Минобрнауки России

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)»

Кафедра систем автоматизированного
проектирования и управления

Чистякова Т. Б., Новожилова И. В., Антипин Р. В., Уланов В. Н.

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Учебное пособие
для студентов заочной формы обучения

Санкт-Петербург
2012

УДК 681.3.062

Чистякова, Т. Б. Теория принятия решений. Контрольные работы [Текст]: учебное пособие для студентов заочной формы обучения/ Т. Б. Чистякова, И. В. Новожилова, Р. В. Антипин, В. Н. Уланов. – СПб.: Изд-во СПбГТИ(ТУ), 2012. – 104 с.

В учебное пособие включены задания для выполнения контрольных работ по изучению дисциплины «Теория принятия решений». Рассматриваются классические задачи принятия решений, формулируемые как задачи выбора вариантов из допустимого множества. Основное внимание уделено прикладным и вычислительным аспектам методов принятия решений, связанным с разработкой компьютерных алгоритмов и вопросами их практического применения.

Учебное пособие предназначено для студентов заочной формы обучения, обучающихся по направлению подготовки 230100 «Информатика и вычислительная техника».

Ил. 12, табл. 6, библиогр. назв. 6

Рецензенты:

Холоднов В. А., зав. кафедрой математического моделирования и оптимизации химико-технологических процессов Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета), д-р техн. наук, проф.

Утверждено на заседании учебно-методической комиссии факультета информационных технологий и управления.

Рекомендовано к изданию РИСо СПбГТИ(ТУ)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целями освоения дисциплины «Теория принятия решений» являются изучение теоретических основ принятия решений, методологии решения типовых задач принятия решений с применением современных средств вычислительной техники, информационных технологий и технологий программирования, а также формирование умений и практических навыков в решении задач принятия решений и разработки автоматизированных систем поддержки принятия решений.

Изучение дисциплины основано на компетенциях, полученных студентом при освоении курсов: «Математический анализ», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Вычислительная математика», «Методы оптимизации в автоматизированных системах», «Информатика».

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВПО по направлению 230100 «Информатика и вычислительная техника»:

а) общекультурных (ОК):

– использование основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применение методов математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОК-10);

– получение навыков работы с компьютером как средством управления информацией (ОК-12);

б) профессиональных (ПК):

– освоение методики использования программных средств для решения практических задач (ПК-2);

– подготовка презентаций, научно-технических отчетов по результатам выполненной работы, оформление результатов исследований в виде статей и докладов на научно-технических конференциях (ПК-7).

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

знать: терминологию теории принятия решений, методологию процесса принятия решений, теоретические основы, основные классы математических моделей и типовые задачи принятия решений;

уметь: проводить содержательное описание типовых операций по принятию решений, выбирать класс используемых математических моделей, осуществлять формализованное описание типовых операций, применять различные методы решения задач принятия решений с применением пакетов прикладных программ;

владеть: методами разработки математических моделей, методами решения задач принятия решений, методами разработки математического, информационного и программного обеспечений систем поддержки принятия решений.

В данном учебном пособии представлены задания на выполнение контрольных работ по изучению основных математических методов принятия решений. Основное внимание уделено прикладным и вычислительным аспектам методов принятия решений, связанным с разработкой компьютерных алгоритмов и вопросами их практического применения.

ЗАДАНИЕ НА ВЫПОЛНЕНИЕ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

В учебном пособии составлены 3 контрольные работы. Студенту необходимо представить отчёт о выполненных контрольных работах в распечатанном виде и в электронном виде на любом носителе информации.

Отчёт должен включать: титульный лист, условие задачи, алгоритм решения (при необходимости) и результаты решения задачи. Во время защиты контрольных работ студент должен подтвердить работоспособность программной реализации заданий. На титульном листе отчёта о выполнении контрольных работ необходимо указать фамилию, имя и отчество студента, номер учебной группы, номер контрольной работы, номер варианта.

Номер варианта соответствует номеру первой буквы фамилии студента согласно таблице 1.

Таблица – Распределение вариантов заданий

Первая буква фамилии студента	Номер варианта	Первая буква фамилии студента	Номер варианта
А	1	П	15
Б	2	Р	16
В	3	С	17
Г	4	Т	18
Д	5	У	19
Е, Ё	6	Ф	20
Ж	7	Х	21
З	8	Ц	22
И, Й	9	Ч	23
К	10	Ш, Щ	24
Л	11	Э	25
М	12	Ю	26
Н	13	Я	27
О	14	Пример решения	28

Приступая к выполнению контрольных работ, рекомендуется ознакомиться со следующими методическими материалами:

1) Чистякова, Т.Б. Программирование на языках высокого уровня. Базовый курс [Текст]: учебное пособие для студентов заочной формы обучения/ Т.Б. Чистякова, Р.В. Антипин, И.В. Новожилова. – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2008. – 227с.

2) Черноруцкий, И. Г. Методы принятия решений: Учеб. пособие / И. Г. Черноруцкий. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2005. – 408 с.

3) Грешилов, А. А. Математические методы принятия решений: Учеб. пособие / А. А. Грешилов. - Москва : Изд-во МГТУ, 2006. – 583 с.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

Вариант №1

1) Перечислите основные этапы принятия решений (отобразите схему принятия решения).

2) Матрица БКГ.

3) Джон фон Нейман

Вариант №2

1) Дайте определение системам поддержки принятия решений (СППР). Перечислите основные области применения СППР.

2) Метод максим

3) Джордж Данциг

Вариант №3

1) Перечислите основные требования к методам принятия решений?

2) Лицо принимающее решения.

3) Жозе́ф Луи́ Лагра́нж

Вариант №4

1) Сформулируйте постановку задачи принятия решений.

2) Метод экспертных оценок.

3) Оскар Моргенштерн

Вариант №5

1) Перечислите основные языки описания выбора. Дайте их краткую характеристику.

2) Метод голосования.

3) Ральф Гомори

Вариант №6

1) Сформулируйте постановку задачи однокритериального и многокритериального выбора.

2) Асимптотически оптимальные планы.

3) Николай Васильевич Смирнов

Вариант №7

1) Дайте определение эффективного (Парето-оптимального) решения многокритериальной задачи.

2) Способы выбора весовых коэффициентов в задачах стратегического менеджмента.

3) Вильфредо Парето

Вариант №8

1) Дайте определение слабо эффективного (оптимального по Слейтеру) решения многокритериальной задачи.

2) Принятие решений при контроле.

3) Ричард Эрнст Беллман

Вариант №9

1) Сформулируйте понятие функции выбора. Укажите основное достоинство описания задачи принятия решений с помощью функций выбора. Приведите пример.

2) Проблема устойчивости планов по отношению к допустимым отклонениям исходных данных.

3) Норберт Винер

Вариант №10

1) Перечислите основные виды бинарных отношений.

2) Чем отличаются методы проверочного списка и суммарной оценки?

3) Фредерик Тейлор

Вариант №11

1) Перечислите основные методы решения сетевых и потоковых задач.

2) Теория конечных антагонистических игр.

3) Анри Файоль

Вариант №12

1) Перечислите основные свойства функций выбора

2) Соотношение оптимальных и асимптотически оптимальных планов.

3) Генри Форд

Вариант №13

1) Сформулируйте постановку задачи линейного программирования. Перечислите типичные задачи линейного программирования.

2) Роль прогнозирования при принятии решений.

3) Андрей Николаевич Колмогоров

Вариант №14

1) Укажите основные принципы решения нелинейных задач математического программирования. Сформулируйте постановку задачи.

2) Различные виды прогнозов.

3) Борис Владимирович Гнеденко

Вариант №15

1) Приведите общий алгоритм решения задачи математического программирования.

2) Декомпозиция задач принятия решения. Метод «Дерево решений».

3) Александр Яковлевич Хинчин

Вариант №16

1) Какие методы используются для выбора единственного решения многокритериальной задачи?

2) Декомпозиция задач принятия решения «от ветвей к корню».

3) Рассел Линкольн Акофф

Вариант №17

1) Перечислите методы многокритериальной оптимизации. Укажите их достоинства и недостатки.

2) Метод экспертных оценок.

3) Карл Фридрих Гаусс

Вариант №18

1) В чем заключается основная вычислительная идея метода Беллмана?

2) Принятие решений при планировании.

3) Ежи Нейман.

Вариант №19

1) Какой процесс поведения системы называется марковским?

2) Восемь этапов в процессе планирования.

3) Карл Пирсон.

Вариант №20

1) Перечислите основные операции метода Нелдера-Мида (метода деформируемого многогранника).

2) Сравнение стратегического и оперативного менеджмента.

3) Йозеф. Шумпетер

Вариант №21

1) В чем заключается основная вычислительная идея метода t-упорядочения?

2) Характеризация моделей с дисконтированием.

3) Фибона́ччи

Вариант №22

1) В чем заключается основная вычислительная идея метода анализа иерархий (метода Томаса Саати)?

2) Шесть типов шкал.

3) Тьяллинг Купманс

Вариант №23

1) Перечислите основные методы решения многокритериальных задач принятия решений на основе дополнительной информации.

2) В чём заключается системный подход при принятии решений?

3) Рональд Фишер

Вариант №24

1) Опишите алгоритм метода ограничений.

2) В чём заключается проблема горизонта планирования?

3) Леона́рдо Пиза́нский

Вариант №25

1) В чем заключается основная идея методов многокритериального выбора вариантов в условиях определенности на основе теории полезности?

2) Что такое контроллинг?

3) Леонард Эйлер

Вариант №26

1) Сформулируйте аксиомы, определяющие основные свойства отношения предпочтения $\succ$.

2) Применение нечетких множеств в теории принятия решений.

3) Даниил Бернулли

Вариант №27

1) Опишите структуру экспертной системы принятия решений. Перечислите основные компоненты.

2) Теория статистических решений.

3) Томас Саати

Вариант №28

1) Каким образом осуществляется проверка информации, получаемой от пользователя, на непротиворечивость?

2) Методы списка и суммарной оценки.
3) Леонид Витальевич Канторович

Пример выполнения контрольной работы № 1

Вариант № 28

1) Для проверки информации, получаемой от пользователя, на непротиворечивость при реализации методов принятия решений на основе дополнительной информации следует вычислить так называемый индекс согласованности (*ИС*) суждений

$$\text{ÈÑ} = (\lambda_{\max} - n)/(n-1),$$

где n – размерность матрицы суждений, а λ_{max} считается следующим образом: вначале суммируется каждый столбец суждений, затем сумма первого столбца умножается на величину первой компоненты нормализованного вектора приоритетов, сумма второго столбца – на вторую компоненту и т.д., затем полученные числа суммируются.

Затем *ИС* сравнивается с той величиной, которая получилась бы при случайном выборе суждений по девятибалльной шкале: 1/9...9. Значения этой величины – случайной согласованности (СС) представлены в следующей таблице 1:

Таблица 1 – Значения случайной согласованности

Размер матрицы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайная согласованность	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Определяя *ИС* и *СС*, находим отношение согласованности

$$\text{ÎÑ} = \frac{\text{ÈÑ}}{\text{ÑÑ}}.$$

Если для конкретной матрицы окажется, что *ОС* > 0,17, то можно утверждать, что суждения эксперта, на основе которых заполнена исследуемая матрица, сильно рассогласованы, и ему надлежит заполнить матрицу заново, более внимательно при этом используя шкалу парных сравнений.

2) **Методы списка и суммарной оценки**. Широко используемыми и весьма полезными инструментами стратегического планирования являются также метод проверочного списка и метод оценки по системе баллов. Первый из них весьма прост. Выделяется некоторое количество «факторов успеха» и всем рассматриваемым проектам даются оценки (например, с помощью комиссии экспертов) по этим факторам. Например, в табл.1 представлен бланк проверочного списка для проектов, состоящих в организации выпуска тех или иных товаров (стратегии типа "продукт-рынок").

Таблица 1 Пример проверочного списка

Факторы	продукты		
	А	Б	В
Степень инноваций	хорошо	средне	плохо
Число возможных покупателей	плохо	хорошо	средне
Готовность к кооперации в торговле	средне	хорошо	хорошо
Барьеры для вхождения новых продавцов	хорошо	плохо	плохо
Обеспеченность сырьем	плохо	средне	хорошо

Обратите внимание, что оценки даются в качественном виде (измерены в порядковой шкале – см. ниже в части 2). Любая количественная определенность была бы при подобных оценках лишь иллюзией.

Целесообразно разделить факторы на «обязательные», «необходимые» и «желательные». Т.е. ввести веса факторов, выраженные в качественном виде. Правило принятия решения может иметь вид: «Форсируй планирование тех стратегий типа «продукт-рынок», при которых все обязательные факторы и по меньшей мере два необходимых соответствуют оценке «хорошо»».

Методу проверочного списка, в котором как оценки отдельных факторов, так и веса факторов и способы принятия решений имеют качественный характер, соответствует количественный двойник - метод суммарной оценки.

Конечно, с числами оперировать гораздо легче, чем с качественными оценками. Недаром математики обычно рвутся "оцифровать" качественные факторы и веса. Но при этом, как мы знаем из теории измерений (см. ниже часть 2), в окончательные выводы может быть внесен субъективизм, связанный с выбором способа "оцифровки" качественных оценок и весов.

Обратите внимание в связи со сказанным на обсуждение методов принятия решений, основанных на применении оценок экспертов (часть 3), где, в частности, даны рекомендации по снижению субъективизма в выборе весов факторов в единой суммарной оценке.

Рассмотрим условный пример по вычислению и использованию единой суммарной оценки. Пусть оценки факторов 1 и 2 для продуктов А и Б даны в табл.2 (для простоты изложения мы опускаем способы получения численных значений в табл.1 и не рассматриваем погрешности этих значений).

Для получения суммарной оценки необходимо знать веса факторов. Пусть фактор 1 оценивается экспертами как вдвое более важный, чем фактор 2. Поскольку сумма весов факторов должна составлять 1, то вес фактора 1 есть 0,67, а фактора 2 - 0,33.

Таблица 2. Метод суммарной балльной оценки

ФАКТОРЫ	продукты	
	А	Б
1	40%	90 %
2	50 %	20 %

Суммарная оценка по продукту А равна

0.67 х 40 % + 0,33 х 50 % = 26,8 % + 16,5 % = 43,3 % ,

а суммарная оценка по продукту Б равна

0.67 х 90 % + 0,33 х 20 % = 60,3 % + 6,6 % = 66,9 % .

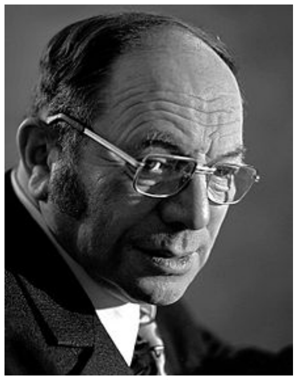
Однако получение суммарных оценок - только этап процесса принятия решений. Нужен еще критерий отбора - какими продуктами заниматься, а какими нет. Простейшая формулировка состоит в задании границы. Если суммарная оценка продукта больше этой границы, то связанная с ним работа по планированию продолжается, если же нет - он исключается из рассмотрения как малоперспективный. Если в рассматриваемом случае такая граница выбрана на уровне 55 %, то работа над продуктом А прекращается, а над продуктом Б - продолжается.

Отметим, что принятие решения на основе границы несколько снижает влияние конкретных правил оцифровки. Например, если для продукта А оценки по факторам А и Б поднимутся на 10 % и достигнут соответственно значений 50% и 60 %, то суммарная оценка окажется равной

0.67 х 50 % + 0,33 х 60 % = 33,5 % + 19,8 % = 53,3 % ,

т.е. общее решение не меняется, продукт А остается среди малоперспективных.

3) Леони́д Вита́льевич Канторо́вич (6 (19) января 1912, Санкт-Петербург — 7 апреля 1986, Москва) — советский математик и экономист, лауреат Нобелевской премии по экономике 1975 года «за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов»[1]. Пионер и один из создателей линейного программирования.



Научная работа

Первые научные результаты получены в дескриптивной теории функций и множеств и, в частности, по проективным множествам.

В функциональном анализе ввёл и изучил класс полуупорядоченных пространств (K-пространств). Выдвинул эвристический принцип, состоящий в том, что элементы K-пространств суть обобщённые числа. Этот принцип был обоснован в 1970-е годы в рамках математической логики. Методами теории неклассических (булевозначных) моделей установлено, что пространства Канторовича представляют новые нестандартные модели вещественной прямой.

Впервые применил функциональный анализ к вычислительной математике.

Развил общую теорию приближённых методов, построил эффективные методы решения операторных уравнений (в том числе метод наискорейшего спуска и метод Ньютона для таких уравнений).

В 1939-40 положил начало линейному программированию и его обобщениям.

Развил идею оптимальности в экономике. Установил взаимозависимость оптимальных цен и оптимальных производственных и управленческих решений. Каждое оптимальное решение взаимосвязано с оптимальной системой цен.

Канторович — представитель петербургской математической школы П. Л. Чебышёва, ученик Г. М. Фихтенгольца и В. И. Смирнова. Канторович разделял и развивал взгляды П. Л. Чебышева на математику как на единую дисциплину, все разделы которой взаимосвязаны, взаимозависимы и играют особую роль в развитии науки, техники, технологии и производства. Канторович выдвигал тезис взаимопроникновения математики и экономики и стремился к синтезу гуманитарных и точных технологий знания. Творчество Канторовича стало образцом научного служения, базирующегося на универсализации математического мышления.

Биография

Леонид Канторович родился в еврейской семье врача-венеролога Виталия Моисеевича Канторовича и Паулины (Полины) Григорьевны Закс. В 1926 году в возрасте четырнадцати лет поступил в Ленинградский университет.

Окончил математический факультет (1930), учился в аспирантуре университета, с 1932 года преподаватель, в 1934 году стал профессором (в 22 года), в 1935 году ему присвоена учёная степень доктора физико-математических наук без защиты диссертации.

В 1938 году Канторович женился на Наталье Ильиной, враче по профессии (двое детей — сын и дочь).

В 1938 году консультировал фанерный трест по проблеме эффективного использования лущильных станков. Канторович понял, что дело сводится к задаче максимизации линейной формы многих переменных при наличии большого числа ограничений в форме линейных равенств и неравенств. Он модифицировал метод разрешающих множителей Лагранжа для её решения и понял, что к такого рода задачам сводится колоссальное количество проблем экономики. В 1939 году опубликовал работу «Математические методы организации и планирования производства», в которой описал задачи экономики, поддающиеся открытому им математическому методу и тем самым заложил основы линейного программирования.

После 1939 года Канторович согласился заведовать кафедрой математики Военного инженерно-технического университета. Канторович участник обороны Ленинграда. В годы войны преподавал в ВИТУ ВМФ, после войны возглавлял отдел в Институте математики и механики ЛГУ.

В середине 1948 года по распоряжению И. В. Сталина расчётная группа Канторовича была подключена к разработке ядерного оружия. В 1949 году стал лауреатом Сталинской премии «за работы по функциональному анализу».

28 марта 1958 года избран членом-корреспондентом АН СССР (экономика и статистика). С 1958 года возглавлял кафедру вычислительной математики. Одновременно возглавлял отдел приближённых вычислений Ленинградского отделения Математического института им. Стеклова.

Был среди учёных первого призыва Сибирского отделения АН СССР. С 1960 года жил в Новосибирске, где создал и возглавил Математико-экономическое отделение Института математики СО АН СССР и кафедру вычислительной математики Новосибирского университета.

26 июня 1964 года избран академиком АН СССР (математика). За разработку метода линейного программирования и экономических моделей удостоен в 1965 году вместе с академиком В. С. Немчиновым и профессором В. В. Новожиловым Ленинской премии.

С 1971 года работал в Москве, в Институте управления народным хозяйством Государственного комитета Совета Министров СССР по науке и технике.

1975 год — Нобелевская премия по экономике (совместно с Т. Купмансом «за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов»). С 1976 работал во ВНИИСИ ГКНТ и АН СССР, ныне Институт системного анализа РАН.

Настойчиво преследовался за «антинаучные» математико-экономические методы, «вражебные» социалистическим народному хозяйству и экономической науке. Главным его преследователем был глава секции экономики в президиуме АН СССР, академик Островитянов.[источник не указан 20 дней]

Умер в Москве 7 апреля 1986 года, похоронен на Новодевичьем кладбище.

Награждён 2 орденами Ленина (1967, 1982), 3 орденами Трудового Красного Знамени (1949, 1953, 1975), орденом Отечественной войны 1-й степени (1985), орденом «Знак Почёта» (1944). Почётный доктор многих университетов мира.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Контрольная работа № 2 включает четыре задания.

Задание №1. Составить математическую модель задачи и решить ее симплекс-методом.

На предприятии в процессе производства используется три технологических способа I, II и III. При этом расходуются сырье, трудовые ресурсы и учитываются накладные расходы. Известны удельные затраты a_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3) каждого ресурса, запасы ресурсов b_i (i = 1, 2, 3), удельная прибыль c_j (j = 1, 2, 3) и удельное потребление воды d_j (j = 1, 2, 3) при использовании каждого технологического способа. Условия производства требуют, чтобы трудовые ресурсы были использованы полностью, а накладные расходы были бы не меньше b_3. Под удельными затратами и удельной прибылью понимают затраты и прибыль при единичной интенсивности соответствующего технологического способа.

Условие задачи можно кратко записать в виде таблицы 2.

Таблица 2 – Условие задачи

Виды ресурсов	Технологические способы			Запасы ресурсов
	I	II	III	
Сырье	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
Трудовые ресурсы	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
Накладные расходы	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
Прибыль	c_1	c_2	c_3	
Расход воды	d_1	d_2	d_3	

Для вариантов 1-14 требуется составить план использования технологических способов в производстве, обеспечивающий максимальную прибыль, а для вариантов 15-27 требуется при тех же условиях составить план, обеспечивающий минимальное потребление воды. Составить план использования технологических способов – это значит найти интенсивность применения каждого технологического способа (в безразмерных единицах).

В таблице 3 приведены исходные данные для решения задачи.

Таблица 3 – Исходные данные для решения задачи

Вариант	Исходные данные																
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	d_1	d_2	d_3
1	2	3	2	1	1	1	5	4	9	210	60	125	14	12	1	–	–	–
2	12	25	18	10	14	4	6	9	9	678	180	90	13	10	17	–	–	–
3	5	4	3	3	7	6	1	1	1	89	66	18	15	11	12	–	–	–
4	7	5	4	4	10	8	1	1	1	104	138	15	14	27	19	–	–	–
5	3	2	1	1	1	2	7	9	5	26	12	25	20	15	18	–	–	–
6	1	1,5	1	2	2	2	10	8	18	105	120	250	20	15	25	–	–	–
7	6	12,5	6	5	7	2	2	3	3	339	90	30	12	35	15	–	–	–
8	5	5	5	3	7	6	1	1	1	90	51	15	11	10	10	–	–	–
9	7	6	4	5	3	6	1	1	1	104	66	15	11	10	9	–	–	–
10	3	2	1	1	1	2	7	9	5	26	11	32	2	4	1	–	–	–
11	5	2	4	1	3	2	4	8	5	35	15	28	11	12	10	–	–	–
12	5	4	6	12	18	20	6	2	3	95	102	44	2	1	1,5	–	–	–
13	7	4	6	8	12	9	2	6	6	80	144	36	2	1	4	–	–	–
14	32	4	2	3	9	5	2	4	12	376	156	70	1	3	5	–	–	–
15	4	8	6	8	12	9	3	6	12	196	312	140	–	–	–	3	4	4
16	5	2	4	1	3	2	4	8	5	36	15	28	–	–	–	5	8	4
17	5	4	6	2	8	2	6	2	3	75	94	50	–	–	–	10	14	10
18	7	4	6	8	12	19	2	6	6	82	147	36	–	–	–	14	13	15
19	1	2	6	6	8	10	6	2	1	42	136	88	–	–	–	3	6	7
20	1	2	4	8	12	9	2	4	3	52	207	60	–	–	–	5	8	6
21	2	3	2	1	1	1	5	4	9	180	60	140	–	–	–	14	12	1
22	12	25	18	10	14	4	6	9	9	400	150	90	–	–	–	13	10	17
23	5	4	3	3	7	6	1	1	1	90	30	18	–	–	–	15	11	12
24	7	5	4	4	10	8	1	1	1	104	138	15	–	–	–	14	30	20
25	3	2	1	1	1	2	7	9	5	26	12	25	–	–	–	20	15	18
26	1	1,5	1	2	2	2	10	8	18	105	120	250	–	–	–	20	15	25
27	6	12,5	6	5	7	2	2	3	3	350	90	30	–	–	–	12	35	15
28	5	9	–	3	3	–	2	1	–	45	19	10	5	6	–	–	–	–

Задание №2. Решить транспортную задачу. Заданы мощности поставщиков a_i (i = 1, 2, 3), емкости потребителей b_j (j =1, 2, 3) и матрица стоимостей перевозок единицы продукции от каждого поставщика каждому потребителю. Требуется найти план перевозок, при котором суммарные транспортные затраты будут наименьшими.

1

b_j / a_i	16	20	35
15	6	7	5
8	5	6	4
20	9	10	6

2

b_j / a_i	19	31	10
20	5	8	3
10	2	4	2
12	7	6	3

3

b_j / a_i	20	18	17
30	9	7	4
15	5	3	2
45	10	8	5

4

b_j / a_i	17	13	25
20	8	3	6
15	4	2	5
30	9	4	7

5

b_j / a_i	14	20	30
25	4	5	9
10	2	3	3
12	4	6	8

6

b_j / a_i	17	21	8
24	5	7	4
16	4	8	3
20	6	9	4

15

b_j / a_i	20	12	37
15	5	3	7
10	3	2	3
24	6	4	8

16

b_j / a_i	9	31	20
20	3	9	8
14	4	6	7
12	2	4	5

17

b_j / a_i	20	14	16
30	5	2	6
15	2	1	3
25	4	2	8

18

b_j / a_i	21	30	32
16	5	9	7
32	4	6	5
20	3	5	4

19

b_j / a_i	20	12	8
22	7	6	3
18	8	4	2
16	2	3	1

20

b_j / a_i	12	19	9
18	5	8	2
22	8	9	4
15	6	7	3

7

a_i \ b_j	10	7	18
15	6	3	7
18	4	2	9
12	5	3	8

8

a_i \ b_j	20	10	30
35	6	3	7
15	3	2	4
20	5	4	8

9

a_i \ b_j	20	12	8
22	7	6	3
18	8	4	2
16	2	3	1

10

a_i \ b_j	20	12	8
22	7	6	3
18	8	4	2
16	2	3	1

11

a_i \ b_j	18	40	12
32	9	8	4
15	8	7	3
7	4	3	2

12

a_i \ b_j	12	19	9
18	5	8	2
22	8	9	4
15	6	7	3

13

a_i \ b_j	40	12	20
17	8	4	9
30	6	3	7
15	5	2	4

21

a_i \ b_j	17	13	25
20	8	3	6
15	4	2	5
30	9	4	7

22

a_i \ b_j	19	31	10
20	5	8	3
10	2	4	2
12	7	6	3

23

a_i \ b_j	14	20	30
25	4	5	9
10	2	3	3
12	4	6	8

24

a_i \ b_j	20	12	36
15	5	3	7
10	3	1	3
24	6	4	8

25

a_i \ b_j	17	21	8
24	5	7	4
16	4	8	3
20	6	9	4

26

a_i \ b_j	9	31	20
20	3	9	6
14	4	6	7
12	2	4	5

27

a_i \ b_j	16	20	35
15	6	7	5
8	5	6	4
20	9	10	6

14

b_j / a_i	25	19	21
40	5	3	6
17	2	1	2
23	7	4	8

28

b_j / a_i	20	10	30
25	9	4	7
15	5	3	6
35	6	5	8

Задание №3. Найти оптимальные стратегии и цену игры для игр, заданных платежными матрицами A и B. Сделать проверку.

1 $$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 6 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

2 $$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 5 \\ 6 & 8 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -3 & -2 \\ 2 & -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3 $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ -5 & 2 & 6 & -6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4 $$A = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & -5 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

5 $$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6 $$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & 6 \\ 6 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

7 $$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 6 & 7 \\ -2 & 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

8 $$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 4 & 6 \\ -3 & -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

9 $$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & -3 \\ 3 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

10 $$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \\ -3 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

11 $$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & -5 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

12 $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

13 $$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

14 $$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

15 $$A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

16 $$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

17 $$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

18 $$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -1 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 6 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

19 $$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

20 $$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

21
$$A = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

22
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

23
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 5 \\ 6 & 8 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

24
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \\ -3 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

25
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & 6 \\ 6 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

26
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & -5 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

27
$$A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

28
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Пример выполнения контрольной работы № 2

Перед выполнением контрольной работы № 2 следует познакомиться с постановкой задачи линейного программирования и различными ее формами, симплекс-методом решения этой задачи и ее графической интерпретацией, транспортной задачей и методом потенциалов решения этой задачи, а также с элементами теории матричных игр.

Задача линейного программирования

Под ***задачей линейного программирования (задачей ЛП)*** будем понимать следующую задачу.

Даны система m линейных ограничений с n неизвестными (система может содержать как уравнения, так и (или) неравенства того или иного знака)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

условие неотрицательности неизвестных

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0 \tag{2}$$

и целевая линейная функция, зависящая от n неизвестных,

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n, \tag{3}$$

где $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор неизвестных

Требуется найти такой план системы линейных ограничений (1), при котором целевая функция (3) примет наибольшее или наименьшее значение, то есть найти оптимальный план задачи (1)–(3).

Планом задачи (1)–(3) называется всякое неотрицательное решение системы линейных ограничений (1), то есть план это вектор $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий условиям (1) и (2).

План X^* называется **оптимальным планом** задачи максимизации (минимизации), если

$$f(X^*) \ge f(X) \quad \big(f(X^*) \le f(X)\big),$$

где X – любой план задачи.

Решить задачу ЛП – это значит найти ее оптимальный план и подсчитать максимальное (минимальное) значение целевой функции или убедиться в том, что оптимального плана нет.

При решении задачи ЛП возможны следующие случаи.

1) Существует оптимальный план (единственный или бесконечное множество оптимальных планов).

2) Оптимальный план не существует, так как планы в задаче есть, но на непустом множестве планов целевая функция не ограничена (сверху в задаче максимизации или снизу в задаче минимизации).

3) Оптимальный план не существует, так как в задаче вообще нет ни одного плана.

Будем рассматривать три формы задачи линейного программирования, а именно: 1) общая задача; 2) основная задача; 3) каноническая задача.

Задачу ЛП будем называть ***общей задачей***, если система линейных ограничений (1) содержит хотя бы одно неравенство, и ***основной задачей***, если все ограничения системы (1) являются уравнениями.

Задачу ЛП будем называть ***канонической задачей***, если она является частным случаем основной задачи в том смысле, что система линейных уравнений – каноническая, а целевая функция выражена только через свободные неизвестные.

Система линейных уравнений называется ***канонической системой***, если она удовлетворяет двум условиям:

1) в каждом уравнении содержится неизвестное с коэффициентом, равным единице, отсутствующее во всех остальных уравнениях и называемое базисным неизвестным;

2) свободные члены всех уравнений неотрицательны.

Неизвестные, не являющиеся базисными, *называются* ***свободными неизвестными***. При $m = 2$, $n = 4$, если предполагать базисными неизвестные x_3 и x_4, каноническую задачу можно записать в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 \qquad = b_1 \geq 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \qquad + x_4 = b_2 \geq 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (x_j = 1 \div 4), \tag{5}$$

$$f(X) = C_0 - C_1x_1 - C_2x_2 - max \ \ (min). \tag{6}$$

Если в канонической системе положить все свободные неизвестные равными нулю, то базисные неизвестные будут равны неотрицательным свободным членам уравнений. Полученный таким способом план называется ***базисным планом*** канонической задачи. При x_1=x_2=0 из системы (4) получим, что x_3=b_1≥0, x_4=b_2≥0 базисный план задачи (4)–(6) будет иметь вид X_{bas}=(0, 0, b_1, b_2), причем, как видно из выражения (6), значение целевой функции для этого плана $f(X_{bas})$=C_0.

Из трех форм задачи ЛП главная роль отводится канонической, так как алгоритм симплекс-метода непосредственно применяется к канонической задаче, а общая и основная задачи сводятся к канонической. Для того, чтобы общую задачу привести к основной, то есть неравенства заменить уравнениями, достаточно ввести неотрицательные дополнительные неизвестные, прибавив их к левым частям неравенств «типа ≤», вычитая из левых частей неравенств «типа ≥»и приписав к заданной целевой функции с нулевыми коэффициентами.

Основная задача сводится к канонической с помощью метода искусственного базиса, который будет рассмотрен ниже.

Симплекс-метод решения канонической задачи

Симплекс-метод решения канонической задачи линейного программирования называют еще методом последовательного улучшения базисного плана. Любую каноническую задачу можно поместить в так называемую ***симплексную таблицу***. Рассмотрим, как заполняется симплексная таблица задачи (4)– (6). В эту таблицу записывается расширенная матрица канонической системы (4), слева выписываются названия базисных неизвестных, содержащихся в соответствующих уравнениях. Последняя строка симплексной таблицы называется ***индексной строкой*** и заполняется коэффициентами целевой функции (6) по следующему правилу: свободный член С0 вносится со своим знаком, коэффициенты при неизвестных с противоположными знаками.

Симплексная таблица канонической задачи

Баз.	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	b_1	a_{11}	a_{12}	1	0
x_4	b_2	a_{21}	a_{22}	0	1
f	C_0	C_1	C_2	0	0

Если в задаче ЛП система уравнений каноническая, а целевая функция выражена не только через свободные неизвестные, то такую задачу будем называть «***почти канонической***». При внесении ее в симплексную таблицу индексную строку будем подсчитывать по ***правилу цен***. Это правило будет рассмотрено ниже.

Для решения канонической («почти канонической») задачи, записанной симплексную таблицу, применяется алгоритм симплекс-метода. Существуют две разновидности этого алгоритма: для задачи максимизации и для задачи минимизации. Можно использовать только одну из них, сводя каждый раз, например, задачу минимизации целевой функции $f(X)$ к задаче максимизации функции $-f(X)$, умножив все коэффициенты функции $f(X)$ на -1. Это возможно в силу линейности целевой функции. Приведем алгоритм симплекс-метода для случая задачи максимизации.

Алгоритм симплекс-метода

1) Запишем каноническую задачу максимизации (4)–(6) в исходную симплексную таблицу и проанализируем знаки элементов индексной строки, не считая элемента C_0. При этом возможны три случая.

1.1) Все элементы индексной строки неотрицательны. Следовательно, базисный план $X_{bas}=(0, 0, b_1, b_2)$ является оптимальным, а $f(X_{bas})=C_0$ есть максимальное значение целевой функции.

Вычисления прекращаем.

1.2) Среди элементов индексной строки есть хотя бы один отрицательный, а над ним в таблице нет ни одного положительного. В этом случае целевая функция не ограничена сверху на множестве планов задачи и, значит, оптимального плана не существует.

Вычисления прекращаем.

1.3) Над каждым отрицательным элементом индексной строки есть хотя бы один положительный. Это значит, что исходный базисный план можно улучшить, построив новую симплексную таблицу, содержащую новый базисный план с неменьшим значением целевой функции. Переходим к п. 2.

2) Среди отрицательных элементов индексной строки, над каждым из которых есть хотя бы один положительный, выбираем наибольший по абсолютной величине и выделяем ***ключевой столбец***, в основании которого оказался выбранный элемент. Ключевой столбец указывает

на неизвестное, вводимое в базис.

3) Подсчитываем ***ключевое отношение*** – наименьшее из отношений свободных членов уравнений только к соответствующим *положительным* элементам ключевого столбца.

4) В ключевом столбце выбираем и ***выделяем ключевой элемент*** – знаменатель ключевого отношения. Если ключевых отношений несколько, то выбираем знаменатель любого из них. Ключевой элемент указывает на неизвестное, выводимое из базиса.

5) В новой таблице выписываем слева новые базисные неизвестные.

6) Далее в новой таблице заполняем и выделяем ***ключевую строку***. Она получается делением всех элементов соответствующей строки исходной таблицы на ключевой элемент.

7) Остальные элементы новой таблицы подсчитываем ***по правилу двух перпендикуляров****:* каждый элемент новой таблицы, за исключением элементов ключевой строки, равен разности между соответствующим элементом исходной таблицы и произведением элементов, оказавшихся в основаниях перпендикуляров, опущенных из «старого» элемента на ключевой столбец и ключевую строку.

Заметим, что при выборе ключевого столбца не обязательно среди отрицательных элементов индексной строки выбирать наибольший по абсолютной величине, можно брать любой из них. Это связано с тем, что существуют лишь вероятностные оценки минимального количества

симплексных таблиц, необходимых для решения задачи. Заметим также, что ключевой элемент всегда *положителен*.

Симплекс-метод относится к числу конечных и монотонных методов, именно: через конечное число шагов либо мы получим оптимальный план, либо убедимся в неограниченности целевой функции на множестве планов задачи, причем последовательность симплексных таблиц строится так, что значения целевой функции монотонно возрастают (в задаче максимизации) или монотонно убывают (в задаче минимизации).

Пример 1. Решить симплекс-методом следующую задачу ЛП:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad + \ \ x_4 = \ 4, \\ 4x_1 \qquad + x_3 + 4x_4 = 12, \end{cases} \tag{7}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1 \div 4), \tag{8}$$

$$f(X) = 5 + 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 - max. \tag{9}$$

Задача (7)–(9) является «почти канонической», так как система уравнений (7) каноническая, хотя целевая функция (9) выражена не только через свободные неизвестные x_1 и x_4, но и через базисные x_2 и x_4, поэтому при заполнении исходной симплексной таблицы, индексную строку подсчитаем по ***правилу цен***. С этой целью в верхней части таблицы 4 выпишем все «цены», то есть коэффициенты при соответствующих неизвестных целевой функции (9), а слева от базисных неизвестных – их «цены». Тогда нулевой элемент индексной строки будет равен сумме произведений цен слева на свободные члены плюс цена наверху, остальные элементы равны суммам произведений цен слева на элементы соответствующего столбца минус цена наверху. Для индексной строки таблицы 4 получим

$$2 \cdot 4+(-3) \cdot 12+5 = -23;\ 2 \cdot 2+(-3) \cdot 4-4 = -12;\ 2 \cdot 1+(-3) \cdot 0-2 = 0;$$
$$2 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 - (-3) = 0;\ 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 - (-2) = -8.$$

Таблица 4 – Симплексная таблица для базисного плана X_1

			5	4	2	−3	−2	
		Баз.	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	
$\leftarrow$	2	x_2	4	$\boxed{\mathbf{2}}$	1	0	1	$\theta = min\left(\frac{4}{2}, \frac{12}{4}\right) =$
	−3	x_3	12	**4**	0	1	4	$= \frac{4}{2}$
		f	−23	**−12**	0	0	−8	

Таблица 5 – Симплексная таблица для базисного плана X_2

$\rightarrow$	4	x_1	**2**	**1**	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	**0**	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\theta = min\left(\frac{2}{1/2}, \frac{4}{2}\right) =$
$\leftarrow$	−3	x_3	4	0	−2	1	$\boxed{\mathbf{2}}$	$= \frac{4}{2}$
		f	1	0	6	0	**−2**	

Таблица 6 – Симплексная таблица для базисного плана X_3

	4	x_1	1	1	1	$-\frac{1}{4}$	0
$\rightarrow$	−2	x_4	**2**	**0**	**−1**	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	**1**
		f	5	0	4	1	0

Из полученной таблицы можно выписать базисный план X_1 = (0, 4, 12, 0), для которого значение целевой функции $f(X_1)$ = −23. В индексной строке таблицы 4 есть два отрицательных элемента −12 и −8, над каждым из которых имеются положительные элементы. Следовательно, план X_1 можно улучшить, построив следующую симплексную таблицу, таблицу 5. Мы выбрали −12 и выделили ключевой столбец неизвестного x_1. Это значит, что неизвестное x_1 вводится в базис. Так как ключевое отношение в таблице 4

$$\theta = min\left(\frac{4}{2}, \frac{12}{4}\right) = \frac{4}{2},$$

то в качестве ключевого элемента мы выбрали число 2. Это означает, что неизвестное x_2 выводится из базиса. Разделив все элементы первой строки таблицы 4 на ключевой элемент 2, мы заполнили и выделили ключевую строку в таблице 5. Остальные элементы таблицы 5 (элементы второй строки и индексной строки) были подсчитаны по правилу двух перпендикуляров.

<u>Вторая строка</u>

12 − 4 · 2 = 4; 4 − 4 · 1 = 0; 0 − 4 · 1/2 = −2; 1 − 4 · 0 = 1; 4 − 4 · 1/2 = 2.

<u>Индексная строка</u>

−23−(−12) · 2 = 1; −12−(−12) · 1 = 0; 0−(−12) · 1/2 = 6; 0−(−12) · 0 = 0; −8 − (−12) · 1/2 = −2.

Индексную строку таблицы 5, так же как и индексную строку таблицы 4, можно было бы подсчитать и по правилу цен, а именно:

$$4 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 + 5 = 1;\ 4 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 - 4 = 0;\ 4 \cdot 1/2 + (-3) \cdot (-2) - 2 = 6;$$
$$4 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 - (-3) = 0;\ 4 \cdot 1/2 + (-3) \cdot 2 - (-2) = -2.$$

Индексную строку каждой таблицы, начиная со второй, можно подсчитывать двумя способами: или по правилу двух перпендикуляров, или по правилу цен. Использование обоих правил способствует устранению возможных ошибок.

В таблице 5 содержится базисный план $X_2 = (2, 0, 4, 0)$, для которого $f(X_2) = 1$. Так как в индексной строке таблицы 5 есть отрицательный элемент -2, над которым имеются положительные элементы, то план еще раз можно улучшить, построив таблицу 6. В индексной строке таблицы 6 нет отрицательных элементов, следовательно, план $X_3^* = (1, 0, 0, 2)$ является оптимальным планом задачи (7)–(9), а $f(X_3^*) = 5$ есть максимальное значение целевой функции (9).

Пример 2. Решить симплекс-методом следующую задачу ЛП:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - \ \ x_3 = -2, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = \ 11, \end{cases} \tag{10}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1, 2, 3), \tag{11}$$

$$f(X) = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - max. \tag{12}$$

Задача (10)–(12) – основная, но не каноническая, так как система уравнений (10) не является канонической (свободный член первого уравнения отрицателен и ни в одном из уравнений нет базисного неизвестного).

Применим метод ***искусственного базиса***. С этой целью составим ***вспомогательную задачу***, так чтобы система уравнений оказалась канонической. Умножив обе части первого уравнения на –1 и прибавив к левым частям обоих уравнений искусственные неизвестные z_1 и z_2 , получим так называемую ***расширенную систему***. Составим ***вспомогательную функцию***, равную сумме искусственных неизвестных, и поставим своей целью минимизировать вспомогательную функцию на множестве планов расширенной системы.

Первый этап. Вспомогательная задача

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + \ x_3 + z_1 \qquad = \ \ 2, \\ \ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad + z_2 = 11, \end{cases} \tag{13}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1, 2, 3), \quad z_i \geq 0 \ \ (i = 1, 2), \tag{14}$$

$$\varphi(X) = z_1 + z_2 - min. \tag{15}$$

Вспомогательная задача является «почти канонической» поэтому решим ее при помощи стандартного алгоритма симплекс-метода. В результате получим последовательность симплексных таблиц вида

Таблица 7 – Симплексная таблица для базисного плана X_1

		0	0	0	0	1	1	
	Баз.	x_0	x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	
$\leftarrow$ 1	z_1	2	-2	$\boxed{2}$	1	1	0	
1	z_2	11	-1	**3**	-2	0	1	$\theta = min\left(\frac{2}{2}, \frac{11}{3}\right) = $ $= \frac{2}{2}$
	φ	13	-3	**5**	-1	0	0	

Таблица 8 – Симплексная таблица для базисного плана X_2

$\rightarrow$ 0	x_2	**1**	**-1**	**1**	**1/2**	**1/2**	0	
$\leftarrow$ 1	z_2	8	$\boxed{2}$	0	$-7/2$	$-3/2$	1	$\theta = \frac{8}{2}$
	φ	8	**2**	0	$-7/2$	$-3/2$	0	

Таблица 9 – Симплексная таблица для базисного плана X_3

0	x_2	5	0	1	$-5/4$	$-1/4$	1/2
$\rightarrow$ 0	x_1	**4**	**1**	**0**	**$-7/4$**	**$-3/4$**	**1/2**
	φ	0	0	0	0	-1	-1

Все элементы индексной строки таблицы 9 не положительны, следовательно, вспомогательная задача решена и получен ее оптимальный план, причем минимальное значение вспомогательной функции равно 0. Отсюда следует, что существует каноническая система, равносильная исходной системе (10), которая содержится в завершающей симплексной таблице вспомогательной задачи (13)–(15). Выписав ее из таблицы 9 и присоединив к ней заданную целевую функцию (12), получим задачу, равносильную исходной основной задаче (10)–(12), которая, как и вспомогательная задача, будет «почти канонической».

Второй этап. Задача, равносильная основной

$$\begin{cases} \qquad x_2 - \frac{5}{4}x_3 = 5, \\ x_1 \qquad - \frac{7}{4}x_3 = 4, \end{cases} \tag{16}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1, 2, 3), \tag{17}$$

$$f(X) = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - max. \tag{18}$$

Решим симплекс-методом задачу (16)–(18).

Таблица 10 – Симплексная таблица для задачи (16)–(18)

		0	2	−3	4
	Баз.	x_0	x_1	x_2	x_3
−3	x_2	5	0	1	−5/4
2	x_1	4	1	0	−7/4
	f	−7	0	0	−15/4

В индексной строке таблицы 10 есть отрицательный элемент –15/4 , а над ним в таблице нет ни одного положительного. Следовательно, в задаче (16)–(18) целевая функция не ограничена сверху на множестве планов задачи и оптимального плана не существует. Значит, не существует оптимального плана и в исходной задаче (10)–(12).

Пример 3. Решить симплекс-методом следующую задачу ЛП:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 - \ \ x_4 = \ \ 8, \\ \qquad 2x_2 + \ \ x_3 - 5x_4 = 12, \end{cases} \tag{19}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1 \div 4), \tag{20}$$

$$f(X) = 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 - min. \tag{21}$$

Основная задача (19)–(21) не является канонической, так как во втором уравнении системы (19) нет базисного неизвестного и, значит, система (19) не является канонической. Составим вспомогательную задачу, введя искусственное базисное неизвестное z_1 только во второе уравнение системы (19), так как в первом уравнении уже есть базисное неизвестное x_1.

Первый этап. Вспомогательная задача

$$
\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 8, \\ 2x_2 + x_3 - 5x_4 + z_1 = 12, \end{cases} \tag{22}
$$

$$
x_j \geq 0 \;\; (j = 1 \div 4), \;\; z_1 \geq 0, \tag{23}
$$

$$
\varphi(X) = z_1 + z_2 - min. \tag{24}
$$

Применив к задаче (22)–(24) алгоритм симплекс-метода, получим последовательность симплексных таблиц вида

Таблица 11 – Симплексная таблица для плана X_1

		0	0	0	0	0	1
	Баз.	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	z_1
← 0	x_1	8	1	$\boxed{4}$	3	−1	0
1	z_1	12	0	**2**	1	−5	1
	φ	12	0	**2**	1	−5	0

$\theta = min\left(\frac{8}{4}, \frac{12}{2}\right) = \frac{8}{4}$

Таблица 12 – Симплексная таблица для плана X_2

→ 0	x_2	**2**	**1/4**	**1**	**3/4**	**−1/4**	**0**
1	z_1	8	−1/2	0	−1/2	−9/2	1
	φ	8	−1/2	0	−1/2	−9/2	0

Из индексной строки таблицы 12 видим, что вспомогательная задача (22)–(24) решена, причём минимальное значение вспомогательной функции (24) φ_{min}= 8 > 0. Так как φ_{min} > 0, то можно сделать вывод, что исходная основная задача (19)–(21) вообще не имеет ни одного плана, и для неё не существует равносильной канонической задачи. В таком случае задача (19)–(21) не имеет оптимального плана.

Пример 4 (для варианта 28). Составить математическую модель, решить полученную задачу ЛП двумя способами: симплекс-методом и графически.

На предприятии в процессе производства используется два технологических способа I и II. При этом расходуются сырье и трудовые ресурсы. Известны удельные затраты в a_{ij} (i = 1, 2; j = 1, 2) каждого ресурса, запасы ресурсов b_i (i = 1, 2) в количестве 45 ед., 19 ед. и 10 ед. и удельная прибыль c_j (j = 1, 2) при использовании каждого технологического способа. Под удельными затратами и удельной прибылью понимают затраты и прибыль при единичной интенсивности соответствующего технологического способа. Требуется составить план использования технологических способов в производстве, обеспечивающий максимальную прибыль. Составить план использования технологических способов – это значит найти интенсивность применения каждого технологического способа (в безразмерных единицах). Исходные данные содержатся в таблице 13.

Таблица 13 – Исходные данные для решения задачи (пример 4)

Виды ресурсов	Технологические способы		Запасы ресурсов
	I	II	
Сырье первого вида	5	9	45
Сырье второго вида	3	3	19
Трудовые ресурсы	2	1	10
Прибыль	5	6	

Обозначим через x_1 интенсивность применения первого технологического способа, через x_2 – второго. Тогда при использовании первого технологического способа в производстве будет израсходовано $5x_1+9x_2$ ед. сырья первого вида, $3x_1+3x_2$ ед. сырья второго вида и $2x_1 + x_2$ ед. трудовых ресурсов. Суммарная прибыль составит $5x_1 + 6x_2$ денежных единиц. Так как нельзя израсходовать сырья больше, чем имеется, а суммарная прибыль зависит от количества выпущенной продукции, то получим следующую математическую модель данной задачи.

Математическая модель

$$\begin{cases} 5x_1 + 9x_2 \le 45, \\ 3x_1 + 3x_2 \le 19, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{cases} \tag{26}$$

$$x_1 \ge 0 \ \ x_2 \ge 0, \tag{27}$$

$$f(X) = 5x_1 + 6x_2 - max. \tag{28}$$

Задача (26)–(28) является общей задачей, так как система ограничений (26) состоит из неравенств. Введя дополнительные неизвестные $x_3 \ge 0$; $x_4 \ge 0$; $x_5 \ge 0$ и прибавив их к левым частям неравенств (26), получим основную задачу вида

$$\begin{cases} 5x_1 + 9x_2 + x_3 = 45, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_4 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 10, \end{cases} \tag{29}$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j = 1 \div 5), \tag{30}$$

$$f(X) = 5x_1 + 6x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - max. \tag{31}$$

Основная задача (29)–(31) является канонической и легко решается симплекс-методом. Предлагается решить ее самостоятельно. Приведем только ответ, а именно: X^*=(3,10/3,0,0,2/3) – оптимальный план основной задачи (29)–(31), $f(X^*)$ = 35 – максимальное значение целевой функции (31).

Отбросив значения дополнительных неизвестных, получим оптимальный план X^*= (3, 10/3) общей задачи (26)–(28), причем максимальное значение целевой функции $f(X^*)$ = 35 останется тем же.

Таким образом, для того, чтобы получить максимальную прибыль, равную 35 ед., следует применять первый технологический способ с интенсивностью 3 ед. и второй технологический способ с интенсивностью 10/3≈3,3 ед. Значения дополнительных неизвестных $x_3^*=x_4^*=0$, $x_5^*=2/3$ показывают, что сырье первого и второго вида используется полностью, трудовые ресурсы – не полностью.

Общая задача (26)–(28) содержит два неизвестных и поэтому может быть решена графически.

Графическое решение задачи

Введем систему декартовых координат на плоскости $x_1 0 x_2$ и построим множество планов задачи (26)–(28). Каждое линейное неравенство системы (26) определяет полуплоскость по одну сторону от граничной прямой, заданной соответствующим равенством. Множество планов задачи есть пересечение полуплоскостей, представляющее собой выпуклый многоугольник или выпуклую незамкнутую многоугольную область.

Построим каждую из граничных прямых по двум точкам, как показано на рисунке 1.

$$\begin{array}{lllll} (1) & 5x_1 + 9x_2 = 45: & (9,\ 0), & (0,\ 5); \\ (2) & 3x_1 + 3x_2 = 19: & (6{,}3;\ 0), & (0;\ 6{,}3); \\ (3) & 2x_1 + x_2 = 10: & (5,\ 0), & (0,\ 10). \end{array}$$

Направление полуплоскости можно определить по одной точке, принадлежащей ей, например, точке O(0; 0): Если граничная прямая проходит через начало координат, то удобно проверять какую-либо точку, лежащую на одной из осей. В нашем случае при $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ неравенства системы (26) превращаются в верные числовые неравенства: $0 < 45$, $0 < 19$, $0 < 10$. Следовательно, все три полуплоскости содержат точку O(0; 0); то есть обращены к началу координат. На рисунке 1 это показано стрелками около каждой граничной прямой.

Так как $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; то множество планов задачи (26)–(28) представляет собой общую часть трех полуплоскостей, попавшую в первую координатную четверть, то есть выпуклый пятиугольник (на рисунке 1 он закрашен). Целевую функцию $f(X) = 5x_1+6x_2$ можно изобразить на плоскости в виде сетки параллельных прямых. Однако, достаточно построить одну прямую, соответствующую какому-либо значению функции, например, $f(X) = 18$. Эта прямая пройдет через точки (3;6; 0) и (0; 3). На рисунке 1 она показана пунктиром. Далее передвигаем эту прямую параллельно самой себе в направлении от начала координат (в этом направлении целевая функция возрастает), пока она не встретит последнюю на своем пути точку области планов. Ее координаты найдем из системы уравнений прямых (1) и (2), пересекающихся в этой точке:

$$\begin{cases} 5x_1 + 9x_2 = 45, \\ 3x_1 + 3x_2 = 19. \end{cases} \qquad (32)$$

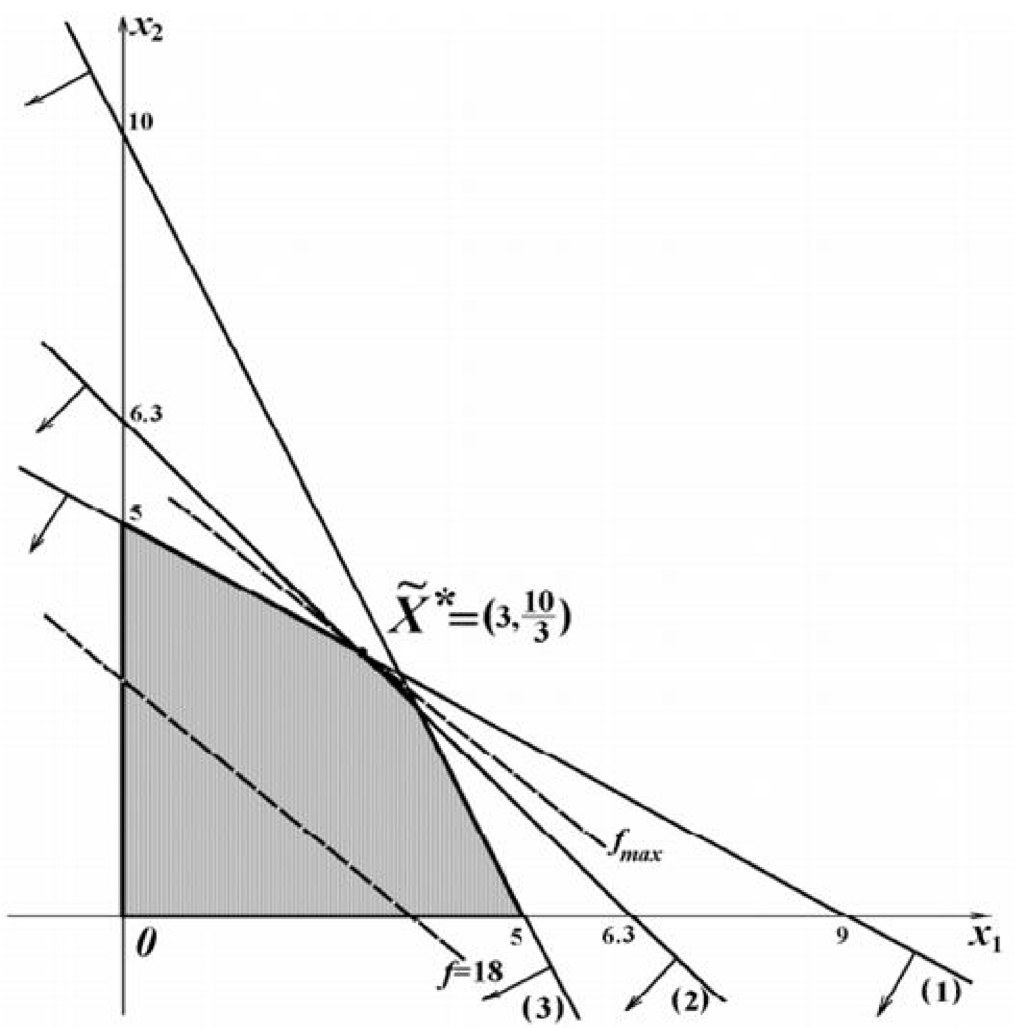


Рисунок 1 – Иллюстрация графического способа решения задачи

Решив систему уравнений (32), получим $x_1 = 3$, $x_2 = 10/3$. Значит, $X^{*}=(3,10/3)$ – оптимальный план задачи (26)–(28), $f(X^{*}) = 5\cdot3+6\cdot(10/3) = 35$ – максимальное значение целевой функции (28).

Как видим, ответы, полученные симплекс-методом и графически, оказались одинаковыми.

Транспортная задача

Под транспортной задачей в линейном программировании понимают задачу распределения грузов, имеющихся у поставщиков, между потребителями, мощности и емкости которых известны, с целью минимизации суммарных транспортных издержек.

<u>*Постановка задачи*</u>: Пусть имеется *m* поставщиков и *n* потребителей некоторой однородной продукции. Известны мощности поставщиков – числа $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots m)$, емкости потребителей – числа $b_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots n)$ и числа

$c_{ij} \geq 0$ ($i = 1,2,\ldots\ m$; $j = 1, 2,\ldots\ n$) – стоимости перевозки единицы продукции от каждого поставщика каждому потребителю.

Требуется найти план перевозок, то есть указать, сколько единиц продукции каждый поставщик должен доставить каждому потребителю, чтобы суммарная стоимость перевозок была наименьшей.

Если суммарная мощность поставщиков равна суммарной емкости потребителей, то есть

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

то модель транспортной задачи называется закрытой, в противном случае – ***открытой***.

Условия транспортной задачи можно представить в виде следующей таблицы.

a_i \ b_j	b_1	b_2	$\ldots$	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	$\ldots$	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	$\ldots$	c_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_m	c_{m1}	c_{m2}	$\ldots$	c_{mn}

(33)

Приведем математическую модель закрытой транспортной задачи. Пусть x_{ij} ($i = 1,2,\ldots m$; $j = 1, 2,\ldots\ n$) — количество единиц продукции, перевозимой от i-го поставщика j-му потребителю. Тогда план перевозок можно представить в виде матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix} \tag{34}$$

Математическая модель

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m; \\ x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n; \end{cases} \tag{35}$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_n; \tag{36}$$

$$x_{ij} \geq 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n); \tag{37}$$

$$\begin{aligned} f(X) = \; & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} - min. \end{aligned} \tag{38}$$

В системе (35) первые m уравнений учитывают продукцию, вывозимую от поставщиков, последние n — продукцию, доставляемую потребителям. Условие (36) означает, что модель транспортной задачи — закрытая. Целевая функция (38) выражает суммарную стоимость перевозок.

Задача ЛП (35)–(38) является основной, и ее можно было бы решить симплекс-методом. Однако, существуют другие, более экономные, методы решения транспортной задачи, связанные с особенностями матрицы системы (35). Одним из таких методов является метод потенциалов. В его основе лежит критерий оптимальности плана перевозок, полученный в результате применения к транспортной задаче теории двойственности.

Критерий оптимальности плана перевозок. *Для того, чтобы план перевозок* $X^*=(x_{ij}^*)_{i=1,m, \ j=1,n}$ *был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы существовали числа*

$u_1, u_2, \ldots u_m$ *— потенциалы поставщиков,*

$v_1, v_2, \ldots v_n$ *— потенциалы потребителей,*

удовлетворяющие двум условиям:

1^0. $u_i + v_j \leq c_{ij}$ *для всех* $i = 1,2,\ldots m; j = 1,2,\ldots n;$

2^0. *если* $x_{ij} > 0;$ *то* $u_i + v_j = c_{ij}.$

Метод потенциалов так же, как и симплекс-метод, относится к группе методов последовательного улучшения плана. Приведем краткое описание алгоритма метода потенциалов, а более подробно рассмотрим его на примере.

Алгоритм метода потенциалов

1) Построение исходного плана перевозок каким-либо из методов («северо-западного угла» или наименьшей стоимости).

2) Проверка построенного плана на оптимальность при помощи критерия оптимальности плана перевозок.

3) Улучшение плана, то есть построение нового плана перевозок с меньшей (или равной) стоимостью перевозок.

Алгоритм метода потенциалов непосредственно применяется к закрытой транспортной задаче. Любую открытую задачу можно преобразовать в закрытую путем введения фиктивного поставщика, если суммарная мощность поставщиков меньше суммарной емкости потребителей, или фиктивного потребителя в противном случае.

Пример 5 (для варианта 28). Пусть имеется три поставщика и три потребителя некоторой однородной продукции. Мощности поставщиков, емкости потребителей и стоимости перевозки единицы продукции от каждого поставщика каждому потребителю заданы в следующей таблице.

b_j / a_i	20	10	30
25	9	4	7
15	5	3	6
35	6	5	8

(39)

Требуется найти такой план перевозок, при котором суммарная стоимость перевозок будет наименьшей.

Прежде всего, подсчитаем суммарную мощность поставщиков и суммарную емкость потребителей:

$a_1 + a_2 + a_3 = 25 + 15 + 35 = 75;$

$b_1 + b_2 + b_3 = 20 + 10 + 30 = 60:$

Так как $a_1 + a_2 + a_3 > b_1 + b_2 + b_3$; то задача (39) является открытой моделью транспортной задачи и для сведения ее к закрытой модели введем фиктивного потребителя с емкостью

$$b = (a_1 + a_2 + a_3) – (b_1 + b_2 + b_3) = 75 – 60 = 15.$$

Стоимости перевозки единицы продукции от каждого поставщика фиктивному потребителю положим равными нулю. В результате получим закрытую модель транспортной задачи, условия которой содержатся в следующей таблице.

b_j / a_i	20	10	30	15
25	9	4	7	0
15	5	3	6	0
35	6	5	8	0

(40)

Решим полученную закрытую модель транспортной задачи (40) методом потенциалов с помощью описанного выше алгоритма.

Составим исходный план перевозок X_1 методом «северо-западного угла», распределяя мощности поставщиков по порядку между потребителями, так чтобы каждая перевозка была максимально возможной. У 1-го поставщика имеется 25 ед. продукции, а 1-му потребителю нужно 20 ед., следовательно, самое большее, ему можно направить 20 ед., то есть положим $x_{11} = 20$. Оставшиеся у первого поставщика 5 ед. направим 2-му потребителю, то есть положим $x_{12} = 5$. Недостающие 2-му потребителю 5 ед. направим ему от 2-го поставщика, то есть $x_{22} = 5$. Аналогично положим $x_{23} = 10$, $x_{33} = 20$, $x_{34} = 15$. Остальные перевозки, очевидно равны нулю.

План перевозок оформим в виде таблицы, разделенной на клетки. В центре каждой клетки плана поместим перевозки x_{ij}, а в правом верхнем углу-стоимости перевозки единицы продукции c_{ij} ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$). В клетки, соответствующие нулевым перевозкам, нули не вписываем, оставляя их пустыми. В таком случае план X_1 будет иметь вид

$$X_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|l}
\hline
20\ ^{9} & 5\ ^{4} & \ ^{7} & \ ^{0} & u_1 = 0 \\
\hline
\ ^{5} & 5\ ^{3} & 10\ ^{6} & \ ^{0} & u_2 = -1 \\
\hline
\ ^{6} & \ ^{5} & 20\ ^{8} & 15\ ^{0} & u_3 = 1 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{v_1 = 9} & \multicolumn{1}{c}{v_2 = 4} & \multicolumn{1}{c}{v_3 = 7} & \multicolumn{1}{c}{v_4 = -1} &
\end{array}$$

При описанном выше способе распределения продукции план X_1 будет содержать не больше, чем $m+n-1$ положительных перевозок или занятых клеток, где m – число поставщиков, n – число потребителей. Остальные компоненты плана X_1, соответствующие нулевым перевозкам, будем называть

свободными клетками. Если число занятых клеток $k = m+n-1$, то план перевозок называется ***невырожденным***, если $k < m+ n - 1$, то ***– вырожденным***.

Для плана X_1 имеем: $k = 6$; $m+n-1 = 6$ и, значит, $k = m+n-1$. Следовательно, план X_1 является невырожденным. Заметим, что если план перевозок окажется вырожденным, то следует часть свободных клеток условно считать занятыми, записав в них нули, так чтобы общее число занятых клеток было равно $m+n-1$. В дальнейшем с этими нулями следует «обращаться» так же, как и с положительными перевозками.

Подсчитаем суммарную стоимость перевозок по плану X_1:

$f(X_1) = 9·20+4·5+3·5+6·10+8·20+0·15 = 180+20+15+60+160 = 435.$

Проверим план X_1 на оптимальность. Найдем потенциалы u_1, u_2, u_3 поставщиков и потенциалы v_1; v_2; v_3; v_4 потребителей, так чтобы выполнялись условия 1^0 и 2^0 критерия оптимальности плана перевозок.

По условию 2^0 для занятых клеток:

$$\begin{array}{lll} u_1 + v_1 = 9, & u_2 + v_2 = 3, & u_3 + v_3 = 8, \\ u_1 + v_2 = 4, & u_2 + v_3 = 6, & u_3 + v_4 = 0. \end{array} \tag{41}$$

Один из потенциалов всегда задается произвольно, например, зададим $u_1 = 0$. Тогда из системы (41) получим $v_1 = 9$, $v_2 = 4$, $u_2 = 1$, $v_3 = 7$, $u_3 = 1$, $v_4 = 1$. Эти потенциалы полезно записать справа и снизу от плана X_1.

По условию 1^0 для свободных клеток:

$$\begin{array}{lll} u_1 + v_3 \le 7, & u_2 + v_1 \le 5, & u_3 + v_1 \le 6, \\ u_1 + v_4 \le 0, & u_2 + v_4 \le 0, & u_3 + v_1 \le 5. \end{array} \tag{42}$$

Подставив потенциалы, найденные из уравнений (41), в неравенства (42), получим

$$\begin{array}{lll} 0 + 7 = \quad 7 = 7, & \underline{-1 + 9 = \quad 8 > 5}, & \underline{1 + 9 = 10 > 6}, \\ 0 - 1 = -1 < 0, & -1 - 1 = -2 < 0, & 1 + 4 = \quad 5 = 5. \end{array} \tag{43}$$

Мы видим, что не выполняются два неравенства системы (43),

Причем

$$\begin{array}{l} \Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 5 - \quad 8 = -3, \\ \Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 6 - 10 = -4. \end{array}$$

Следовательно, план X_1 можно улучшить, введя в план перевозку $x_{31} = \theta$, для которой разность Δ_{31} оказалась меньше разности Δ_{21}. С этой целью составим так называемый ***цикл***, имеющий начало *в свободной клетке* (3, 1), а остальные вершины – *в занятых клетках,* последовательно увеличивая и уменьшая перевозки, попавшие в цикл, на величину θ. В результате получим план $X_2(\theta)$.

$X_2(\theta) =$

^{9} $20-\theta$	^{4} $5+\theta$	^{7}	^{0}
^{5}	^{3} $5-\theta$	^{6} $10+\theta$	^{0}
^{6} $+\theta$	^{5}	^{8} $20-\theta$	^{0} 15

Важно отметить, что при составлении цикла следует двигаться только по горизонтали или вертикали, так чтобы в каждую строку и каждый столбец плана перевозок, охваченных циклом, попали только *две* перевозки.

Выберем θ = min(20, 5,20) = 5, то есть в качестве θ выбирается наименьшая из перевозок, из которых θ вычитается. При включении в план X_1 перевозки θ = 5 суммарная стоимость перевозок изменится на $\Delta f(X_1) = \Delta_{31} \cdot \theta = -4 \cdot 5 = 20$, то есть уменьшится на 20 ед. и для нового плана X_2 составит

$$f(X_2) = f(X_1) + \Delta f(X_1) = 435 - 20 = 415.$$

Пересчитав перевозки, вошедшие в цикл плана $X_2(\theta)$, при θ = 5,получим новый план перевозок X_2.

$X_2 =$

^{9} 15	^{4} 10	^{7}	^{0}	$u_1 = 0$
^{5}	^{3}	^{6} 15	^{0}	$u_2 = -5$
^{6} 5	^{5}	^{8} 15	^{0} 15	$u_3 = -3$
$v_1 = 9$	$v_2 = 4$	$v_3 = 11$	$v_4 = 3$	

План X_2 лучше плана X_1, так как стоимость перевозок $f(X_2)$ =415 по плану X_2 оказалась меньше стоимости перевозок $f(X_1)$ = 435 по плану X_1.

Проверим на оптимальность план X_2. Для этого составим систему уравнений для занятых клеток плана X_2.

$$\begin{array}{lll} u_1 + v_1 = 9, & u_2 + v_3 = 6, & u_3 + v_3 = 8, \\ u_1 + v_2 = 4, & u_3 + v_1 = 6, & u_3 + v_4 = 0. \end{array} \qquad (44)$$

Из системы (44) при $u_1 = 0$ получим, что $v_1 = 9$, $v_2 = 4$, $u_3 = -3$, $v_3 = 11$, $v_4 = 3$, $u_2 = -5$.

Проверим выполнение неравенств для свободных клеток плана X_2.

$$\begin{array}{ll} \underline{u_1 + v_3 = \quad 0 + 11 = 11 > 7,} & u_2 + v_2 = -5 + 4 = -1 < 3, \\ \underline{u_1 + v_4 = \quad 0 + \;\; 3 = \;\; 3 > 0,} & u_2 + v_4 = -5 + 3 = -2 < 0, \\ u_2 + v_1 = -5 + \;\; 9 = \;\; 4 < 5, & u_3 + v_2 = -3 + 4 = \;\; 1 < 5. \end{array} \qquad (45)$$

Не выполняются два неравенства системы (45), причем

Δ_{13}= 7 – 11 = 4, Δ_{14} = 0 – 3 = 3.

Следовательно, план X_2 можно улучшить, введя в план перевозку x_{13} = θ. Составив цикл для свободной клетки (1, 3), получим план X_3(θ). Выбрав θ = min(15, 15) = 15, получим

$$\Delta\ f(X_2) = \Delta_{13}\cdot\ \theta = -\ 4\ \cdot 15 = 60,$$

и стоимость перевозок для нового плана X_3 составит

$$f(X_3) = f(X_2) + \Delta\ f(X_2) = 415 - 60 = 355.$$

$X_3(\theta) =$

$15-\theta$ ^{9}	10 ^{4}	$+\theta$ ^{7}	^{0}
^{5}	^{3}	15 ^{6}	^{0}
$5+\theta$ ^{6}	^{5}	$15-\theta$ ^{8}	15 ^{0}

При θ = 15 план X_3(θ) преобразуется в новый план X_3. Так как θ совпадает с двумя перевозками, а только одна из занятых клеток должна перейти в число свободных, то в клетку (3, 3) записываем ноль и считаем ее занятой.

$X_3 =$

^{9}	10 ^{4}	15 ^{7}	^{0}	$u_1 = 0$
^{5}	^{3}	15 ^{6}	^{0}	$u_2 = -1$
20 ^{6}	^{5}	0 ^{8}	15 ^{0}	$u_3 = 1$
$v_1 = 5$	$v_2 = 4$	$v_3 = 7$	$v_4 = -1$	

Для занятых клеток плана X_3:

$$\begin{array}{lll} u_1 + v_2 = 4, & u_2 + v_3 = 6, & u_3 + v_3 = 8, \\ u_1 + v_3 = 7, & u_3 + v_1 = 6, & u_3 + v_4 = 0, \end{array} \qquad (46)$$

откуда при $u_1 = 0$ получим $v_2 = 4$; $v_3 = 7$; $u_2 = 1$; $u_3 =1$; $v_1 = 5$; $v_4 = 1$.

Для свободных клеток плана X_3:

$$
\begin{array}{llll}
u_1+v_1 = \;\;\; 0+5 = \;\;\; 5<9, & u_2+v_2 = -1+4 = \;\;\; 3=3, \\
u_1+v_4 = \;\;\; 0-1 = -1<0, & u_2+v_4 = -1-1 = -2<0, \\
u_2+v_1 = -1+5 = \;\;\; 4<5, & u_3+v_2 = \;\;\; 1+4 = \;\;\; 5=5.
\end{array} \tag{47}
$$

Из уравнений (46) и неравенств (47) следует, что выполняются оба условия 1^0 и 2^0 критерия оптимальности плана перевозок. Следовательно, план перевозок X_3 является оптимальным планом закрытой задачи (40), а $f(X_3) = 355$ представляет собой наименьшую стоимость перевозок. Отбросив последний столбец плана X_3, получим оптимальный план X^* исходной открытой задачи (39), для которого $f(X^*) = 355$ есть наименьшая стоимость перевозок.

Отброшенный столбец означает, что первые два поставщика вывезут всю имеющуюся у них продукцию, а у третьего поставщика останутся не вывезенными 15 ед. продукции.

$X^* =$

^{9}	10 ^{4}	15 ^{7}
^{5}	^{3}	15 ^{6}
20 ^{6}	^{5}	0 ^{8}

В закрытой транспортной задаче (40) исходный план перевозок можно было составить не только методом «северо-западного угла» но и методом наименьшей стоимости. При использовании этого метода распределение перевозок начинается с клетки, имеющей наименьшую стоимость, затем выбирается клетка с наименьшей из оставшихся стоимостей и т. д., причем на каждом шаге по-прежнему каждая перевозка выбирается максимально возможной. В задаче (40) распределение перевозок полезно начать с клетки (2, 2), имеющей наименьшую стоимость перевозок, равную 3 (нулевые стоимости последнего столбца не учитываются), положив $x_{22} = 10$. Далее, выбрав наименьшую из оставшихся стоимость, равную 5, положим $x_{21} = 5$, затем $x_{31}=15$, $x_{13} = 25$, $x_{33} = 5$; $x_{34} = 15$, в результате чего получим исходный план перевозок $\widetilde{X}_1$, для которого

$$f(\widetilde{X}_1) = 7\cdot 25 + 5\cdot 5 + 3\cdot 10 + 6\cdot 15 + 8\cdot 5 = 360$$

это меньше, чем стоимость $f(X_1) = 435$ для исходного плана X_1, построенного методом «северо-западного угла».

$\widetilde{X}_1 =$

9	4	7 25	0
5 5	3 10	6	0
6 15	5	8 5	0 15

Предлагается самостоятельно проверить на оптимальность план $\widetilde{X}_1$ и убедиться в том, что для получения оптимального плана перевозок достаточно построить еще только один план. Применение метода наименьшей стоимости, вообще говоря, сокращает число итераций, необходимых для решения транспортной задачи.

Матричные игры

Предметом теории игр является изучение конфликтных ситуаций, которые могут возникнуть в различных областях человеческой деятельности, например, в экономике, военном деле и т. д. Простейшей моделью конфликтной ситуации может служить так называемая одноходовая матричная игра двух лиц с нулевой суммой и конечным числом стратегий. В такой игре конфликтующие стороны будем условно называть ***игроками***, а результат действий игроков записывать в виде матрицы, называемой ***матрицей игры*** или ***платежной матрицей***.

Задача теории игр (матричная игра) состоит в следующем. Дана матрица игры

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

элементами которой могут быть любые действительные числа (положительные, отрицательные или ноль).Требуется найти оптимальные стратегии игроков и цену игры.

Поясним, что это означает.

Пусть два игрока независимо друг от друга выбирают: первый - номера строк, второй – номера столбцов матрицы A. Условимся считать, что каждый элемент a_{ij} ($i = 1, 2,\ldots m$; $j = 1, 2,\ldots n$) этой матрицы представляет собой выигрыш первого игрока и одновременно – проигрыш второго при условии, что первый игрок выбрал i-ю строку, а второй – j-й столбец.

Если первый игрок выиграл a_{ij}, а второй проиграл a_{ij}, то выигрыш второго игрока можно считать равным – a_{ij}, и сумма выигрышей обоих игроков будет равна нулю: $a_{ij} + (-a_{ij}) = 0$. По этой причине игра называется ***игрой с нулевой суммой.***

Игра происходит в условиях неопределенности, так как каждый игрок случайным образом выбирает номер строки или номер столбца, ничего не зная о выборе противника.

Стратегией первого игрока называется вектор $P = (p_1, p_2,\ldots p_m)$, компоненты которого $p_1, p_2,\ldots p_m$ – это вероятности, с которыми первый игрок называет номера соответствующих строк;

стратегией второго игрока – вектор $Q = (q_1, q_2,\ldots q_n)$, компоненты которого $q_1, q_2,\ldots q_n$ – вероятности, с которыми второй игрок называет номера соответствующих столбцов.

Из известных свойств вероятностей событий следует, что

$$\begin{aligned} &1)\ \ p_i \geq 0,\ \ q_j \geq 0\ \ (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, m;\ j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n); \\ &2)\ \ \textstyle\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ \ \sum_{j=1}^{n} q = 1. \end{aligned} \tag{48}$$

Если одна из компонент стратегии равна единице, а остальные – нулю, то она называется ***чистой стратегией***, в противном случае – ***смешанной стратегией***.

Первый игрок располагает, очевидно, m чистыми стратегиями, второй - n чистыми стратегиями. Смешанных стратегий у каждого игрока бесконечное множество.

Чистые стратегии математически описываются единичными векторами:

$$\begin{array}{ll} P_1 = (1,\, 0,\, \ldots,\, 0), & Q_1 = (1,\, 0,\, \ldots,\, 0), \\ P_2 = (0,\, 1,\, \ldots,\, 0), & Q_2 = (0,\, 1,\, \ldots,\, 0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_m = (0,\, 0,\, \ldots,\, 1); & Q_n = (0,\, 0,\, \ldots,\, 1). \end{array}$$

Если первый игрок применит некоторую стратегию $P = (p_1, p_2,\ldots p_m)$, второй — стратегию $Q = (q_1, q_2,\ldots q_n)$, то математическое ожидание выигрыша первого игрока подсчитывается по формуле

$$
\begin{aligned}
M(P,\,Q) \;=\; & a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + \ldots + a_{1n}p_1q_n + \\
+ \; & a_{21}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 + \ldots + a_{2n}p_2q_n + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \; & a_{m1}p_mq_1 + a_{m2}p_mq_2 + \ldots + a_{mn}p_mq_n,
\end{aligned}
$$

Или, кратко,

$$M(P,\,Q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_iq_j. \tag{49}$$

Стратегии P^* и Q^* называются ***оптимальными стратегиями*** соответствующих игроков, а число v называется ***ценой игры***, если справедливы неравенства

$$M(P,\,Q^*) \le v \le M(P^*,Q), \tag{50}$$

где P и Q – произвольные стратегии игроков.

Из неравенств (50) следует, что $v = M(P^*,\,Q^*)$, то есть цена игры совпадает с математическим ожиданием выигрыша первого игрока (проигрыша второго) при условии, что оба игрока применяют свои оптимальные стратегии.

Напомним, что решить матричную игру – это значит найти оптимальные стратегии игроков P^* и Q^* и цену игры v.

Для того, чтобы проверить, являются ли некоторые стратегии P^* и Q^* оптимальными, нет необходимости сравнивать их с любыми стратегиями игроков. Достаточно сравнить их с чистыми стратегиями игроков, которых, как известно, имеется конечное множество.

Критерий оптимальности стратегий. *Для того, чтобы стратегии P^* и Q^* были оптимальными стратегиями соответствующих игроков, а число v было ценой игры, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$M(P_i,Q^*) \le v \le M(P^*,\,Q_j)\,, \tag{51}$$

где $P = (p_1,\ p_2,\ldots\ p_m)$ – всевозможные чистые стратегии первого игрока, $Q=(q_1,\ q_2,\ldots\ q_n)$ – всевозможные чистые стратегии второго игрока.

Основная теорема теории игр (теорема фон Неймана). Любая матричная игра имеет решение, то есть существуют оптимальные стратегии и цена игры. Седловой точкой матрицы A называется точка $(i_0;\ j_0)$; если элемент $a_{i0\,j0}$ является наименьшим в своей строке и наибольшим в своем столбце.

Если матрица имеет седловую точку, то игра имеет решение в чистых стратегиях. Если седловой точки нет, то хотя бы одна из оптимальных стратегий будет смешанной.

В матричной игре вводятся понятия доминируемой строки и доминирующего столбца. Строка платежной матрицы называется ***доминируемой строкой***, если все ее элементы не превосходят соответствующих элементов какой-либо другой строки. Столбец называется ***доминирующим столбцом***, если все его элементы не меньше соответствующих элементов какого-либо другого столбца. Очевидно, что с точки зрения первого игрока не имеет смысла выбирать доминируемую строку, а с точки зрения второго игрока – доминирующий столбец. Их можно удалить из платежной матрицы.

Для того чтобы найти решение матричной игры, полезно придерживаться указанной ниже последовательности действий.

1) Проверяем, имеет ли платежная матрица седловую точку. Если да, то выписываем решение игры в чистых стратегиях; если нет, то продолжаем анализ матрицы.

2) Удаляем, если они есть, доминируемые строки и доминирующие столбцы. На их месте в оптимальных стратегиях игроков соответствующие компоненты будут равны нулю.

3) Решаем матричную игру одним из известных методов: методами линейного программирования, приближенным методом или графически (если хотя бы у одного из игроков только две чистые статегии).

Любая матричная игра может быть сведена к паре симметричных двойственных задач линейного программирования, а значит, для отыскания оптимальных стратегий игроков и цены игры можно воспользоваться симплекс-методом.

Пример 6 (для варианта 28). Найти решение игры, заданной платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad (52)$$

Прежде всего, проверим, имеет ли матрица (52) седловую точку. Наименьший элемент –3 первой строки не является наибольшим в третьем столбце; наименьший элемент –1 второй строки не является наибольшим в первом столбце; наконец, наименьший элемент 2 третьей строки является одновременно наибольшим в третьем столбце. Следовательно, матрица (52) имеет седловую точку (3, 3), в которой расположен элемент $a_{33} = 2$. Значит, игра имеет решение в чистых стратегиях, а именно:

$P_3^* = (0, 0, 1)$ – оптимальная стратегия первого игрока;

$Q_3^* = (0, 0, 1, 0)$ – оптимальная стратегия второго игрока;

$v = 2$ — цена игры.

Пример 7 (для варианта 28). Найти решение игры, заданной платежной матрицей

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \tag{53}$$

В матрице (53) нет седловой точки, следовательно, игра имеет решение в смешанных стратегиях.

Проверим, есть ли в матрице (53) доминируемые строки и доминирующие столбцы. Так как все элементы первой строки не больше соответствующих элементов третьей строки, то первая строка является доминируемой и ее можно удалить. Кроме того, можно удалить третий столбец, доминирующий над вторым, а также пятый столбец, доминирующий над первыми тремя столбцами. В результате получим матрицу

$$B' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{54}$$

Прибавив ко всем элементам матрицы *B'*, например, число c = 3,получим матрицу

$$B'' = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{55}$$

все элементы которой неотрицательны, а элементы второй строки строго положительны.

Составим пару симметричных двойственных задач (56), так чтобы исходная задача была стандартной задачей максимизации, матрица коэффициентов этой задачи совпадала с платежной матрицей *B''*, а коэффициенты при неизвестных в целевой функции и свободные члены неравенств были бы равны единице.

Задача 1	**Задача 2**	
$Max\ f(X) = x_1 + x_2 + x_3$	$Min\ g(Y) = y_1 + y_2$	
при условиях:	при условиях:	
$x_1 \geq 0,$	$5y_1 + 2y_2 \geq 1,$	
$x_2 \geq 0,$	$4y_2 \geq 1,$	(56)
$x_3 \geq 0,$	$7y_1 + y_2 \geq 1,$	
$5x_1 + 7x_3 \leq 1,$	$y_1 \geq 0,$	
$2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 1.$	$y_2 \geq 0.$	

Решим задачу 1 симплекс-методом. Она задана в форме общей задачи. Сведем ее к основной при помощи дополнительных неизвестных $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$. В результате получим следующую задачу.

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 1, \end{cases} \tag{57}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1 \div 5), \tag{58}$$

$$f(X) = x_1 + x_2 + x_3 - max. \tag{59}$$

Задача (57)-(59) – каноническая и, применив к ней алгоритм симплекс-метода, получим симплексные таблицы 14-16 вида

Таблица 14 – Симплексная таблица для плана X_1

		0	1	1	1	0	0	
	Баз.	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	1	5	**0**	7	1	0	
← 0	x_5	1	2	$\boxed{4}$	1	0	1	$\theta = \frac{1}{4}$
	f	0	−1	**−1**	−1	0	0	

Таблица 15 – Симплексная таблица для плана X_2

← 0	x_4	1	5	0	$\boxed{7}$	1	0	
→ 1	x_2	**1/4**	**1/2**	**1**	**1/4**	**0**	**1/4**	$\theta = \frac{1}{7}$
	f	1/4	−1/2	0	**−3/4**	0	1/4	

Таблица 16 – Симплексная таблица для плана X_3

→ 1	x_3	**1/7**	**5/7**	**0**	**1**	**1/7**	0
1	x_2	3/14	9/28	1	0	−1/28	1/4
	f	5/14	1/28	0	0	3/28	1/4
		g	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2

Из столбца x_0 и индексной строки таблицы 16 выпишем оптимальные планы пары двойственных задач (56), а именно:

$$X^* = \left(0,\ \frac{3}{14},\ \frac{1}{7}\right);\quad Y^* = \left(\frac{3}{28},\ \frac{1}{4}\right)$$

Причем

$$f(X^*) = g(Y^*) = \frac{5}{14}.$$

Из решений двойственных задач (56) получим цену игры и оптимальные стратегии игроков в игре с матрицей *B''*:

$$v'' = \frac{1}{f(X^*)} = \frac{1}{g(Y^*)} = \frac{14}{5};$$

$$\widetilde{P}^* = v'' \cdot Y^* = \frac{14}{5}\left(\frac{3}{28},\ \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{10},\ \frac{7}{10}\right);$$

$$\widetilde{Q}^* = v'' \cdot X^* = \frac{14}{5}\left(0,\ \frac{3}{14},\ \frac{1}{7}\right) = \left(0,\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{5}\right)$$

Игра с матрицей *B'* будет иметь те же оптимальные стратегии $\widetilde{P}^*$ и $\widetilde{Q}^*$, что и игра с матрицей *B''*, причем цена игры

$$v' = v'' - c = \frac{14}{5} - 3 = -\frac{1}{5}.$$

И, наконец, исходная игра с матрицей *B* имеет оптимальные стратегии

$$P^* = \left(0,\ \frac{3}{10},\ \frac{7}{10}\right) \quad \text{и} \quad Q^* = \left(0,\ \frac{3}{5},\ 0,\ \frac{2}{5},\ 0\right)$$

и цену игры $v = v' = -1/5$. Оптимальные стратегии P^* и Q^* мы получили из оптимальных стратегий $\widetilde{P}^*$ и $\widetilde{Q}^*$,приписав нули на месте удаленных строк и столбцов.

Проверить правильность решения игры можно с помощью критерия оптимальности стратегий. Для этого в неравенства (51) следует подставить компоненты найденных оптимальных стратегий P^* и Q^*, компоненты чистых стратегий P_i (i = 1, 2, 3) и Q_j (j = 1, 2, 3, 4, 5) и цену игры v =-1/5.

Заметим, что сводить задачу теории игр к паре двойственных задач ЛП следует только тогда, когда *все элементы* хотя бы одной строки платежной матрицы *строго положительны*. В этом случае обе задачи будут иметь оптимальные планы, из которых можно получить оптимальные стратегии игроков. В противном случае в исходной задаче целевая функция может оказаться неограниченной, а в двойственной задаче не будет ни одного плана. Так, в последнем примере, если составить пару двойственных задач в игре с матрицей

$$B' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

то в задаче 1 целевая функция будет не ограничена сверху на множестве планов, а в задаче 2 вообще не будет планов, однако, как мы убедились выше, игра с матрицей *B'* имеет решение.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Контрольная работа № 3 включает одно задание.

При выполнении контрольной работы необходимо

1 Формулировка цели;

2 Формирование множества альтернатив ;

3 Формирование множества критериев ;

Критерии, использующиеся для оценки альтернатив:

1 Температура пластиката на выходе экструдера ;

2 Удельное энергопотребление экструдера ;

3 Индекс термической деструкции полимерного материала ;

4 Средней степени смешения расплава ;

5 Цвет поверхности кусков пластиката (нормальное состояние – равномерный цвет; деструкция - наличие потемнений; непроплавленное состояние – белые включения)

Существует подход к решению задачи многокритериального выбора на основе попарного сравнения альтернатив. Данный подход реализован в виде методов ЭЛЕКТРА (ELECTRE – Elimination Et Choix Traduisant la Realite – исключение и выбор, отражающие реальность).

Постановка задачи обычно имеет следующий вид:

Дано: множество, состоящее из m критериев $z_1,...,z_m$ с количественными шкалами оценок, $I = \{1,...,m\}$ – множество номеров критериев, веса критериев $\alpha_1,...,\alpha_m$, множество альтернатив $X = \{x_1,...,x_n\}$ с оценками по критериям $z_1 = f_1(x_k),...,z_m = f_m(x_k)$, $k = 1,..., n$.

Требуется: выделить группу лучших альтернатив.

Структура метода ЭЛЕКТРА

1. Проводится полное попарное сравнение всех альтернатив. Для каждой пары альтернатив $x_a, x_b \in X$ по критериальным оценкам $f_1(x_a),...,f_m(x_a)$ и $f_1(x_b),...,f_m(x_b)$ вычисляются значения двух специальных индексов: согласия и несогласия. Эти индексы определяют согласие и несогласие с гипотезой, что альтернатива $x_a \in X$ превосходит альтернативу $x_b \in X$.

2. Задаются уровни согласия и несогласия, с которыми сравниваются значения вычисленных индексов для каждой пары альтернатив. Если индекс согласия выше заданного уровня, а индекс несогласия – ниже, то одна из альтернатив превосходит другую. В противном случае альтернативы несравнимы.

3. Из множества альтернатив удаляются доминируемые. Оставшиеся альтернативы образуют ядро. Альтернативы, входящие в ядро, могут быть либо эквивалентными, либо несравнимыми.

4. Вводятся последовательно более «слабые» значения уровней согласия и несогласия (меньший по значению уровень согласия и больший уровень несогласия), при которых выделяются ядра с меньшим количеством альтернатив.

5. Процесс поиска лучших альтернатив прекращают, когда число альтернатив в ядре становится приемлемым для ЛПР или их число меньше заранее заданного количества. В последнее ядро входят наилучшие альтернативы. Последовательность ядер определяет упорядоченность альтернатив по качеству.

Для выполнения контрольной работы рекомендуется использовать минимум 6-7 альтернатив и 4-5 критериев, следует показать, что с уменьшением жесткости индексов согласия и несогласия уменьшается множество недоминируемых альтернатив. В конце реализации метода ЭЛЕКТРА после 2-3 итераций (изменения индексов согласия и несогласия) должно оставаться примерно 2-3 альтернативы (в случае, если за исходные альтернативы использовалось множество недоминируемое по Парето).

В качестве итераций по индексу согласия и несогласия рекомендуется использовать 15% шаг от начального (то есть 0,85; 0,70; 0,55 – для индекса согласия, и 0,15; 0,30; 0,45 индекса для несогласия):

$$c_1 = 0{,}85; \qquad d_1 = 0{,}15;$$
$$c_2 = 0{,}70; \qquad d_2 = 0{,}30;$$
$$c_3 = 0{,}55; \qquad d_3 = 0{,}45.$$

Перед выполнением контрольной работы № 3 следует познакомиться с постановкой многокритериальных задач принятия решений и различными методами решения задач многокритериального выбора на основе попарного сравнения альтернатив по совокупности их критериальных оценок.

3.1 Постановки многокритериальных задач принятия решений

Задачи принятия решений, возникающие при управлении системами, при решении задач проектирования, оценки свойств систем, как правило, являются многокритериальными, т. к. системы обычно описываются несколькими свойствами – локальными критериями.

В данном разделе учебного пособия рассматриваются задачи принятия решений при определенности. Проблемная ситуация многокритериального принятия решений при определенности формально описывается следующей моделью:

– существуют альтернативы x, которые обладают m свойствами (характеристиками) $z_1, \ldots, z_m$;

– каждому i-му ($i = 1, \ldots, m$) свойству z_i альтернативы x соответствует критериальная оценка $z_i = f_i(x)$ – локальный критерий;

– каждой альтернативе x соответствует в m-мерном критериальном пространстве Z решение (точка) $z = (z_1, \ldots, z_m) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in R^m$;

– альтернативы x принадлежат исходному множеству альтернатив X, образованному ограничениями и условиями ($x \in X$);

– отображение множества X в критериальное пространство Z порождает в этом пространстве множество решений Z_X, являющееся образом множества X:

$$- \; X \xrightarrow{(f_1(x), \ldots, f_m(x))} Z_X \subset Z = R^m;$$

– на множество решений в критериальном пространстве наложены критериальные ограничения, образующие подмножество Z_Z;

– допустимое множество решений Z_D в критериальном пространстве Z образовано пересечением множеств Z_X и Z_Z ($Z_D = Z_X \cap Z_Z$).

Особенностью задачи является то, что альтернативе x соответствует однозначное описание в пространстве критериев

$$z = (z_1, ..., z_m) = (f_1(x), ..., f_m(x)).$$

Требуется решить одну из следующих задач:

1) *Задачу упорядочения альтернатив по совокупности m свойств.*

2) *Задачу классификации – распределить альтернативы по классам решений.*

3) *Задачу выбора – выделить лучшую альтернативу.*

По признаку непрерывности задачи принятия решений делятся на дискретные, непрерывные и смешанные. Для упрощения описания будем в дальнейшем в основном рассматривать дискретные задачи принятия решений разных типов, обозначая альтернативы как x_k, $k = 1,...,n$. Множество альтернатив X в этом случае состоит из n альтернатив: $X = \{x_1,...,x_n\}$. Решая задачу выбора, требуется выбрать номер k, которому соответствует лучшая альтернатива.

Отметим, что для производственной системы, состоящей из производственных подсистем (агрегаты, установки, цеха, отделы, участки и т. д.), вектор входных параметров $x = (x_1, ..., x_n)$ может описывать режимные параметры, управляющие воздействия, вектор выходных параметров (критериев) $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$ – результаты функционирования системы. Каждый локальный критерий f_i связан со значением входных воздействий $x = (x_1, ..., x_n)$, эти зависимости, в частности, может описывать система моделей объекта.

С учетом приведенной информации задачу принятия решений при управлении производственными и иными системами в общем виде можно формализовать следующим образом.

Требуется найти альтернативу (решение) x^* (для непрерывной задачи вектор управления $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$), обеспечивающую такие значения локальных критериев, которые удовлетворяют ЛПР, и для которой:

$$\max_{x \in X} f_i(x),\ i = 1,..., m,$$

$$X = \{x:\ x \in \Omega,\ g_j(x) \ge b_j,\ j = 1, ..., L\},$$

где $f_i(x)$ – локальные критерии, значения которых либо вычисляются по моделям, либо получены в результате измерений или с помощью экспертных оценок;

$g_j(x)$, $j = 1, ..., L$, – функции ограничений, определяющих допустимую область X многокритериальной задачи;

Ω – исходное множество альтернатив.

Поставленная задача является некорректной, поскольку она имеет решение только в том редком случае, когда минимум всех m критериев достигается в одной точке. Обычно критерии являются противоречивыми, и улучшение (увеличение) значений по одному из критериев приводит к ухудшению (уменьшению) значений по другим критериям.

Для преодоления неопределенности, связанной с многокритериальностью, нужно обычно решить ряд следующих проблем:

– необходимо введение понятия лучших решений;

– необходимо использование принципов оптимальности, которые обеспечивают способы сравнения решений в пространстве критериев;

– необходимы методы для поиска компромиссных решений.

Отметим, что в данном разделе рассматривается задача максимизации. Такой выбор связан с тем, что мы имеем дело с функцией качества, значения которой, естественно, желательно увеличить.

При наличии различного характера локальных критериев необходимы предварительное преобразование и нормализация этих критериев. Если в качестве критериев выбраны затраты, потери и др., которые надо минимизировать, то задача минимизации преобразуется в задачу максимизации изменением знака локальных критериев: «$-f_i(x)$».

Приведем основные этапы решения задач принятия решений при управлении производственной системой, характеризующихся многокритериальностью:

1) Выявить условия работы (функционирования) системы и описать производственную ситуацию.

2) Определить взаимосвязи между элементами системы.

3) Осуществить сбор и обработку доступной (количественной и качественной) информации.

4) Выбрать локальные критерии качества, т. е. показатели работы системы и подсистемы, которые надо свести к желаемым значениям.

5) Определить управляющие параметры, изменяя которые можно добиться экстремальных значений критериев.

6) Сформулировать задачи управления (принятия решений, многокритериальной оптимизации) системой.

7) Разработать пакет моделей системы, описывающий связь управляющих параметров со значениями локальных критериев качества.

8) Скорректировать постановку задачи управления.

9) Разработать алгоритмы управления (решение задач многокритериальной оптимизации, принятия решений) системой.

Такой подход к решению задач управления сложной системой эффективно реализуется при решении задач типа оперативного планирования и прогнозирования.

Принятие решений заключается в выборе ЛПР последовательности действий (альтернатив) для перевода объекта из состояния в текущий момент времени в желаемое состояние. Реализация той или иной альтернативы обычно приводит к различным исходам, состояниям объекта. Для сравнения между собой качеств различных альтернатив нужно иметь возможность оценивать соответствующие исходы (результаты) выбора. Исход операции выбора оценивается с помощью некоторых критериев качества (*критериев оптимальности*), которые являются математическим выражением цели принятия решений, позволяющим оценить степень достижения этой цели.

Процедура принятия решений включает следующие общие операции:

– описание ситуации и оценку ресурсов;
– формирование множества критериев, ограничений, альтернатив;
– оценку критериев и альтернатив;
– формирование правил выбора;
– упорядочение альтернатив по многомерным признакам;
– выбор и принятие решений.

Методы выполнения перечисленных действий образуют основы теории принятия решений, они позволяют ЛПР успешно решать многие сложные задачи эффективного выбора, систематизируя и формализуя его действия при принятии решений.

Состав и содержание операций процедуры принятия решений при управлении производственными объектами зависят от состояния объекта и типа задачи принятия решений.

Методы проведения процедур принятия решений состоят из следующих групп:

1) Методы подготовки информации для принятия решения, выполняющие функции описания, оценки и формирования множеств.

2) Методы выбора, формирующие правила выбора и реализующие собственно выбор.

В группу методов подготовки информации входят различные методы сбора и обработки информации. В этих методах может использоваться информация различного характера, которую получают из теоретических сведений, экспериментально-статистическими методами (количественная) и (или) на основе методов экспертных оценок и теории нечетких множеств. При формировании множеств (альтернатив, критериев, ограничений) можно использовать методы «мозгового штурма», морфологического анализа, экспертного перечисления, дискуссии и т. п.

Вторая группа методов связана с формированием правил выбора и принятием решения в зависимости от исходной ситуации и подготовленной информации. При управлении производственными объектами принятие решений, как правило, осуществляется критериально-экспертным выбором, позволяющим оценить альтернативы по нескольким критериям.

3.2 Характеристики приоритета критериев. Нормализация критериев

Задачи принятия решений в условиях определенности характеризуются однозначной детерминированной связью между альтернативами $x \in X$ и результатом выбора $f_i(x)$, $i = 1, ..., m$.

Отметим, что в пособии рассматриваются только статические свойства, которые не зависят от времени или являются установившимися величинами после переходного процесса.

Различные критерии могут иметь различную важность с точки зрения ЛПР. Рассмотрим некоторые способы описания относительной важности критериев.

Ряд приоритета. Ряд приоритета $I = \{1, ..., m\}$ отражает упорядочение критериев по важности: $z_1 \succ z_2 \succ ... \succ z_m$ и выражает существование более важных, менее важных и равноважных (эквивалентных по важности) критериев.

Например, $I = \{1, 2, [3, 4], ..., m\}$. Приведенная запись означает, что критерии упорядочены по важности и самый важный критерий имеет номер 1 (z_1), следующий по важности критерий – номер 2 (z_2), критерии с номерами 3 и 4 (z_3 и z_4) имеют одинаковую важность и наименее важный критерий имеет номер m (z_m). В данной записи критерии пронумерованы в порядке уменьшения важности.

Вектор приоритета. В векторе приоритета $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)^T$ λ_i показывает для упорядоченных по важности критериев, во сколько раз критерий z_i более важен, чем критерий z_{i+1}. Алгоритм получения λ_i состоит в следующем: последовательно при $i = 1, ..., i-1$ рассматриваются приращения критериев, берется единичное приращение критерия z_i и находят такое приращение критерия z_{i+1}, которое равно единичному изменению качества по критерию z_i. Полученная величина обозначается λ_i.

Весовой вектор. В весовом векторе $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_m)^T$ γ_i представляет относительную важность *i*-го критерия z_i по отношению ко всем остальным критериям. Из данного определения следует связь между элементами весового вектора γ и вектора приоритета λ:

$$\gamma_i = \lambda_i \cdot \gamma_{i+1}, \; i = 1, ..., m-1.$$

Для γ_i, $i = 1, ..., m$ выполняются следующие условия:

$$\gamma_i \geq 0, \; \sum_{i=1}^{m} \gamma_i = 1.$$

Приведенные описания важности критериев (если возможно их построить) допустимы только в тех диапазонах изменения критериев, для которых можно пренебречь взаимной зависимостью значений критериев. Для не-линейной зависимости критериев в общем случае γ_i зависит от величин всех критериев и изменяется при их изменении: $\gamma_i = \gamma_i(z_1, ..., z_m)$.

Если у весового вектора все γ_i равны, то задача называется задачей без приоритета.

Нормализация критериев. Часто критерии измеряются в разных единицах, шкалах, для одних критериев лучшие значения, которые больше, а для других, наоборот, меньше. Для того чтобы сравнивать значения разных критериев, необходимо перейти к однонаправленным шкалам, выразить их значения в одинаковых абсолютных единицах, либо перейти к безразмерным шкалам. Для таких преобразований значений критериев используют следующие операции, называемые нормализацией критериев.

Смена направленности цели (замена «max» на «min» или «min» на «max»): $z_i = -\bar{z}_i$, где z_i – нормализованная, а $\bar{z}_i$ – исходная величины критерия. Предполагается, что критерии описывают достижение некоторой цели. Данный способ применяют для перехода к однонаправленным критериям.

Нормализация по заданному значению: $z_i = \dfrac{\bar{z}_i}{z_i^I}$, где z_i^I – заданная или идеальная величина критерия. Здесь осуществляется переход к безразмерной шкале. Обычно предполагается, что все исходные значения критериев либо неотрицательны, либо неположительны. В последнем случае происходит смена направлений цели.

Относительная нормализация: $z_i = \dfrac{\bar{z}_i}{\max\limits_{x\in\Omega} \bar{z}_i}$. Частный случай нормализации по заданному значению.

Сравнительная нормализация: $z_i = \bar{z}_i - \min\limits_{x\in\Omega} \bar{z}_i$. Данная нормализация совмещает наименьшее значение критерия с нулем и все значения критериев становятся неотрицательными.

Естественная нормализация: $z_i = \dfrac{\bar{z}_i}{\max\limits_{x\in\Omega} \bar{z}_i - \min\limits_{x\in\Omega} \bar{z}_i}$. Обычно предполагается, что исходные значения критериев неотрицательны. Если это не так, то с помощью сравнительной нормализации переходят к неотрицательным значениям критериев.

Нормализация Севиджа: $z_i = \max_{x \in \Omega} \bar{z}_i - \bar{z}_i$. Данная нормализация совмещает наибольшее значение критерия с нулем, все значения критериев становятся неотрицательными и происходит изменение направленности критерия, т. е. лучшими значениями критерия становятся меньшие.

Полная нормализация: $z_i = \dfrac{\bar{z}_i - \min_{x \in \Omega} \bar{z}_i}{\max_{x \in \Omega} \bar{z}_i - \min_{x \in \Omega} \bar{z}_i}$. Данная нормализация является объединением сравнительной и естественной нормализации и отображает исходные значения критериев на отрезок от нуля до единицы. Лучшее значение нормализованного критерия равно единице, а худшее – нулю.

3.3 Принципы оптимальности в задачах принятия решений

Рассмотрим подход к проблеме многокритериальности, основанный на введении понятия лучших решений, опирающийся на постулируемые принципы оптимальности.

Принцип оптимальности по Парето. Данный принцип может быть использован на начальной стадии решения задачи с целью уменьшения исходного множества решений Z_X.

Решение (альтернативу) называют *оптимальным по Парето* (парето-оптимальным, паретовским, эффективным), если невозможно улучшить (увеличить) решение ни по одному из критериев без ухудшения (уменьшения) решения хотя бы по одному из критериев. Парето-оптимальные решения (альтернативы) составляют множество Парето (множество эффективных решений, множество π-оптимальных альтернатив, множество компромиссов).

Пусть X_P является *множеством Парето* в пространстве независимых переменных (параметров) и Z_P – множество Парето в пространстве критериев, тогда эти множества могут быть описаны следующими моделями:

$$X_P = \{x : \arg\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i z_i, \ \gamma_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{m} \gamma_i = 1\},$$

$$Z_P = \{z = (z_1, ..., z_m) : \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i z_i, \quad \gamma_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{m} \gamma_i = 1\}. \tag{1}$$

Данное описание корректно для *выпуклого множества* Z_X. Введем еще одно понятие. Альтернатива x_1 *доминирует по Парето* альтернативу x_2

($x_1 \underset{\pi}{\succ} x_2$, альтернатива x_1 лучше по Парето альтернативы x_2), если $f_i(x_1) \geq f_i(x_2)$, $i = 1, ..., m$, и хотя бы для одного i такое неравенство является строгим. Те альтернативы, для которых не существует доминирующих их допустимых альтернатив $x \in X$, называются *оптимальными по Парето*.

Множество альтернатив (векторных оценок) в пространстве критериев, доминирующих по Парето альтернативу x (векторную оценку $z = f(x)$), совпадает с положительным ортантом (конусом) $C(x)$, вершина которого перенесена в точку $f(x)$. Для любой точки (альтернативы) $z' = (z'_1, ..., z'_m)^T \in C(x)$ выполняются неравенства $z'_i \geq f_i(x)$, $i = 1, ..., m$. Если $z' \neq f(x)$, то хотя бы одно из неравенств будет строгим. Если пересечение положительного ортанта $C(x)$ с множеством векторных оценок Z_X содержит какие-либо точки, кроме $f(x)$, то каждая из этих точек доминирует x по Парето. Альтернатива x^* π-оптимальна, если пересечение конуса $C(x^*)$ с множеством векторных оценок Z_X состоит из единственной точки $z^* = f(x^*)$.

Применение описанной методики позволяет легко проверять π-оптимальность альтернативы.

Структура моделей (1) приводит к простому алгоритму построения множества Парето: определить множество Γ величин весового вектора $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_m)^T$, найти паретовские точки по (1) для каждого $\gamma \in \Gamma$, построить конечно-разностную аппроксимацию паретовского множества по полученным точкам.

Принцип идеальной точки. Согласно принципу идеальной точки лучшим считается решение, расположенное в пространстве параметров ближе всего (в смысле некоторой нормы) к «идеальной точке» z^I:

$$x^* = \min_{x \in X} D(z^I - z(x), \gamma),$$

где $z^I = (z_1^I, ..., z_q^I)^T$ – идеальная точка, D – норма, γ – весовой вектор.

Например, для евклидовой нормы получим:

$$x^* = \arg\min_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i^2 \cdot (z_i^I - z_i)^2 .$$

Для удобства можно использовать относительные величины:

$$x^* = \arg\min_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i^2 \cdot \left(1 - \frac{z_i(x)}{z_i^I}\right)^2 .$$

Идеальная точка может быть выбрана ЛПР решений интуитивно или взята формально как вектор максимальных значений каждого из критериев в отдельности:

$$z^I = (z_1^I, \ldots, z_m^I) = \left(\max_{x \in X} f_1(x), \ldots, \max_{x \in X} f_m(x) \right).$$

Этот принцип выражает желание найти решение, ближайшее к идеальной точке. Изменяя норму D и весовой вектор γ, можно по-разному описывать понятие «близости» к идеальной точке.

Принцип антиидеальной точки. В соответствии с этим принципом лучшим считается наиболее удаленное решение от антиидеальной точки z^{AI}:

$$x^* = \max_{x \in X} D(z^{AI} - z(x), \gamma),$$

где $z^{AI} = (z_1^{AI}, \ldots, z_m^{AI})^T$ – антиидеальная точка.

Например, она может быть выбрана следующим образом:

$$z^{AI} = (z_1^{AI}, \ldots, z_m^{AI}) = \left(\min_{x \in X} f_1(x), \ldots, \min_{x \in X} f_m(x) \right).$$

Данный принцип выражает желание найти решение, наиболее удаленное от антиидеальной точки.

Следующие пять принципов выражают желание равномерно увеличивать величины всех локальных критериев при определении наилучшего решения.

Принцип равенства. Согласно этому принципу наилучшим будет следующее решение:

$$x^* = \arg\max_{x \in X} U(x) = \arg\max_{x \in X_1} z_1 = \max_{x \in X_1} f_1(x),$$

где $X_1 = \{x: \ \arg(\gamma_1 \cdot z_1 = \ldots = \gamma_m \cdot z_m)\}$.

Здесь решение ищется на прямой в пространстве критериев. Возможны случаи, когда найденное решение не будет паретовским.

Принцип квазиравенства. Это смягченная версия слишком «жесткого» принципа равенства. По данному принципу наилучшее решение ищется как точка:

$$x^* = \arg\max_{x \in X} U(x) = \arg\max_{x \in X_2} z_1 = \max_{x \in X_2} f_1(x),$$

где $X_2 = \{x\colon \arg(\left|\gamma_i \cdot z_i - \gamma_j \cdot z_j\right| \le \delta_{ij}),\ \ \delta_{ij} = const,\ \ i, j = 1, ..., m\}$, и δ_{ij} – заранее выбранная константа или величина, изменяемая ЛПР, которая позволяет значениям критериев отклоняться друг от друга.

Принцип максимина. По данному принципу каждое решение описывается наименьшей взвешенной величиной из m критериев. Затем выбирается наибольшая величина среди этих наименьших значений и соответствующее ему решение принимается за наилучшее:

$$x^* = \arg\max_{x \in X} U(x) = \arg\max_{x \in X} \min_{i \in I}(\gamma_i \cdot z_i),$$

где $I = \{1, ..., m\}$ – множество номеров критериев, ряд приоритета.

Иногда данный принцип называют принципом гарантированного результата или принципом наибольшей осторожности.

Принцип последовательного максимина. Если принцип максимина не приводит к единственному решению, то он может быть последовательно применен до m раз:

$$x^* = \arg\max_{x \in X} U(x) = \arg\max_{x \in X} \min_{i \in I_{m-1}} \ ... \ (\max_{x \in \Omega} \min_{i \in I_1} (\max_{x \in \Omega} \min_{i \in I} (\gamma_i \cdot z_i))) \ ...),$$

где I_1 – множество номеров критериев, полученное из множества I, из которого исключена единица (номер критерия с минимальным значением),

I_2 – множество номеров критериев, полученное из множества I_1, из которого исключена двойка, множество I_{m-1} содержит только число m (стоит из номера одного критерия).

Квазиоптимальный принцип последовательного максимина. Это смягченная версия принципа последовательного максимина. Принцип последовательного максимина может быть последовательно применен до m раз. Каждое максиминное i-е решение ослабляется на величину Δ_i, такое ослабление производят до m раз. По данному принципу наилучшее решение ищется как точка:

$$x^* = \arg\max_{x \in X} U(x) = \arg\max_{x \in X_3} z_1 = \max_{x \in X_3} f_1(x),$$

где $X_3 = \{x : \arg\max_{x \in X} \min_{i \in I_{m-1}} (\ ... \ (\max_{x \in \Omega} \min_{i \in I_1} (\max_{x \in \Omega} \min_{i \in I} (\gamma_i \cdot z_i) - \Delta_1) - \Delta_2) \ ... - \Delta_m)\}$,

и Δ_j, $j = 1, ..., m$ – заранее выбранные константа или величины, изменяемые ЛПР, которые позволяют расширить множество допустимых значений. Критерий для максимизации может быть выбран ЛПР.

Стремление увеличивать величины всех критериев одновременно является привлекательным. Однако отклонение от приведенных принципов иногда может дать значительный выигрыш, например, если позволить ухудшать значения части критериев для достижения улучшения значений по другим критериям.

Следующие два принципа носят название принципов справедливой уступки.

Принцип абсолютной уступки. Пусть сравниваются два любых решения и пусть мы переходим от первого ко второму решению. Пусть величины одной части критериев уменьшаются, а второй части критериев увеличиваются при этом переходе. Согласно рассматриваемому принципу второе решение лучше первого, если сумма взвешенных значений увеличившихся критериев больше суммы взвешенных значений уменьшившихся критериев. Данное длинное определение и сам принцип абсолютной уступки могут быть выражены в простой математической форме:

$$x^* = \arg\max_{x \in X} U(x) = \arg\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \cdot f_i(x) = \arg\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \cdot z_i .$$

Описанный принцип позволяет улучшать качество решения за счет компенсации (уступки) уменьшения значений по одним критериям большим увеличением значений по другим критериям. Запись, приведенная выше, называется сверткой значений критериев или просто сверткой. Взвешенная сумма величин критериев может рассматриваться как целевая функция или функция качества.

Принцип относительной уступки. Пусть, как и ранее, сравниваются два любых решения и пусть мы переходим от первого ко второму решению. Пусть относительные величины одной части критериев уменьшаются, а относительные величины второй части критериев увеличиваются при этом переходе. Согласно принципу относительной уступки второе решение лучше первого, если суммарное относительное увеличение взвешенных значений увеличившихся критериев больше суммарного относительного уменьшения взвешенных значений уменьшившихся критериев. Принцип относительной уступки (и данное длинное определение) может быть выражен в простой математической форме:

$$x^* = \arg\max_{x\in X} U(x) = \arg\max_{x\in X} \prod_{i=1}^{m} [f_i(x)]^{\gamma_i} = \arg\max_{x\in X} \prod_{i=1}^{m} z^{\gamma_i}$$

или

$$x^* = \arg\max_{x\in X} U(x) = \arg\max_{x\in X} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \cdot \log f_i(x) = \arg\max_{x\in X} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \cdot \log z_i \ .$$

Этот принцип учитывает значения критериев, и самый простой путь улучшения решения заключается в уменьшении значений критериев с большими значениями.

Принцип абсолютной уступки не учитывает значений локальных критериев. Его лучше использовать в комбинации с другими принципами. Принцип относительной уступки довольно чувствителен к величинам критериев, и относительная уступка ведет к учету интересов, прежде всего, критериев с наибольшими значениями за счет критериев с меньшими значениями. Важным достоинством принципа относительной уступки является его инвариантность к единицам, в которых измеряются значения критериев.

Все описанные принципы оптимальности используют весовой вектор. Приводимые далее принцип главного критерия и лексикографический принцип используют меньше информации о взаимной важности критериев.

Принцип главного критерия. Это наиболее широко используемый принцип при постановке задач оптимизации. Один из критериев (обычно самый важный) принимается за главный, для остальных критериев назначают пороговые величины. Величины этих критериев должны превышать пороговые значения. Наилучшим решением является точка:

$$x^* = \arg\max_{x\in X} U(x) = \arg\max_{x\in X_0} z_1 = \arg\max_{x\in X_0} f_1(x),$$

$$X_0 = \{x:\ x\in X,\ \ \arg(z_i \geq \bar{z}_i),\ \ \ \bar{z}_i = const,\ \ \ i = 2, ..., m\}.$$

Выбор величин пороговых значений $\bar{z}_i$ очень важен. Изменяя их, можно получать различные решения. Кроме того, можно порекомендовать при применении данного принципа исследовать то, как влияет выбор главного критерия на результирующее оптимальное решение.

Лексикографический принцип. В этом случае используется ряд приоритета и решается последовательность задач. Сначала максимизируется самый важный критерий. Полученное в результате множество решений является допустимым множеством для максимизации следующего по важности критерия и т. д.:

1. $X_1 = \{x : \arg\max_{x \in X} z_1\}$,

2. $X_2 = \{x : \arg\max_{x \in X_1} z_2\}$,

. . .

m. $X_m = \{x : \arg\max_{x \in X_{m-1}} z_q\}$.

Данный принцип довольно жесткий. Часто после решения первой задачи максимизации получают единственное решение, а остальные критерии не участвуют в решении, и тем самым их «интересы» не учитываются. Следующий принцип более гибкий.

Лексикографический принцип квазиоптимальности. Решается последовательность задач максимизации с введенными отклонениями от оптимума (уступками). Данные отклонения увеличивают допустимое множество, на котором решаются последующие задачи минимизации:

1. $X_1 = \{x : \arg(\max_{x \in X} z_1 - \Delta_1)\}$,

2. $X_2 = \{x : \arg(\max_{x \in X_1} z_2 - \Delta_2)\}$,

. . .

$m-1$. $X_{m-1} = \{x : \arg\max_{x \in X_{m-2}} z_{m-1} - \Delta_{m-1})\}$,

m. $X_m = \{x : \arg\max_{x \in X_{m-1}} z_m\}$.

Принцип позволяет ЛПР выбирать величины Δ_i, $i = 1, ..., m-1$, и влиять на решение и «интересы» последующих критериев.

Многие из принципов требуют от ЛПР дополнительной информации, которую ему обычно трудно предоставить априори. Зачастую ЛПР понимает то, чего можно достигнуть только в процессе решения задачи. Фактически выбор того или другого принципа оптимальности не является математической проблемой, а выбор или построение принципа оптимальности должен вести к решению, удовлетворяющему требованиям ЛПР, и отражать представление его о качестве решения. Чем больше вариантов постановок задач оптимизации и их решений рассматривается ЛПР, тем больше шансов найти решение, полностью удовлетворяющее ЛПР.

Таким образом, важной рекомендацией по использованию принципов оптимальность может быть их комбинирование и разумное сочетание их применения в диалоге с ЛПР.

3.4 Метод аналитической иерархии

Метод *аналитической иерархии* использует дерево критериев, в котором более общие критерии разделяются на критерии частного характера. Для каждой группы критериев определяются коэффициенты важности. Альтернативы сравниваются между собой по отдельным критериям с целью определения критериальной ценности каждой из них. Средством определения коэффициентов важности критериев либо критериальной ценности альтернатив является попарное сравнение. Результат сравнения оценивается по балльной шкале (обычно от 1 до 10). На основе таких сравнений вычисляются коэффициенты важности критериев, оценки альтернатив и находится общая оценка как взвешенная сумма оценок критериев.

Применение метода достаточно просто и наглядно, что и определяет его популярность. Метод не имеет строгого теоретического обоснования и относится к эвристическим.

Постановка задачи, решаемой с помощью метода аналитической иерархии, заключается в следующем.

Дано: общая цель (или цели) решения задачи; критерии оценки альтернатив $z_1,...,z_m$; множество альтернатив $X = \{x_1,...,x_n\}$.

Требуется: выбрать наилучшую альтернативу. Метод аналитической иерархии складывается из выполнения следующих этапов.

1) Провести структуризацию задачи принятия решений в виде иерархической структуры с несколькими уровнями: цели-критерии-альтернативы.

2) ЛПР выполнить попарные сравнения элементов каждого уровня. Результаты сравнений представить в виде чисел.

3) Вычислить весовые коэффициенты для элементов каждого уровня (α_i – весовой коэффициент *i*-го критерия, $\gamma_i(x_k)$ – весовой коэффициент альтернативы x_k по *i*-му критерию).

4) Вычислить количественную оценку качества каждой из альтернатив по формуле:

$$U(x_k) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \gamma_i (x_k) \tag{2}$$

и определить наилучшую альтернативу

$$x^* = \arg \max_{x_k \in X} U(x_k).$$

К недостаткам метода аналитической иерархии относится то, что в нем эвристически заданы методы оценки качества альтернатив по формуле (2) и переход от качественной исходной информации к количественным оценкам довольно произволен. Кроме того, появление новой альтернативы может привести к изменению оценок предпочтений между старыми альтернативами и вследствие этого к необходимости заново решать задачу.

На наш взгляд, данный метод можно сделать более гибким и учитывающим предпочтения ЛПР. Например, можно, следуя общей схеме метода, предложить множество способов оценки весовых коэффициентов, решить задачу, используя эти способы, а затем предложить ЛПР рассмотреть множество решений с описанием способов решений и выбрать наиболее предпочтительный для ЛПР.

3.5 Методы порогов несравнимости ЭЛЕКТРА

В конце 60-х годов группа французских ученых во главе с профессором Б. Руа предложила подход к попарному сравнению многокритериальных альтернатив. Оценка каждой альтернативы является относительной (по сравнению с другой альтернативой). Данный подход реализован в виде методов ЭЛЕКТРА (ELECTRE – Elimination Et Choix Traduisant la Realite – исключение и выбор, отражающие реальность).

Методы ЭЛЕКТРА направлены на решение задач с уже заданными многокритериальными альтернативами. В этих методах не определяется количественно показатель качества каждой из альтернатив, а устанавливается лишь условие превосходства одной альтернативы над другой.

Постановка задачи обычно имеет следующий вид:

Дано: множество, состоящее из m критериев $z_1,...,z_m$ с количественными шкалами оценок, $I = \{1,...,m\}$ – множество номеров критериев, веса критериев $\alpha_1,...,\alpha_m$, множество альтернатив $X = \{x_1,...,x_n\}$ с оценками по критериям $z_1 = f_1(x_k),...,z_m = f_m(x_k)$, $k = 1,..., n$.

Требуется: выделить группу лучших альтернатив.

Структура метода ЭЛЕКТРА

1) Проводится полное попарное сравнение всех альтернатив. Для каждой пары альтернатив $x_a, x_b \in X$ по критериальным оценкам $f_1(x_a),..., f_m(x_a)$ и $f_1(x_b),..., f_m(x_b)$ вычисляются значения двух специальных индексов: согласия и несогласия. Эти индексы определяют согласие и несогласие с гипотезой, что альтернатива $x_a \in X$ превосходит альтернативу $x_b \in X$.

2) Задаются уровни согласия и несогласия, с которыми сравниваются значения вычисленных индексов для каждой пары альтернатив. Если индекс согласия выше заданного уровня, а индекс несогласия – ниже, то одна из альтернатив превосходит другую. В противном случае альтернативы несравнимы.

3) Из множества альтернатив удаляются доминируемые. Оставшиеся альтернативы образуют ядро. Альтернативы, входящие в ядро, могут быть либо эквивалентными, либо несравнимыми.

4) Вводятся последовательно более «слабые» значения уровней согласия и несогласия (меньший по значению уровень согласия и больший уровень несогласия), при которых выделяются ядра с меньшим количеством альтернатив.

5) Процесс поиска лучших альтернатив прекращают, когда число альтернатив в ядре становится приемлемым для ЛПР или их число меньше заранее заданного количества. В последнее ядро входят наилучшие альтернативы. Последовательность ядер определяет упорядоченность альтернатив по качеству.

В различных методах семейства ЭЛЕКТРА индексы согласия и несогласия строятся по-разному. Рассмотрим подробнее метод ЭЛЕКТРА I.

1) Проводится полное попарное сравнение всех альтернатив. Для каждой пары альтернатив $x_a, x_b \in X$ по критериальным оценкам $f_1(x_a),..., f_m(x_a)$ и $f_1(x_b),..., f_m(x_b)$ вычисляются значения двух специальных индексов: согласия и несогласия.

Выдвигается гипотеза о превосходстве альтернативы x_a над альтернативой x_b. Множество номеров критериев $I = \{1,...,m\}$ разбивается на три подмножества:

$I^+(x_a, x_b) = \{i\colon f_i(x_a) \succ f_i(x_b)\}$ – подмножество критериев, по которым x_a предпочтительнее x_b;

$I^\propto(x_a, x_b) = \{i\colon f_i(x_a) \propto f_i(x_b)\}$ – подмножество критериев, по которым x_a эквивалентно x_b;

$I^-(x_a, x_b) = \{i\colon f_i(x_a) \prec f_i(x_b)\}$ – подмножество критериев, по которым x_b предпочтительнее x_a.

Далее вводится $C_{x_a x_b}$ – индекс согласия с гипотезой о превосходстве x_a над x_b и $d_{x_a x_b}$ – индекс несогласия с гипотезой о превосходстве x_a над x_b.

Индекс согласия $C_{x_a x_b}$ подсчитывается на основе весов критериев как отношение суммы весов критериев подмножеств $I^+(x_a, x_b)$ и $I^\propto(x_a, x_b)$ к общей сумме весов:

$$C_{x_a x_b} = \frac{\sum\limits_{i \in I^+(x_a, x_b), I^\propto(x_a, x_b)} \alpha_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i}.$$

Индекс несогласия $d_{x_a x_b}$ определяется на основе учета относительных величин проигрышей альтернативы x_a альтернативе x_b. Для каждого критерия y_i из подмножества $i \in I^-(x_a, x_b)$ вычисляются разности значений критерия для альтернатив x_a, x_b. Полученная величина делится на длину шкалы этого критерия, затем за значение индекса несогласия принимается наибольшая относительная величина:

$$d_{x_a x_b} = \max_{i \in I^-(x_a, x_b)} \frac{|f_i(x_b) - f_i(x_a)|}{L_i},$$

где L_i – длина шкалы по *i*-му критерию.

Приведем очевидные свойства индексов согласия и несогласия:

$$0 \le C_{x_a x_b} \le 1;$$

$C_{x_a x_b} = 1$, если подмножество $I^-(x_a, x_b)$ пусто;

$C_{x_a x_b}$ сохраняет значение при замене одного критерия на несколько с тем же общим весом;

$0 \le d_{x_a x_b} \le 1$;

$d_{x_a x_b}$ сохраняет значение при введении более детальной шкалы по i-му критерию при той же ее длине.

Введенные индексы используются при построении матриц индексов согласия и несогласия для заданных альтернатив.

2) Задаются пороговые значения (отсюда следует название методов): уровни согласия C_1 $(0 \le C_1 \le 1)$ и несогласия d_1 $(0 \le d_1 \le 1)$, с которыми сравниваются значения вычисленных индексов для каждой пары альтернатив. Если $C_{x_a x_b} \ge C_1$ и $d_{x_a x_b} \le d_1$, то альтернатива x_a объявляется лучшей по сравнению с альтернативой x_b, т. е. альтернатива x_b – доминируемая. В противном случае альтернативы несравнимы.

3) Из множества альтернатив удаляются доминируемые. Оставшиеся альтернативы образуют ядро, в которое входят доминирующие и несравнимые альтернативы.

4) Вводятся последовательно более «слабые» пороговые значения: уровни согласия и несогласия, удовлетворяющие условиям $C_{r+1} \le C_r$, $d_{r+1} \ge d_r$, $r = 2,3,\ldots$, при которых выделяются ядра с меньшим количеством альтернатив.

5) Процесс поиска лучших альтернатив прекращают, когда число альтернатив в ядре становится приемлемым для ЛПР или их число меньше заранее заданного количества. В последнее ядро входят наилучшие альтернативы. Последовательность ядер определяет упорядоченность альтернатив по качеству.

Похожие идеи используются и в других методах семейства ЭЛЕКТРА. Например, в методе ЭЛЕКТРА II вводят индексы согласия, $C_{x_a x_b}$, несогласия $d_{x_a x_b}$ с гипотезой о превосходстве альтернативы x_a над x_b и дополнительный индекс сильного превосходства

$$t_{x_a x_b} = \frac{\sum\limits_{i \in I^+(x_a, x_b)} \alpha_i}{\sum\limits_{i \in I^-(x_a, x_b)}^{m} \alpha_i}.$$

Вычислив для всех альтернатив индексы согласия, несогласия и сильного превосходства, задают последовательности уровней индексов $1 \geq C_1 > C_2 > C_3 > 0$, $1 \geq d_1 > d_2 \geq 0$, строят отношение сильного превосходства

$$t_{x_a x_b} \geq 1 \wedge C_{x_a x_b} \geq C_1 \wedge d_{x_a x_b} < d_2 \vee t_{x_a x_b} \geq 1 \wedge C_{x_a x_b} \geq C_2 \wedge d_{x_a x_b} \leq d_1 \Rightarrow x_a \overset{\text{ñèëüí}}{\succ} x_b$$

и отношение слабого превосходства:

$$t_{x_a x_b} \geq 1 \wedge C_{x_a x_b} \geq C_3 \wedge d_{x_a x_b} < d_2 \Rightarrow x_a \overset{\text{ñëàá}}{\succ} x_b .$$

На основе полученных соотношений удаляют доминируемые альтернативы и получают ядро.

Затем, как и в методе ЭЛЕКТРА, изменяют уровни индексов и строят последовательность ядер.

Важно подчеркнуть, что уровни индексов согласия и несогласия, при которых альтернативы сравнимы, представляют собой инструмент анализа в руках ЛПР. Задавая эти уровни, меняя пороговые значения, постепенно понижая требуемый уровень индекса согласия и повышая требуемый уровень индекса несогласия, ЛПР исследует имеющееся множество альтернатив.

Важным достоинством методов ЭЛЕКТРА является поэтапность выявления предпочтений ЛПР в процессе назначения уровней согласия и несогласия и изучения ядер. Детальный анализ позволяет ЛПР сформировать свои предпочтения, определить компромиссы между критериями. Использование отношения несравнимости позволяет выделить пары альтернатив с противоречивыми оценками, остановиться на ядре, выделение которого достаточно обоснованно с точки зрения имеющейся информации. Трудности при применении методов ЭЛЕКТРА связаны с назначением ЛПР весов. В ряде случаев при выделении ядер могут возникать циклы.

Пример выполнения контрольной работы № 3

Постановка задачи

Дано: *m* критериев со шкалами оценок (обычно количественные), веса критериев (обычно целые числа), альтернативы с оценками по критериям.

Требуется: выделить группу лучших альтернатив.

Исходные данные

На конкурентоспособность фирм, занимающихся продажей компьютеров и комплектующих к ним, влияют следующие параметры: качество, надежность, стабильность работы, стаж работы на рынке, то есть известность фирмы, цена комплектующих и многие другие, которые могут быть определены по 20-ной шкале экспертным методом.

Проведем оценку конкурентоспособности пяти компьютерных фирм с использованием методов ЭЛЕКТРА I и ЭЛЕКТРА II.

Оценка конкурентоспособности начинается с определения цели исследования:

– если необходимо определить положение данного товара в ряду аналогичных, то достаточно провести их прямое сравнение по важнейшим параметрам;

– если целью исследования является оценка перспектив сбыта товара на конкретном рынке, то в анализе должна использоваться информация, включающая сведения об изделиях, которые выйдут на рынок в перспективе, а также сведения об изменении действующих в стране стандартов и законодательства, динамики потребительского спроса.

Независимо от целей исследования, основой оценки конкурентоспособности является изучение рыночных условий, которое должно проводиться постоянно, как до начала разработки новой продукции, так и в ходе ее реализации.

Задача стоит в выделении той группы факторов, которые влияют на формирование спроса в определенном секторе рынка:

– рассматриваются изменения в требованиях постоянных заказчиков продукции;

– анализируются направления развития аналогичных разработок;

– рассматриваются сферы возможного использования продукции;

– анализируется круг постоянных покупателей.

Введем весовые параметры, максимальный из которых равен 20. Данные весовые параметры будут одинаковы во всех пяти фирмах.

Рассчитаем индексы «согласия» и «несогласия». Для этого необходимо сравнить оценки в баллах при различных конфигурациях фирм. Превосходящие факторы обозначим «+», равноценные « = », остальные «–», что показано в таблице 3.

Таблица 2 – Оценка показателей конкурентоспособности на фирмах *A, B, C, D* и *E*.

Показатели конкурентоспособности	Оценка (в баллах)					Весовой параметр
	Фирма A	Фирма B	Фирма C	Фирма D	Фирма E	
Квалификация персонала	19	19	14	19	19	13
Рекламная стратегия	20	11	5	20	11	18
Стаж работы на рынке	13	10	10	6	16	7
Качество продукции	20	20	15	20	18	20
Цена	14	20	13	17	8	20
Покупательная способность потребителя	17	10	7	17	10	16
Величина предприятия	20	13	11	16	16	10
Имидж предприятия	20	15	8	18	15	15
Сервисное обслуживание	18	16	16	18	16	12
Разнообразие выбора продукции	20	20	10	20	13	19

Таблица 3 – Сравнение конфигураций фирм

	Факторы конкурентоспособности									
	Квалификация персонала	Рекламная стратегия	Стаж работы на рынке	Качество продукции	Цена	Покупательная способность	Величина предприятия	Имидж предприятия	Сервисное обслуживание	Разнообразие выбора
AB	=	+	+	=	-	+	+	+	+	=
BA	=	-	-	=	+	-	-	-	-	=
AC	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
CA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AD	=	=	+	=	-	=	+	+	=	=
DA	=	=	-	=	+	=	-	-	=	=
AE	=	+	-	+	+	+	+	+	+	+
EA	=	-	+	-	-	-	-	-	-	-
BC	+	+	=	+	+	+	+	+	=	+
CB	-	-	=	-	-	-	-	-	=	-
BD	=	-	+	=	+	-	-	-	-	=
DB	=	+	-	=	-	+	+	+	+	=
BE	=	=	-	+	+	=	-	=	=	+
EB	=	=	+	-	-	=	+	=	=	-
CD	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-
DC	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+
CE	-	-	-	-	+	-	-	-	=	-
EC	+	+	+	+	-	+	+	+	=	+
DE	=	+	-	+	+	+	=	+	+	+
ED	=	-	+	-	-	-	=	-	-	-

Исходя из таблицы 3, подставляем в формулы соответствующие весовые параметры из таблицы 2, таким образом, рассчитывая индексы «согласия» и «несогласия» для каждой конфигурации фирм.

Индексы «несогласия», как уже говорилось ранее, рассчитываются по формуле

$$d_{x_a x_b} = \max_{i \in I^-(x_a, x_b)} \frac{|f_i(x_b) - f_i(x_a)|}{L_i},$$

(причем длина шкалы $L = 20$)

Расчет данного индекса одинаков как для ЭЛЕКТРА I, так и для ЭЛЕКТРА II.

Для расчета индексов «согласия» и «несогласия» рекомендуется использовать прикладную программу Microsoft Excel.

Таблица 4 – Результаты расчета индекса несогласия

	Факторы конкурентоспособности										Max d
	Квалификация персонала	Рекламная стратегия	Стаж работы на рынке	Качество продукции	Цена	Покупательная способность	Величина предприятия	Имидж предприятия	Сервисное обслуживание	Разнообразие выбора	
AB	0	0	0	0	0,30	0	0	0	0	0	0,30
BA	0	0,45	0,15	0	0	0,35	0,35	0,25	0,10	0	0,45
AC	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
CA	0,25	0,75	0,15	0,25	0,05	0,50	0,45	0,60	0,10	0,50	0,75
AD	0	0	0	0	0,15	0	0	0	0	0	0,15
DA	0	0	0,35	0	0	0	0,20	0,10	0	0	0,35
AE	0	0	0,15	0	0	0	0	0	0	0	0,15
EA	0	0,45	0	0.10	0,30	0,35	0,20	0,25	0,10	0,35	0,45
BC	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
CB	0,25	0,30	0	0,25	0,35	0,15	0,10	0,35	0	0,50	0,50
BD	0	0,45	0	0	0	0,35	0,15	0,15	0,10	0	0,45
DB	0	0	0,20	0	0,15	0	0	0	0	0	0,20
BE	0	0	0,30	0	0	0	0,15	0	0	0	0,30
EB	0	0	0	0,10	0,60	0	0	0	0	0,35	0,60
CD	0,25	0,75	0	0,25	0,20	0,50	0,25	0,50	0,10	0,50	0,75
DC	0	0	0,20	0	0	0	0	0	0	0	0,20
CE	0,25	0,30	0,30	0,15	0	0,15	0,25	0,35	0	0,15	0,35
EC	0	0	0	0	0,25	0	0	0	0	0	0,25
DE	0	0	0,50	0	0	0	0	0	0	0	0,50
ED	0	0,45	0	0,10	0,45	0,35	0	0,15	0,10	0,35	0,45

Рассчитываем индекс «согласия» для метода ЭЛЕКТРА I по следующей формуле

$$C_{x_a x_b} = \frac{\sum\limits_{i \in I^+(x_a, x_b), I^-(x_a, x_b)} \alpha_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i}$$

Причем максимальная сумма весов $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 150$.

Формула индекса «согласия» для метода ЭЛЕКТРА II следующая

$$C_{x_a x_b} = \frac{\sum\limits_{i \in I^+(x_a, x_b)} \alpha_i}{\sum\limits_{i \in I^-(x_a, x_b)} \alpha_i}.$$

Тем самым, с помощью программы Microsoft Excel вычисляем важности подмножеств, что представлено в таблице 5.

Таблица 5 – Важность подмножеств $I^+(x, y)$, $I^=(x, y)$, $I^-(x, y)$

	A	***B***	***C***	***D***	***E***
A					
I+	*	78	150	32	130
I=	*	52	0	98	13
I^-	*	20	0	20	7
		150	150	150	150
B					
I+	20	*	131	27	59
I=	52	*	19	52	74
I^-	78	*	0	71	17
	150		150	150	150
C					
I+	0	0	*	7	20
I=	0	19	*	0	12
I^-	150	131	*	143	118
				150	150
D					
I+	20	71	143	*	120
I=	98	52	0	*	23
I^-	32	27	7	*	7
					150
E					
I+	7	17	118	7	*
I=	13	74	12	23	*
I^-	130	59	20	120	*

Построим матрицы индексов «согласия» и «несогласия» для метода ЭЛЕКТРА I и для метода ЭЛЕКТРА II. При построении матрицы индексов «несогласия» выбирают максимальные показатели, что приведено в таблицах 6, 7 и 8 соответственно.

Таблица 6 – Матрица согласия (ЭЛЕКТРА I)

	A	***B***	***C***	***D***	***E***
A	-	0,87	1,00	0,87	0,95
B	0,48	-	1,00	0,53	0,89
C	0,00	0,13	-	0,05	0,21
D	0,79	0,82	0,95	-	0,95
E	0,13	0,61	0,87	0,20	-

Таблица 7 – Матрица несогласия (ЭЛЕКТРА I и ЭЛЕКТРА II)

	A	***B***	***C***	***D***	***E***
A	-	0,30	0,00	0,15	0,15
B	0,45	-	0,00	0,45	0,30
C	0,75	0,50	-	0,75	0,35
D	0,35	0,20	0,20	-	0,50
E	0,45	0,60	0,25	0,45	-

Таблица 8 – Матрица согласия (ЭЛЕКТРА II)

	A	***B***	***C***	***D***	***E***
A	-	3,90	150,00	1,60	18,57
B	0,26	-	131,00	0,38	3,47
C	0,00	0,00	-	0,05	0,17
D	0,63	2,63	20,43	-	17,14
E	0,05	0,29	5,90	0,06	-

В соответствии с правилами об индексах согласия и несогласия – в качестве пороговых значений для ЭЛЕКТРА I зададим $c_1 = 0{,}126$ и $d_1 = 0{,}4$, а для ЭЛЕКТРА II – $c_2 = 0{,}5$ и $d_2 = 0{,}4$ и таким образом найдем значения превосходства одной компьютерной фирмы над другой, что показано в таблицах 8 и 9.

Таблица 8 – Таблица превосходства вариантов для метода ЭЛЕКТРА I

	A	***B***	***C***	***D***	***E***
A	–	+	+	+	+
B	–	–	+	–	+
C	–	–	–	–	+
D	+	+	+	–	–

E	–	–	+	–	–

Таблица 9 – Таблица превосходства вариантов для метода ЭЛЕКТРА II

	A	***B***	***C***	***D***	***E***
A	–	+	+	+	+
B	–	–	+	–	+
C	–	–	–	–	–
D	+	+	+	–	–
E	–	–	+	–	–

Таким образом, на основании таблиц 8 и 9превосходства компьютерных фирм мы выявили наиболее конкурентоспособную компьютерную фирму А (по методам ЭЛЕКТРА I и ЭЛЕКТРА II получено максимальное количество плюсов при попарном сравнении фирм).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Грешилов, А. А. Математические методы принятия решений: Учеб. пособие / А. А. Грешилов. - Москва : Изд-во МГТУ, 2006. – 583 с.

2 Катулев, А. Н.Математические методы в системах поддержки принятия решений: Учеб пособие / А. Н. Катулев, Н. А. Северцев. – М.: Высшая школа, 2005. – 310 с.

3 Арсеньев, Ю. Н. Принятие решений. Интегрированные интеллектуальные системы: Учеб. пособие / Ю. Н. Арсеньев, С. И. Шелобаев, Т. Ю. Давыдова. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 269 с.

4 Волков, И. К. Исследование операций: Учебник для вузов / И. К. Волков, Е. А. Загоруйко. – М.: Изд-во МГТУ им Н. Э. Баумана. 2004. – 435 с.

5 Гольдштейн, А. Л. Теория принятия решений : задачи и методы исследования операций и принятия решений: Учеб. пособие / А. Л. Гольдштейн; М-во образования и науки Рос. Федерации, Перм. гос. техн. ун-т. - Пермь: Пермский государственный технический университет, 2004. – 360 с.

6 Ногин, В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде : количественный подход / В.Д. Ногин. - Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 176 с.

7 Панченко, В. М. Теория принятия решений: линейное программирование. Учеб. пособие зля вузов / В. М. Панченко. – М.: Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики, 2005. – 44 с.

8 Федунец, Н. И. Теория принятия решений: Учеб. пособие / Н. И. Федунец, В. В. Куприянов. – М.: Издательство Московского государственного горного университета, 2005. – 218 с.

9 Черноруцкий, И. Г. Методы оптимизации в теории управления / И. Г. Черноруцкий. – СПб.: Питер, 2004. – 256 с.

10 Черноруцкий, И. Г. Методы принятия решений: Учеб. пособие / И. Г. Черноруцкий. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2005. – 408 с.

Кафедра систем автоматизированного проектирования и управления

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Учебное пособие
для студентов заочной формы обучения

Чистякова Тамара Балабековна
Новожилова Инна Васильевна
Антипин Роман Васильевич
Уланов Владимир Никифорович

Отпечатано с оригинал макета. Формат 60х90 $^{1}/_{16}$
Печ. л. 6,5. Тираж 100 экз. Заказ №

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)»
Изд-во СПбГТИ(ТУ)

190013, г. Санкт-Петербург, Московский пр., д. 26