
27	Симметричные матрицы 3-го порядка, у которых сумма элементов любого столбца равна нулю	$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
28	Матрицы (3×2), у которых суммы элементов любого столбца равны нулю	$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
29	Симметричные матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
30	Симметричные матрицы, антиперестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Задача 3.1. Линейный оператор $\widehat{C}$ в пространстве $\mathbb{V}_3$ есть по-

следовательное применение линейных операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$. Найти матрицы операторов $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Обратим ли оператор $\widehat{C}$? Если да, то описать его геометрическое действие.

№	Операторы
1	Поворот вокруг оси: а) Oz на $90°$, б) Oz на $45°$, в) Ox на $45°$, г) Ox на $30°$, д) Oy на $90°$, е) Oy на $60°$.
2	Проектирование на плоскость: а) xOy, б) xOz, в) yOz.
3	Проектирование на ось: а) Ox, б) Oy, в) Oz.
4	Отражение относительно плоскости: а) xOy, б) xOz, в) yOz.
5	Отражение относительно оси: а) Ox, б) Oy, в) Oz.
6	Векторное умножение на вектор: а) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, б) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, в) $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, г) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, д) $\mathbf{a} = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, е) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.
7	Гомотетия с коэффициентом: а) $k = 2$, б) $k = \dfrac{1}{2}$, в) $k = -2$.

№ вар.	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	№ вар.	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	№ вар.	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$
1	1а	2б	2	2а	1в	3	3а	4а
4	4а	7а	5	5а	3а	6	6а	2а
7	7а	5а	8	1б	4б	9	2б	6б
10	3б	6в	11	4б	1г	12	5б	2в
13	4б	3в	14	7б	2б	15	1в	5б
16	2в	6г	17	3в	7в	18	4в	2б
19	5в	6д	20	6е	1д	21	7в	2а

Продолжение задачи 3.1								
22	1г	5б	23	6г	3б	24	1д	4в
25	6д	3б	26	1е	6е	27	6е	4в
28	2а	5б	29	4а	6д	30	7а	1е

Задача 3.2. Линейный оператор $\widehat{A}$ в пространстве $\mathbb{V}_3$ геометрических векторов определяется действием отображения α на концы радиус-векторов точек трехмерного пространства.
1) Найти матрицу линейного оператора $\widehat{A}$ в подходящем базисе пространства $\mathbb{V}_3$, а затем в каноническом базисе $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$.
2) В какую точку трехмерного пространства переходит точка с координатами $(1,\ 0,\ 0)$ под действием отображения α?
3) Найти A^n, где A — матрица оператора в базисе $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$.

№ вар.	Отображение α
$1, 16$	Отражение относительно плоскости $x + y + z = 0$
$2, 17$	Поворот на 180° вокруг оси $x = y = z$
$3, 18$	Проектирование на ось $x = \dfrac{y}{2} = z$
$4, 19$	Проектирование на плоскость $x + y + z = 0$
$5, 20$	Отражение относительно плоскости $x + y - z = 0$
$6, 21$	Поворот на 180° вокруг оси $x = y = -z$
$7, 22$	Проектирование на ось $2x = 2y = -z$
$8, 23$	Проектирование на плоскость $x - y + z = 0$
$9, 24$	Отражение относительно плоскости $x - y + z = 0$
$10, 25$	Поворот на 180° вокруг оси $-x = y = z$
$11, 26$	Проектирование на ось $x = 2y = 2z$
$12, 27$	Проектирование на плоскость $-x + y + z = 0$
$13, 28$	Отражение относительно плоскости $-x + y + z = 0$

Продолжение задачи 3.2	
14, 29	Поворот на 180° вокруг оси $x = -y = z$
15, 30	Проектирование на плоскость $x + y - z = 0$

Задача 3.3. Пусть A — матрица оператора $\widehat{A}$ из **задачи 3.2** в каноническом базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы A. Объясните, как полученный результат связан с геометрическим действием оператора $\widehat{A}$.

Задача 3.4. 1) Какое из перечисленных преобразований является линейным оператором в пространстве $\mathbb{R}^3$?
2) Найти матрицу оператора в каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^3$.
3) Найти собственные значения и собственные векторы оператора. Является ли данный оператор оператором простого типа?
4) Найти ядро оператора.
5) Обратим ли данный оператор? Если да, найти обратный оператор.

№	Преобразования $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$
1 16	$\widehat{A}\mathbf{x} = (4x_1 - 2x_2 - x_3,\ -x_1 + 3x_2 - x_3,\ x_1 - 2x_2 + 2x_3)$ $\widehat{B}\mathbf{x} = (4 - 2x_2 - x_3,\ -x_1 + 3x_2 - x_3,\ x_1 - 2x_2 + 2)$ $\widehat{C}\mathbf{x} = (4x_1 - 2x_2 - x_3^2,\ -x_1 + 3x_2 - x_3,\ x_1^3 - 2x_2 + 2x_3)$
2 17	$\widehat{A}\mathbf{x} = (3x_1 + 4,\ x_1 + 3x_2,\ x_1 - x_2 + 1)$, $\widehat{B}\mathbf{x} = (3x_1^2 + 4x_2,\ x_1 + 3x_2,\ x_1 - x_2^3 + x_3)$, $\widehat{C}\mathbf{x} = (3x_1 + 4x_2,\ x_1 + 3x_2,\ x_1 - x_2 + x_3)$

Продолжение задачи 3.4	
3 18	$\widehat{A}\mathbf{x} = (-x_1 - x_2 - x_3,\ 4 - x_3,\ -x_2 + 4),$ $\widehat{B}\mathbf{x} = (-x_1 - x_2 - x_3,\ 4x_2 - x_3,\ -x_2 + 4x_3),$ $\widehat{C}\mathbf{x} = (-x_1 - x_2^4 - x_3,\ 4x_2 - x_3,\ -x_2^2 + 4x_3)$
4 19	$\widehat{A}\mathbf{x} = (3x_1 - x_2 - x_3,\ 2x_2 + x_3,\ x_2 + 2x_3),$ $\widehat{B}\mathbf{x} = (3x_1 - 1 - x_3,\ 2 + x_3,\ x_2 + 2x_3),$ $\widehat{C}\mathbf{x} = (3x_1^2 - x_2 - x_3,\ 2x_2 + x_3^3,\ x_2 + 2x_3)$
5 20	$\widehat{A}\mathbf{x} = (3 - 2x_2 + x_3,\ -x_1 + 2x_2 - x_3,\ -x_1 - 2 + x_3),$ $\widehat{B}\mathbf{x} = (3x_1 - 2x_2 + x_3^2,\ -x_1 + 2x_2 - x_3,\ -x_1 - 2x_2^4 + x_3),$ $\widehat{C}\mathbf{x} = (3x_1 - 2x_2 + x_3,\ -x_1 + 2x_2 - x_3,\ -x_1 - 2x_2 + x_3)$
6 21	$\widehat{A}\mathbf{x} = (3x_1 + x_2 - x_3,\ 2 + 2x_2 - x_3,\ -2x_1 + x_2 + 4),$ $\widehat{B}\mathbf{x} = (3x_1 + x_2 - x_3,\ 2x_1 + 2x_2 - x_3,\ -2x_1 + x_2 + 4x_3),$ $\widehat{C}\mathbf{x} = (3x_1 + x_2^3 - x_3,\ 2x_1 + 2x_2 - x_3^2,\ -2x_1 + x_2 + 4x_3)$
7 22	$\widehat{A}\mathbf{x} = (2x_1 - x_3,\ 2x_1 + x_2 - x_3,\ -x_1 + 2x_3),$ $\widehat{B}\mathbf{x} = (2x_1 - x_3,\ 2x_1 + x_2 - 1,\ -x_1 + 2),$ $\widehat{C}\mathbf{x} = (2x_1^4 - x_3,\ 2x_1 + x_2^2 - x_3,\ -x_1 + 2x_3)$
8 23	$\widehat{A}\mathbf{x} = (-2x_1 + x_2,\ x_1 - 2,\ -x_1 + x_2 + 2),$ $\widehat{B}\mathbf{x} = (-2x_1 + x_2^3,\ x_1 - 2x_2,\ -x_1^2 + x_2 + 2x_3),$ $\widehat{C}\mathbf{x} = (-2x_1 + x_2,\ x_1 - 2x_2,\ -x_1 + x_2 + 2x_3)$
9 24	$\widehat{A}\mathbf{x} = (4x_1 - x_3,\ -x_1 + 5 + x_3,\ -x_1 + 4),$ $\widehat{B}\mathbf{x} = (4x_1 - x_3,\ -x_1 + 5x_2 + x_3,\ -x_1 + 4x_3),$ $\widehat{C}\mathbf{x} = (4x_1^4 - x_3,\ -x_1 + 5x_2 + x_3^2,\ -x_1 + 4x_3)$

Продолжение задачи 3.4	
10 25	$\widehat{A}\mathbf{x} = (4x_1 - 3x_2 - 7x_3,\ x_1 - x_3,\ 3x_1 - 3x_2 - 6x_3)$, $\widehat{B}\mathbf{x} = (4x_1 - 3 - 7x_3,\ x_1 - x_3,\ 3x_1 - 3x_2 - 6)$, $\widehat{C}\mathbf{x} = (4x_1^2 - 3x_2 - 7x_3,\ x_1^3 - x_3,\ 3x_1 - 3x_2 - 6x_3)$
11 26	$\widehat{A}\mathbf{x} = (4x_1 - 5x_2 + 5,\ 2x_1 + 2x_3,\ 2x_1 + 1 + x_3)$, $\widehat{B}\mathbf{x} = (4x_1 - 5x_2 + 5x_3,\ 2x_1 + 2x_3^4,\ 2x_1 + x_2 + x_3^2)$, $\widehat{C}\mathbf{x} = (4x_1 - 5x_2 + 5x_3,\ 2x_1 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2 + x_3)$
12 27	$\widehat{A}\mathbf{x} = (3 + 4x_2 + 2x_3,\ -x_2 - 2,\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3)$, $\widehat{B}\mathbf{x} = (3x_1 + 4x_2 + 2x_3,\ -x_2 - 2x_3,\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3)$, $\widehat{C}\mathbf{x} = (3x_1^2 + 4x_2 + 2x_3,\ -x_2^3 - 2x_3,\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3)$
13 28	$\widehat{A}\mathbf{x} = (-x_1 - 4x_2 + 4x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + 5x_3)$, $\widehat{B}\mathbf{x} = (-x_1 - 4x_2 + 4,\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3,\ 2 + 5x_3)$, $\widehat{C}\mathbf{x} = (-x_1 - 4x_2^4 + 4x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3^2,\ 2x_1 + 5x_3)$
14 29	$\widehat{A}\mathbf{x} = (4x_1 - 2x_2 + 2,\ 4,\ 3x_2 - x_3)$, $\widehat{B}\mathbf{x} = (4x_1 - 2x_2 + 2x_3^2,\ 4x_2,\ 3x_2 - x_3^3)$, $\widehat{C}\mathbf{x} = (4x_1 - 2x_2 + 2x_3,\ 4x_2,\ 3x_2 - x_3)$
15 30	$\widehat{A}\mathbf{x} = (-2 + 2x_2 - 2x_3,\ -5x_1 + 7x_2 - 3x_3,\ -x_1 + 3 + x_3)$, $\widehat{B}\mathbf{x} = (-2x_1 + 2x_2 - 2x_3,\ -5x_1 + 7x_2 - 3x_3,\ -x_1 + 3x_2 + x_3)$, $\widehat{C}\mathbf{x} = (-2x_1 + 2x_2^4 - 2x_3,\ -5x_1 + 7x_2^2 - 3x_3,\ -x_1 + 3x_2 + x_3)$

Задача 3.5. Пусть $\widehat{A}\mathbf{x} = (x_2 - x_3,\ x_1,\ x_1 + x_3)$, $\widehat{B}\mathbf{x} = (x_2,\ 2x_3,\ x_1)$ — линейные операторы в пространстве $\mathbb{R}^3$. Найти:

№		№		№	
1	$\widehat{A}\widehat{B}\mathbf{x}$	2	$(\widehat{A}^2 + 3\widehat{B})\mathbf{x}$	3	$(\widehat{A}^2 - \widehat{B})\mathbf{x}$
4	$(\widehat{A} + \widehat{B}^2)\mathbf{x}$	5	$(\widehat{B}^2 - 4\widehat{A})\mathbf{x}$	6	$(2\widehat{A} + 3\widehat{B}^2)\mathbf{x}$
7	$(\widehat{A^2} + \widehat{B}^2)\mathbf{x}$	8	$(\widehat{B}^2 + \widehat{A})\mathbf{x}$	9	$\widehat{B}\widehat{A}\mathbf{x}$
10	$\widehat{B}(2\widehat{A} - \widehat{B})\mathbf{x}$	11	$\widehat{A}(2\widehat{B} - \widehat{A})\mathbf{x}$	12	$\widehat{A}(\widehat{B} + 2\widehat{A})\mathbf{x}$
13	$(\widehat{A} - \widehat{B})^2\mathbf{x}$	14	$(\widehat{B} - 2\widehat{A}^2)\mathbf{x}$	15	$\widehat{B}\widehat{A}^2\mathbf{x}$
16	$(3\widehat{A}^2 - \widehat{B})\mathbf{x}$	17	$(\widehat{A}^2 + \widehat{B})\mathbf{x}$	18	$(\widehat{A}^2 - \widehat{B}^2)\mathbf{x}$
19	$(2\widehat{B} - \widehat{A}^2)\mathbf{x}$	20	$(\widehat{B}^3 + \widehat{A})\mathbf{x}$	21	$(\widehat{B}^2 - 2\widehat{A})\mathbf{x}$
22	$\widehat{A}(\widehat{B} + \widehat{A})\mathbf{x}$	23	$\widehat{A}\widehat{B}^2\mathbf{x}$	24	$\widehat{B}(\widehat{B} - \widehat{A})\mathbf{x}$
25	$2(\widehat{A}^2 + \widehat{B}^2)\mathbf{x}$	26	$\widehat{B}(\widehat{A} - 2\widehat{B})\mathbf{x}$	27	$(\widehat{B} - \widehat{A} + \widehat{B}^2)\mathbf{x}$
28	$\widehat{B}(3\widehat{A} + \widehat{B})\mathbf{x}$	29	$(\widehat{A} + \widehat{B}\widehat{A} - \widehat{B})\mathbf{x}$	30	$(3\widehat{B} + 2\widehat{A}^2)\mathbf{x}$

Задача 3.6. 1) Доказать, что $\widehat{A}$ — линейный оператор в пространстве $\mathbb{P}_n$ многочленов степени не выше n.
2) Найти его матрицу в каноническом базисе.
3) Существует ли обратный оператор к $\widehat{A}$? Если да, то найдите его матрицу в том же базисе.
4) Найдите ядро оператора $\widehat{A}$, то есть множество $Ker\widehat{A} = \{p(t) \in \mathbb{P}_n : \ (\widehat{A}p)(t) \equiv 0\}$.

№ вар.	n	$(\widehat{A}p)(t)$
1, 16	2	$[(t+1) \cdot p(t)]'$
2, 17	2	$[t \cdot p(t+1)]'$
3, 18	3	$(t+1) \cdot p'(t)$
4, 19	3	$t \cdot p'(t+1)$

Продолжение задачи 3.6		
$5, 20$	3	$p(t) - p(t+2)$
$6, 21$	3	$3t \cdot p(t) - t^2 \cdot p'(t)$
$7, 22$	2	$(t \cdot p(t))' + p''(t)$
$8, 23$	3	$6t \cdot p(t) - t^3 \cdot p''(t)$
$9, 24$	2	$(t+1) \cdot p(t+1) - t \cdot p(t)$
$10, 25$	2	$[(t-2) \cdot p(t)]'$
$11, 26$	3	$[t \cdot p'(t)]'$
$12, 27$	2	$[t \cdot p(t-2)]'$
$13, 28$	3	$t \cdot p'(t) - p(t+1)$
$14, 29$	2	$(t-2) \cdot p(t-2) - t \cdot p(t)$
$15, 30$	2	$(2t+1) \cdot p(t) + t(1-t)p'(t)$

Задача 3.7. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей A. Доказать, что это оператор простого типа, привести его матрицу к диагональному виду (найти матрицу перехода к собственному базису и сделать проверку). Вычислить A^n для любого $n \in \mathbb{N}$.

№ вар.	A	№ вар.	A	№ вар.	A
1	$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

Продолжение задачи 3.7					
7	$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
28	$\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

Задача 3.8. Оператор $\widehat{A}$ действует в пространстве матриц, образующих линейное подпространство M в пространстве всех квадратных матриц второго порядка.

1) Доказать, что $\widehat{A}$ — линейный оператор.

2) Найти матрицу оператора $\widehat{A}$ в каком-нибудь базисе пространства M.

3) Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widehat{A}$ (напомним, что в данном случае векторами являются матрицы).

4) Доказать, что $\widehat{A}$ — оператор простого типа, указать базис из собственных векторов.

№ вар.	$M = \left\{ X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \right\}$	$\widehat{A}$	B
$1, 16$	$y = u$	$\widehat{A}X = B^T XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$2, 17$	$y = u$	$\widehat{A}X = B^T XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$3, 18$	$x + v = 0$	$\widehat{A}X = BX - XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$4, 19$	$x + v = 0$	$\widehat{A}X = BX - XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$5, 20$	$x + y + u + v = 0$	$\widehat{A}X = B^{-1} XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$6, 21$	$x - y + u + v = 0$	$\widehat{A}X = B^{-1} XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$7, 22$	$x + y - u - v = 0$	$\widehat{A}X = BX + XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$8, 23$	$x - 2y - u - v = 0$	$\widehat{A}X = BX + XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$9, 24$	$y = u$	$\widehat{A}X = B^T XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$10, 25$	$y = u$	$\widehat{A}X = B^T XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Продолжение задачи 3.8			
$11, 26$	$x+v=0$	$\widehat{A}X = BX - XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
$12, 27$	$x+y+u+v=0$	$\widehat{A}X = BX - XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$13, 28$	$x+y+2u+v=0$	$\widehat{A}X = B^{-1}XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$
$14, 29$	$x+y+2u-v=0$	$\widehat{A}X = BX + XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
$15, 30$	$x+y-v=0$	$\widehat{A}X = BX + XB$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 4.1. Задана квадратичная форма $\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3)$.
1) Привести ее к каноническому виду методом Лагранжа, выписав соответствующее преобразование переменных.
2) Привести ее к каноническому виду ортогональным преобразованием.
3) Проверить закон инерции квадратичных форм на примерах преобразований, полученных в п.п.1)—2).
4) Какая поверхность задается уравнением $\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 1$?

№ вар.	Квадратичная форма $\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3)$
1, 16	$4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$
2, 17	$3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3$

Продолжение задачи 4.1	
3, 18	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$
4, 19	$2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$
5, 20	$2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$
6, 21	$-2x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$
7, 22	$-x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3$
8, 23	$2x_1^2 + 7x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$
9, 24	$4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$
10, 25	$x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$
11, 26	$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$
12, 27	$2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$
13, 28	$4x_1^2 + 8x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3$
14, 29	$4x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 14x_1x_2 - 8x_1x_3 + 14x_2x_3$
15, 30	$-2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 6x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3$

Задача 4.2. Выписать квадратичную форму с данной матрицей A. Привести ее к каноническому виду, определить ранг, положительный и отрицательный индексы в зависимости от значений параметра a. При каких значениях a форма положительно определена?

№ вар.	Матрица A	№ вар.	Матрица A
1	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a+1 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & a+4 & 2a-2 \\ -1 & 2a-2 & 5a \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} a+4 & 2 & 2a-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2a-2 & -1 & 5a \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} a+4 & 2a-2 & 2 \\ 2a-2 & 5a & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & a+1 & a-1 \\ 1 & a-1 & 2a \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} a+1 & -1 & a-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 2a \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} a+1 & a-1 & -1 \\ a-1 & 2a & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & a+4 & a-4 \\ -2 & a-4 & 2a \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} a+4 & 2 & a-4 \\ 2 & 1 & -2 \\ a-4 & -2 & 2a \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} a+4 & a-4 & 2 \\ a-4 & 2a & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1+4a & 1-2a \\ -1 & 1-2a & 3a \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 1+4a & -1 & 1-2a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1-2a & -1 & 3a \end{pmatrix}$

Продолжение задачи 4.2			
15	$\begin{pmatrix} 1+4a & 1-2a & -1 \\ 1-2a & 3a & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a+1 & 2-a \\ 2 & 2-a & 2a \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 2a & 2 & 2-a \\ 2 & 1 & 1 \\ 2-a & 1 & a+1 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} a+1 & 2-a & 1 \\ 2-a & 2a & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 9a+9 & 3a-3 \\ -1 & 3a-3 & 6a \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 6a & 3a-3 & -1 \\ 3a-3 & 9a+9 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 9a+9 & 3 & 3a-3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3a-3 & -1 & 6a \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & a+1 & a-1 \\ 2 & a-1 & 4a \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 4a & a-1 & 2 \\ a-1 & a+1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} a+1 & a-1 & -2 \\ a-1 & 4a & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & a+1 & 3-2a \\ 3 & 3-2a & 5a \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 5a & 3-2a & 3 \\ 3-2a & a+1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 3-2a \\ 1 & 1 & 3 \\ 3-2a & 3 & 5a \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & 1-2a \\ -1 & 1-2a & 6a \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} 6a & -1 & 1-2a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1-2a & -1 & a+1 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} a+1 & 1-2a & -1 \\ 1-2a & 6a & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 4.3. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду. Сделать чертеж.

№ вар.	Уравнение кривой
1	$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 34x + 28y + 29 = 0$
2	$11x^2 + 20xy - 4y^2 - 26x - 76y - 181 = 0$
3	$x^2 - 4xy + 4y^2 - 22x - 56y + 21 = 0$
4	$13x^2 + 32xy + 37y^2 + 46x + 22y + 13 = 0$
5	$4x^2 - 20xy - 11y^2 + 64x - 16y - 32 = 0$
6	$x^2 + 4xy + 4y^2 + 44x - 12y - 116 = 0$
7	$8x^2 - 4xy + 5y^2 - 52x + 22y + 53 = 0$
8	$-4x^2 + 20xy + 11y^2 + 64x - 16y - 256 = 0$
9	$4x^2 - 4xy + y^2 + 16x - 58y + 141 = 0$
10	$37x^2 + 32xy + 13y^2 + 190x + 70y + 205 = 0$
11	$-11x^2 - 20xy + 4y^2 - 26x - 76y - 107 = 0$
12	$4x^2 + 4xy + y^2 + 12x - 44y - 116 = 0$
13	$9x^2 - 6xy + 17y^2 - 60x + 52y + 44 = 0$
14	$27x^2 + 30xy - 13y^2 - 102x - 142y - 277 = 0$
15	$x^2 - 6xy + 9y^2 - 96x - 112y - 96 = 0$
16	$9x^2 + 24xy + 41y^2 + 30x - 10y + 5 = 0$
17	$13x^2 - 30xy - 27y^2 + 138x + 18y - 99 = 0$
18	$x^2 + 6xy + 9y^2 + 128x - 16y - 304 = 0$
19	$17x^2 - 6xy + 9y^2 - 108x + 36y + 108 = 0$
20	$-13x^2 + 30xy + 27y^2 + 138x + 18y - 477 = 0$
21	$9x^2 - 6xy + y^2 + 32x - 144y + 384 = 0$
22	$41x^2 + 24xy + 9y^2 + 222x + 54y + 261 = 0$
23	$-27x^2 - 30xy + 13y^2 - 102x - 142y - 299 = 0$
24	$9x^2 + 6xy + y^2 + 16x - 128y - 304 = 0$

Продолжение задачи 4.3	
25	$4x^2 - 12xy + 13y^2 - 36x + 62y + 69 = 0$
26	$7x^2 + 52xy - 32y^2 + 62x - 284y - 557 = 0$
27	$x^2 - 4xy + 4y^2 - 62x - 76y - 39 = 0$
28	$4x^2 + 12xy + 13y^2 + 12x + 10y - 3 = 0$
29	$32x^2 - 52xy - 7y^2 + 296x - 128y + 392 = 0$
30	$x^2 + 4xy + 4y^2 + 84x - 32y - 236 = 0$

.

Задача 5.1. В пространстве $\mathbb{V}_3$ геометрических векторов с обычным скалярным произведением векторы базиса $S_1 = \{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ заданы координатами в базисе $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$.
1) Найдите матрицу Грама G_1 скалярного произведения в этом базисе. Выпишите формулу для длины вектора через его координаты в базисе S_1.
2) Ортогонализуйте базис S_1. Сделайте проверку ортонормированности построенного базиса S_2 одним из двух способов:
а) выписав координаты векторов из S_2 в каноническом базисе $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$;
б) убедившись, что преобразование матрицы Грама при переходе от базиса S_1 к базису S_2 (по формуле $G_2 = P^T G_1 P$, где P — матрица перехода от базиса S_1 к базису S_2) приводит к единичной матрице.

№	Базис S_1	№	Базис S_1	№	Базис S_1
1, 16	$\mathbf{e}_1 = (1, -1, 1)$ $\mathbf{e}_2 = (2, 1, 0)$ $\mathbf{e}_3 = (0, 1, 1)$	2, 17	$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 1)$ $\mathbf{e}_2 = (1, 1, -1)$ $\mathbf{e}_3 = (2, -1, 0)$	3, 18	$\mathbf{e}_1 = (1, -1, 0)$ $\mathbf{e}_2 = (1, 1, 1)$ $\mathbf{e}_3 = (1, 0, 2)$
4, 19	$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 2)$ $\mathbf{e}_2 = (2, 1, 1)$ $\mathbf{e}_3 = (1, 1, 0)$	5, 20	$\mathbf{e}_1 = (0, -1, 2)$ $\mathbf{e}_2 = (1, 1, -1)$ $\mathbf{e}_3 = (2, 0, 1)$	6, 21	$\mathbf{e}_1 = (1, 1, -1)$ $\mathbf{e}_2 = (2, 0, 1)$ $\mathbf{e}_3 = (1, 1, 2)$

Продолжение задачи 5.1					
7,	$\mathbf{e}_1 = (2, 0, 1)$	8,	$\mathbf{e}_1 = (-1, 1, 1)$	9,	$\mathbf{e}_1 = (2, 0, 1)$
22	$\mathbf{e}_2 = (1, 1, -1)$	23	$\mathbf{e}_2 = (1, 1, -1)$	24	$\mathbf{e}_2 = (1, 1, 1)$
	$\mathbf{e}_3 = (1, 2, 1)$		$\mathbf{e}_3 = (2, 0, 1)$		$\mathbf{e}_3 = (-2, 0, 1)$
10,	$\mathbf{e}_1 = (1, 1, 0)$	11,	$\mathbf{e}_1 = (1, 0, -1)$	12,	$\mathbf{e}_1 = (2, -1, 0)$
25	$\mathbf{e}_2 = (2, 0, 1)$	26	$\mathbf{e}_2 = (2, 1, 1)$	27	$\mathbf{e}_2 = (1, 1, 1)$
	$\mathbf{e}_3 = (1, 1, 1)$		$\mathbf{e}_3 = (1, 1, 0)$		$\mathbf{e}_3 = (-1, 0, 1)$
13,	$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 2)$	14,	$\mathbf{e}_1 = (-1, 1, 0)$	15,	$\mathbf{e}_1 = (1, 1, -1)$
28	$\mathbf{e}_2 = (1, 1, 1)$	29	$\mathbf{e}_2 = (-2, 1, 1)$	30	$\mathbf{e}_2 = (1, 1, 1)$
	$\mathbf{e}_3 = (-1, 2, 0)$		$\mathbf{e}_3 = (1, 0, 1)$		$\mathbf{e}_3 = (2, 1, 0)$