

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
„МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ  
РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ  
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)“

## **ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА**

### **КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ**

Для студентов факультета ВРТ

МОСКВА 2010

Составители: В.П.Барашев, Е.Ю.Кузнецова, С.А.Унучек

Редактор Н.С.Чекалкин

Контрольные задания содержат типовой расчет по дискретной математике и охватывают следующие темы: минимизация ДНФ, полнота систем булевых функций, экстремальные задачи на графах и задача об оптимальном назначении. Указанные темы вошли в программу II семестра I курса отделения бакалавров очно-заочной формы обучения. Типовой расчет выполняется студентами в письменном виде и сдается преподавателю до начала зачетной сессии. Приведенные в пособии вопросы к зачету могут быть уточнены и дополнены лектором.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета университета.

Рецензенты: А.В.Баскаков,  
А.В.Татаринцев

© МИРЭА, 2010

Контрольные задания напечатаны в авторской редакции

Подписано в печать xx.01.2008. Формат 60 x 84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,63. Усл.кр.-отт. 6,52. Уч.изд.л. 1,75.

Тираж 100 экз. С xxx

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
„Московский государственный институт радиотехники,  
электроники и автоматики (технический университет)“  
119454, Москва, пр.Вернадского, 78

II семестр  
ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

**Задача 1.1.** Построить таблицу истинности, найти носитель функции, СДНФ и СКНФ и многочлен Жегалкина булевой функции, заданной формулой

№	$f(x, y, z)$
1	$\overline{((x \& y) \sim (y \rightarrow z))} \mid ((x \downarrow z) \vee (\bar{y} \oplus z))$
2	$((x \sim y) \rightarrow (y \mid \bar{z})) \downarrow \overline{((x \vee z) \oplus (\bar{y} \& z))}$
3	$\overline{((x \rightarrow y) \mid (y \downarrow z))} \vee ((x \oplus z) \& (\bar{y} \sim z))$
4	$((x \mid y) \downarrow (y \vee z)) \oplus \overline{((x \& z) \sim (\bar{y} \rightarrow z))}$
5	$\overline{((x \downarrow y) \vee (y \oplus z))} \& ((x \sim z) \rightarrow (\bar{y} \mid z))$
6	$((x \vee y) \oplus (y \& z)) \sim \overline{((x \rightarrow z) \mid (\bar{y} \downarrow z))}$
7	$\overline{((x \oplus y) \& (y \sim z))} \rightarrow ((x \mid z) \downarrow (\bar{y} \vee z))$
8	$((x \& y) \sim (\bar{x} \rightarrow z)) \mid \overline{((x \downarrow z) \vee (y \oplus \bar{z}))}$
9	$\overline{((x \sim y) \rightarrow (\bar{x} \mid z))} \downarrow \overline{((x \vee z) \oplus (y \& z))}$
10	$((x \rightarrow \bar{y}) \mid (\bar{x} \downarrow z)) \vee \overline{((x \oplus z) \& (y \sim z))}$
11	$\overline{((x \mid y) \downarrow (\bar{x} \vee z))} \oplus ((x \& z) \sim (y \rightarrow z))$
12	$((x \downarrow y) \vee (\bar{x} \oplus z)) \& \overline{((x \sim z) \rightarrow (y \mid \bar{z}))}$
13	$\overline{((x \vee y) \oplus (\bar{x} \& z))} \sim ((x \rightarrow z) \mid (y \downarrow z))$
14	$((x \oplus y) \& (\bar{x} \sim z)) \rightarrow \overline{((\bar{x} \mid z) \downarrow (\bar{y} \vee \bar{z}))}$
15	$\overline{((x \& y) \sim (x \rightarrow z))} \mid \overline{((\bar{x} \downarrow y) \vee (y \oplus z))}$
16	$((x \sim \bar{y}) \rightarrow (x \mid z)) \downarrow \overline{((x \vee y) \oplus (y \& z))}$
17	$\overline{((x \rightarrow y) \mid (x \downarrow z))} \vee ((\bar{x} \oplus y) \& (y \sim z))$
18	$((x \mid y) \downarrow (x \vee z)) \oplus \overline{((\bar{x} \& y) \sim (y \rightarrow z))}$
19	$\overline{((x \downarrow y) \vee (x \oplus z))} \& ((\bar{x} \sim y) \rightarrow (y \mid z))$
20	$((x \vee y) \oplus (x \& z)) \sim \overline{((\bar{x} \rightarrow y) \mid (y \downarrow z))}$

**Задача 1.2.** Найти СДНФ, сокращенную, ядровую, все тупиковые и все минимальные ДНФ для  $f(x_1, x_2, x_3)$ , используя геометрический метод минимизации булевых функций.

№	$f$	№	$f$	№	$f$	№	$f$
1	0011 1110	2	1101 1011	3	1010 1011	4	0111 0110
5	1001 1011	6	0011 0111	7	1010 0111	8	1010 1101
9	0011 1011	10	1011 0101	11	1011 1001	12	1110 0011
13	1011 1101	14	1100 0111	15	0101 0111	16	1100 1011
17	1010 0110	18	1101 0011	19	1101 1001	20	0101 1110

**Задача 1.3.** Найти сокращенную, ядровую, все тупиковые и все минимальные ДНФ для  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  методами Карно и Квайна.

№	$f$	№	$f$
1	1010 0100 1010 0001	2	1010 1011 1010 1110
3	1010 1010 1000 1001	4	1101 0010 1101 0001
5	1010 0001 1010 0100	6	0100 1011 1010 1010
7	0111 1000 1101 0100	8	1111 0100 1111 0001
9	1001 1110 0010 1011	10	0101 1010 0111 1001
11	1111 0001 1001 0100	12	1110 0100 0100 0001
13	1010 0110 0110 0011	14	1010 1110 0100 1011
15	1100 0001 1111 0110	16	1000 0100 1110 1000
17	1111 1111 0001 0100	18	0110 1011 0010 1010
19	0001 0110 1111 1111	20	0010 0001 1011 0010

**Задача 1.4.** Найти сокращенную, ядровую, все тупиковые и все минимальные ДНФ для  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  методами Карно и Квайна.

№	$f$	№	$f$
1	1101 0011 1100 0010	2	1100 1010 0110 1011
3	1010 1110 0111 1101	4	1110 0101 1010 0001
5	1101 0111 1100 1011	6	1110 1010 1001 0011
7	1010 1010 0101 0011	8	1110 1101 1010 0111

Продолжение задачи 1.4			
№	$f$	№	$f$
9	1011 0110 1010 1100	10	1100 1010 0101 1010
11	1001 1110 0011 1010	12	0111 1010 0101 1000
13	1100 1101 1011 0111	14	0110 1100 1011 1010
15	0101 1100 1010 1010	16	1101 0111 1110 1010
17	1010 1011 1100 0110	18	1010 0101 1010 1100
19	0111 1010 1101 1110	20	1010 0011 1110 1001

**Задача 1.5.** Построить минимальную функциональную и минимальную контактную схемы для функции  $f$  из задачи 1.4 на элементах  $\{\vee, \&, -\}$ .

**Задача 2.1.** Найти среди функций  $f_1$  и  $f_2$  несамодвойственную и по лемме  $S$  (о несамодвойственной функции) выразить всеми возможными способами все константы.

№	$f_1$	$f_2$
1	1100 1100	1110 0110
2	0001 0111	0001 1001
3	1110 0011	0010 1011
4	0011 0011	0001 1100
5	1101 1011	0100 1101
6	0101 0101	0001 1010
7	1101 1010	0110 1001
8	1101 1001	0111 0001
9	1000 1110	0010 0100
10	1101 0011	1001 0110
11	1100 1011	1010 1010
12	1011 0010	0010 0101
13	1100 0111	1100 1100
14	1100 0011	1101 0100
15	1110 1000	1110 0111
16	1100 0010	1111 0000
17	0010 1011	1110 0101

Продолжение задачи 2.1		
№	$f_1$	$f_2$
18	1011 1101	0101 0101
19	1100 0001	1000 1110
20	0001 1000	0000 1111

**Задача 2.2.** Найти среди функций  $f_1$  и  $f_2$  немонотонную и по лемме  $M$  (о немонотонной функции) выразить всеми возможными способами  $\bar{x}$ .

№	$f_1$	$f_2$
1	0101 0101	0110 1111
2	0111 1101	0001 1111
3	0000 0101	0110 0111
4	0111 1001	0011 0011
5	0000 1111	0110 0101
6	0111 0001	0000 0111
7	0001 0001	0111 0101
8	0001 0101	0110 1001
9	0110 1011	0000 0001
10	0001 0111	0110 0011
11	0101 1001	0111 1111
12	0011 0111	0110 1101
13	0101 0011	0001 0111
14	0101 0001	0000 0011
15	0101 0111	0110 0001
16	0100 1111	0001 0011
17	0111 0111	0101 1101
18	0111 1011	0001 0001
19	0100 1101	0011 1111
20	0101 1111	0101 1011

**Задача 2.3.** Найти среди функций  $f_1$  и  $f_2$  нелинейную и по лемме  $L$  (о нелинейной функции) выразить всеми возможными способами конъюнкцию и дизъюнкцию.

№	$f_1$	$f_2$
1	1100 0011	1011 1000
2	0011 1100	1011 0010
3	1110 0100	0000 1111
4	1101 1000	1010 0101
5	0110 0110	1010 1100
6	0101 1010	1011 0001
7	1100 1001	1111 0000
8	1001 0110	1101 0001
9	1001 1001	1000 1011
10	1000 0111	0101 0101
11	1010 1010	1001 1100
12	1110 1000	0011 0011
13	1100 1100	0111 1101
14	1100 0110	0110 1001
15	0101 0101	1000 1110
16	0110 1101	0011 1100
17	0000 1111	1110 0001
18	1100 1010	1001 0110
19	0110 1001	1001 1010
20	1001 0101	1010 1010

**Задача 2.4.** Проверить полноту системы функций  $\Sigma = \{f_1, f_2\}$ .

№	$f_1$	$f_2$
1	0000 0011	1110 1000
2	1001 0110	0000 0101
3	0011 1100	1001 0101
4	1110 0001	1101 0100
5	0111 1111	1000 1010
6	1000 1101	0110 0110
7	0000 0111	1000 0100

Продолжение задачи 2.4		
№	$f_1$	$f_2$
8	1001 0011	1000 1110
9	0000 1111	1001 1100
10	1010 0101	0001 0001
11	0001 0011	1111 0000
12	1100 1001	1001 0111
13	1001 1001	0001 0101
14	0001 1111	1100 0110
15	1001 0110	0001 0111
16	0011 0011	1000 0110
17	1000 1011	0111 0100
18	0011 0111	1001 0100
19	0110 0110	1000 0111
20	0110 1001	1000 1100

**Задача 2.5.** Доказать полноту системы функций  $\Sigma = \{f_1, f_2\}$ . Представить формулами над  $\Sigma$  и функциональными схемами над  $\Sigma$  функции  $0, 1, -, \&, \vee$ .

№	$f_1$	$f_2$
1	0101 1010	1101 1101
2	1110 0101	0110 0110
3	0001 0001	1001 0110
4	1001 1001	0001 0010
5	0011 1100	1000 0011
6	1010 1010	0001 0011
7	0110 1000	1100 0011
8	1010 0101	0110 1010
9	0001 0101	1101 0100
10	0001 0110	1101 1101
11	1110 0101	0010 1100
12	1100 1100	0010 0001
13	0101 0100	1100 1011
14	0011 0111	1011 0010
15	1000 1101	0011 1000

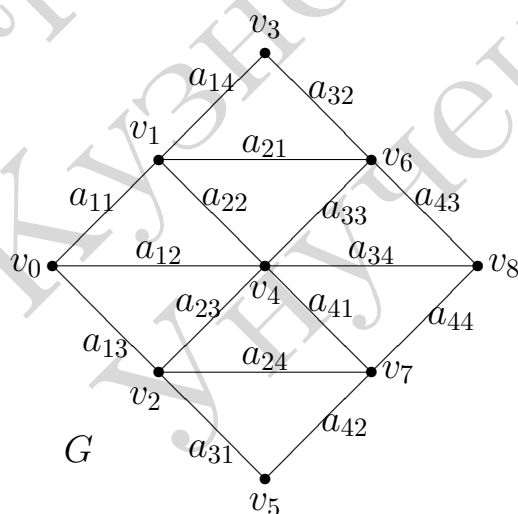


Продолжение задачи 2.5		
№	$f_1$	$f_2$
16	1110 1000	0011 1111
17	0010 0110	1001 1101
18	0101 1111	1000 1110
19	0111 1000	1101 0011
20	0101 0111	1111 0000

**Задача 2.6.** Доказать полноту системы  $\Sigma$ , состоящую из функции  $f$ . Представить формулами над  $\Sigma$  и функциональными схемами над  $\Sigma$  функции  $0, 1, -, \&, \vee$ .

№	$f$	№	$f$	№	$f$	№	$f$
1	1010 1110	2	1110 1100	3	1000 0110	4	1100 0100
5	1101 1110	6	1011 1010	7	1110 0110	8	1000 0100
9	1100 1110	10	1101 0110	11	1010 0010	12	1110 1010
13	1000 1100	14	1001 1110	15	1101 1010	16	1011 0110
17	1001 0100	18	1100 1000	19	1000 1010	20	1011 1110

**Задача 3.1.** Найти остов минимальной длины графа  $G$ , в котором длины ребер равны соответствующим элементам  $a_{ij}$  матрицы  $A$ .



№	A	№	A
1	$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 4 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 5 & 8 \\ 4 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 6 & 7 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 4 \\ 7 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 4 & 7 \\ 5 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

Продолжение задачи 3.1			
№	$A$	№	$A$
15	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 7 & 4 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ 7 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & 7 & 5 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 & 7 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

**Задача 3.2.** Найти кратчайший путь от вершины  $v_0$  до вершины  $v_8$  в графе  $G$  из задачи 3.1, в котором длины ребер равны соответствующим элементам  $a_{ij}$  матрицы  $A$ .

№	$A$	№	$A$
1	$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 8 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 12 & 6 \\ 12 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 11 \\ 7 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

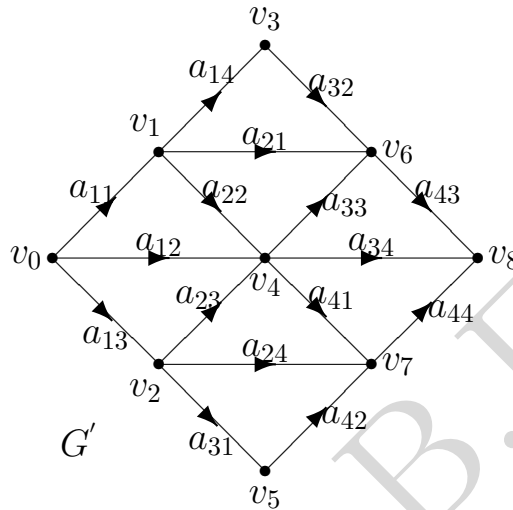
Продолжение задачи 3.2			
№	A	№	A
7	$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 3 & 14 & 10 & 4 \\ 7 & 11 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 7 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 5 \\ 6 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 9 \\ 7 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 13 & 9 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & 11 \\ 3 & 2 & 4 & 14 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & 9 & 3 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 10 & 9 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 5 \\ 9 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 2 & 2 \\ 6 & 8 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 5 \\ 13 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 7 & 10 & 12 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

**Задача 3.3.** Решить задачу об оптимальном назначении с матрицей эффективности  $A$

№	$A$	№	$A$
1	$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 & 9 & 6 \\ 8 & 11 & 5 & 10 & 9 \\ 5 & 5 & 3 & 6 & 4 \\ 5 & 8 & 5 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 8 \\ 7 & 4 & 6 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 8 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 5 & 4 \\ 5 & 7 & 8 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 7 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 & 3 & 4 \\ 8 & 6 & 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 & 4 & 5 \\ 8 & 5 & 5 & 4 & 3 \\ 9 & 7 & 6 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 9 & 6 & 6 \\ 7 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 7 & 11 & 6 & 7 & 4 \\ 7 & 5 & 6 & 8 & 3 \\ 3 & 4 & 7 & 5 & 2 \\ 8 & 5 & 10 & 7 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 5 & 6 & 10 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 6 & 5 & 9 \\ 11 & 6 & 7 & 11 & 5 \\ 9 & 7 & 4 & 9 & 8 \\ 9 & 11 & 5 & 10 & 6 \\ 9 & 5 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 11 & 6 & 7 \\ 8 & 3 & 6 & 4 & 9 \\ 11 & 8 & 12 & 9 & 3 \\ 6 & 7 & 11 & 6 & 5 \\ 8 & 5 & 12 & 9 & 12 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 8 & 6 & 10 \\ 10 & 12 & 9 & 6 & 9 \\ 8 & 13 & 12 & 9 & 11 \\ 9 & 8 & 11 & 7 & 7 \\ 9 & 11 & 8 & 6 & 8 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 8 & 7 & 11 \\ 13 & 8 & 9 & 13 & 7 \\ 11 & 9 & 6 & 11 & 10 \\ 11 & 13 & 7 & 12 & 8 \\ 11 & 7 & 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Продолжение задачи 3.3			
№	A	№	A
13	$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 7 & 8 & 5 \\ 8 & 6 & 7 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 9 & 6 & 11 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 8 & 5 \\ 7 & 10 & 7 & 9 & 8 \\ 4 & 4 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 7 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 7 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 & 5 & 9 \\ 9 & 11 & 8 & 5 & 8 \\ 7 & 12 & 11 & 8 & 10 \\ 8 & 7 & 10 & 6 & 6 \\ 8 & 10 & 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 10 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 5 & 3 & 8 \\ 10 & 7 & 11 & 8 & 2 \\ 5 & 6 & 10 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & 11 & 8 & 11 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 9 & 4 & 8 \\ 8 & 7 & 5 & 6 & 9 \\ 8 & 5 & 7 & 6 & 5 \\ 6 & 4 & 9 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 7 & 9 & 6 & 9 & 10 \\ 9 & 11 & 8 & 10 & 9 \\ 8 & 8 & 6 & 9 & 10 \\ 7 & 9 & 7 & 12 & 9 \\ 8 & 9 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 10 & 11 & 9 & 10 & 14 \\ 6 & 8 & 8 & 6 & 11 \\ 6 & 7 & 9 & 6 & 8 \\ 7 & 10 & 9 & 7 & 9 \\ 9 & 10 & 12 & 8 & 13 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 10 & 6 & 7 \\ 10 & 7 & 7 & 6 & 5 \\ 11 & 9 & 8 & 5 & 6 \\ 6 & 9 & 11 & 7 & 8 \\ 9 & 6 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

**Задача 3.4.** Найти максимальный поток в транспортной сети, заданной графом  $G'$ , в котором пропускные способности дуг равны соответствующим элементам  $a_{ij}$  матрицы  $A$ .



№	$A$	№	$A$
1	$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 17 & 4 \\ 6 & 5 & 7 & 5 \\ 5 & 7 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 8 & 12 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 9 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & 15 & 3 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 9 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 10 & 4 & 8 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 10 & 4 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 8 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 11 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

Продолжение задачи 3.4			
№	A	№	A
9	$\begin{pmatrix} 11 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 9 & 9 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 15 & 3 \\ 5 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 7 & 11 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 8 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 10 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 9 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 10 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 9 & 10 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 11 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 5 & 4 & 8 & 10 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 10 & 2 \end{pmatrix}$



## ЗАЧЕТНЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ ”ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА“.

1. **Булевы функции.** Булевы переменные. Логические операции, их свойства.  $n$ -мерный булев куб. Определение и способы задания булевой функции.
2. **Комбинаторные объекты и комбинаторные числа.** Сочетания, размещения, перестановки и их числа. Бином Ньютона
3. **СДНФ.** Элементарные конъюнкции. Дизъюнктивные нормальные формы. Теорема о существовании и единственности совершенной дизъюнктивной нормальной формы.
4. **Задача о минимизации булевых функций.** Интервал и максимальный интервал булевой функции. Сокращенная, ядровая и тупиковая ДНФ. Геометрический метод минимизации функции трех переменных.
5. **Метод Карно.** Изображение четырехмерного булева куба в виде карты Карно. Представление интервалов на карте Карно. Минимизация.
6. **Метод Квайна.** Формулы склеивания и поглощения. Таблицы для определения сокращенной, ядровой, тупиковых и минимальных ДНФ. Использование функции Патрика для нахождения тупиковых и минимальных ДНФ.
7. **Принцип двойственности.** Двойственная функция. Доказательство принципа двойственности. Определение СКНФ, приведение булевой функции к СКНФ.
8. **Функционально полные системы функций.** Достаточные условия функциональной полноты. Основные примеры функционально полных систем.
9. **Замкнутые классы функций.** Многочлен Жегалкина. Класс линейных булевых функций, его замкнутость. Замкнутость классов самодвойственных, монотонных функций и классов функций, сохраняющих константы.
10. **Теорема Поста.** Леммы о несамодвойственной, немонотонной и о нелинейной функциях. Доказательство теоремы Поста. Построение функциональных схем над заданной функционально полной системой функций.
11. **Графы.** Определение и способы задания графа. Маршруты, циклы, связность графа. Определение дерева. Понятие остова графа.

12. **Орграфы и функциональные схемы.** Бесконтурный орграф. Сложность функциональной схемы. Минимизация функциональных схем.
13. **Сети и контактные схемы.** Двухполюсная сеть. Реализация булевой функции с помощью контактной схемы. Сложность булевой функции в классе контактных схем. Минимизация контактных схем.
14. **Экстремальные задачи на графах.** Алгоритм отыскания кратчайших путей в графе. Построение кратчайшего остова.
15. **Двудольные графы.** Понятия паросочетания, полного паросочетания, максимального паросочетания, совершенного паросочетания. Алгоритм отыскания максимального паросочетания. Решение задачи об оптимальном назначении.
16. **Транспортные сети и потоки.** Определение потока, мощности потока в транспортной сети. Сечения и разрезы. Алгоритм отыскания максимального потока. Теорема Форда–Фалкерсона.
17. **Планарные графы.** Определение планарных и плоских графов. Формула Эйлера. Теорема Понтрягина–Куратовского. Алгоритм отыскания плоской укладки графа.