МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра "Прикладная математика-1"

Г.А. Зверкина, А.П. Иванова

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ЧАСТЬ 2

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине "Математический анализ"

Для студентов ИУИТ и ИСУТЭ

Москва – 2009

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра "Прикладная математика-1"

Г.А. Зверкина, А.П. Иванова

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ЧАСТЬ 2

Рекомендовано редакционно-издательским Советом университета в качестве методических указаний для студентов ИУИТ и ИСУТЭ

Москва – 2009

УДК 517
З 43

Зверкина Г.А., Иванова А.П. – Неопределённые интегралы. Часть 2. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине "Математический анализ" – М.: МИИТ, 2009. – 44 с.

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине "Математический анализ" для студентов ИУИТ и ИСУТЭ содержат три задания по теме "Неопределённые интегралы". Первое задание содержит четыре примера на интегрирование по частям. Второе задание содержит четыре интеграла от рациональных функций. Третье задание состоит из шести интегралов от тригонометрических функций. Перед каждым заданием подробно разобраны типовые примеры. Каждое задание включает шестьдесят вариантов, что обеспечивает индивидуальный характер работы студентов.

Для удобства ссылок нумерация параграфов и формул единая в частях 1 и 2 методических указаний.

Содержание

3 Интегрирование по частям

К сожалению, не существует формулы, выражающей интеграл от произведения функций через интегралы от сомножителей. Тем не менее, если проинтегрировать обе части формулы производной произведения двух функций $(uv)' = u'v + uv'$, получится

$$uv = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx,$$

т.е.

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx,$$

или, что то же,

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{23}$$

Формула (23) называется ***формулой интегрирования по частям***. При применении формулы (23) подынтегральная функция разлагается на два множителя (u и v'), из которых один дифференцируется, а другой интегрируется. После такого преобразования иногда может получиться табличный интеграл или интеграл более простой, чем исходный. Рассмотрим несколько примеров. При вычислении интеграла

$$\int x \ln x\,dx$$

выгодно продифференцировать $\ln x$, так как тогда получится степенная функция $\frac{1}{x}$, которая проще логарифмической. При этом второй множитель (x) придется интегрировать, но он и после интегрирования

останется степенной функцией. Итак, обозначаем $u = \ln x$, $dv = x\,dx$ откуда находим $du = \frac{1}{x}\,dx$, $v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$ и окончательно имеем:

$$\int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Отметим, что при вычислении v не надо писать произвольную постоянную (т.е. писать $v = \frac{x^2}{2} + C$).

Аналогичным образом стараются продифференцировать функции $\operatorname{arctg} x$ и $\arcsin x$, так как после этого получаются более простые функции.

При вычислении интегралов вида $\int P_n(x)\sin(ax)\,dx$, $\int P_n(x)\cos(ax)\,dx$, $\int P_n(x)e^{ax}\,dx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n от x, – следует дифференцировать многочлен, так как после дифференцирования его степень понизится на единицу. Рассмотрим пример:

$$\int (x^2{+}1)\cos x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2+1, & dv = \cos x\,dx \\ du = 2x\,dx, & v = \int \cos x\,dx = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= (x^2+1)\sin x - \int 2x \sin x\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = 2x, & dv = \sin x\,dx \\ du = 2\,dx, & v = \int \sin x\,dx = -\cos x \end{array} \right| = (x^2+1)\sin x +$$

$$+2x\cos x - \int 2\cos x\,dx = (x^2{+}1)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

В рассмотренном примере пришлось два раза интегрировать по частям.

Варианты задания № 4.

Найти неопределённые интегралы, использовав формулу интегрирования по частям (23):

4.1 $\int x^3\cos(7x)\,dx$ $\int x^3e^{-x}\,dx$ $\int x^8\ln(3x)\,dx$
$\int \arcsin x\,dx$

4.2 $\int x^3\sin(6x)\,dx$ $\int x^2e^{10x}\,dx$ $\int x^7\ln(10x)\,dx$
$\int \arccos(6x)\,dx$

4.3 $\int x^3\sin(6x)\,dx$ $\int x^2e^{4x}\,dx$ $\int x^5\ln x\,dx$
$\int \mathrm{arcctg}(2x)\,dx$

4.4 $\int x^2\sin(7x)\,dx$ $\int x^3e^{7x}\,dx$ $\int x^6\ln(2x)\,dx$
$\int \ln(x+\sqrt{x^2+10})\,dx$

4.5 $\int x^3\cos(3x)\,dx$ $\int x^3e^{x}\,dx$ $\int x^{11}\ln(7x)\,dx$
$\int \arcsin(4x)\,dx$

4.6 $\int x^2\sin(4x)\,dx$ $\int x^2e^{-8x}\,dx$ $\int x^8\ln(10x)\,dx$
$\int \arccos(6x)\,dx$

4.7 $\int x^3\sin(6x)\,dx$ $\int x^3e^{8x}\,dx$ $\int x^9\ln(6x)\,dx$
$\int \mathrm{arcctg}(9x)\,dx$

4.8 $\int x^3\sin(8x)\,dx$ $\int x^2e^{2x}\,dx$ $\int x^2\ln(7x)\,dx$
$\int \ln(x+\sqrt{x^2-4})\,dx$

4.9 $\int x^3\cos(8x)\,dx$ $\int x^2e^{-6x}\,dx$ $\int x^4\ln(5x)\,dx$
$\int \arcsin(4x)\,dx$

4.10 $\int x^3\sin(10x)\,dx$ $\int x^2e^{-6x}\,dx$ $\int x^4\ln(4x)\,dx$
$\int \arccos(8x)\,dx$

4.11 $\int x^3\sin(4x)\,dx$ $\int x^3e^{-2x}\,dx$ $\int x^2\ln(4x)\,dx$
$\int \mathrm{arcctg}(4x)\,dx$

4.12 $\int x^3\sin(3x)\,dx$ $\int x^3e^{-9x}\,dx$ $\int x^4\ln(9x)\,dx$
$\int \ln(x+\sqrt{x^2+7})\,dx$

4.13 $\int x^3\cos(12x)\,dx$ $\int x^3e^{7x}\,dx$ $\int x^{11}\ln(3x)\,dx$
$\int \arcsin(6x)\,dx$

4.14 $\int x^2\sin(12x)\,dx$ $\int x^2e^{-2x}\,dx$ $\int x^2\ln(8x)\,dx$
$\int \arccos(5x)\,dx$

4.15 $\int x^2\sin(10x)\,dx$ $\int x^3e^{-6x}\,dx$ $\int x^3\ln x\,dx$
$\int \mathrm{arcctg}(4x)\,dx$

4.16 $\int x^3\sin(3x)\,dx$ $\int x^2e^{-x}\,dx$ $\int x^4\ln(9x)\,dx$
$\int \ln(x+\sqrt{x^2-6})\,dx$

4.17 $\int x^3\cos(9x)\,dx$ $\int x^3e^{-10x}\,dx$ $\int x^9\ln(5x)\,dx$
$\int \arcsin(3x)\,dx$

4.18 $\int x^3\sin(7x)\,dx$ $\int x^3e^{-4x}\,dx$ $\int x^5\ln(9x)\,dx$
$\int \arccos(8x)\,dx$

4.19 $\int x^2\sin(5x)\,dx$ $\int x^2e^{-5x}\,dx$ $\int x^{11}\ln(5x)\,dx$
$\int \mathrm{arcctg}\, x\,dx$

4.20 $\int x^2\sin(12x)\,dx$ $\int x^3e^{7x}\,dx$ $\int x^6\ln x\,dx$
$\int \ln(x+\sqrt{x^2-10})\,dx$

4.21 $\int x^3\cos(7x)\,dx$ $\int x^2e^{x}\,dx$ $\int x^7\ln(10x)\,dx$
$\int \arcsin(6x)\,dx$

4.22 $\int x^3\sin(7x)\,dx$ $\int x^3e^{-9x}\,dx$ $\int x^6\ln(6x)\,dx$
$\int \arccos(2x)\,dx$

4.23 $\int x^2 \sin(3x)\,dx$ $\int x^3 e^{4x}\,dx$ $\int x^{11} \ln(10x)\,dx$
$\int \operatorname{arcctg}(6x)\,dx$

4.24 $\int x^2 \sin(12x)\,dx$ $\int x^2 e^{-x}\,dx$ $\int x^{10} \ln(2x)\,dx$
$\int \ln(x + \sqrt{x^2+5})\,dx$

4.25 $\int x^2 \cos(3x)\,dx$ $\int x^3 e^{x}\,dx$ $\int x^{5} \ln(2x)\,dx$
$\int \arcsin(8x)\,dx$

4.26 $\int x^2 \sin(6x)\,dx$ $\int x^2 e^{-10x}\,dx$ $\int x^{3} \ln(8x)\,dx$
$\int \arccos(5x)\,dx$

4.27 $\int x^3 \sin(3x)\,dx$ $\int x^2 e^{-6x}\,dx$ $\int x^{10} \ln(9x)\,dx$
$\int \operatorname{arcctg}(9x)\,dx$

4.28 $\int x^3 \sin(11x)\,dx$ $\int x^2 e^{x}\,dx$ $\int x^{4} \ln(6x)\,dx$
$\int \ln(x + \sqrt{x^2-8})\,dx$

4.29 $\int x^2 \cos(6x)\,dx$ $\int x^2 e^{-8x}\,dx$ $\int x^{6} \ln(3x)\,dx$
$\int \arcsin(2x)\,dx$

4.30 $\int x^2 \sin(5x)\,dx$ $\int x^3 e^{-8x}\,dx$ $\int x^{10} \ln x\,dx$
$\int \arccos(4x)\,dx$

4.31 $\int x^2 \sin(10x)\,dx$ $\int x^3 e^{6x}\,dx$ $\int x^{8} \ln(4x)\,dx$
$\int \operatorname{arcctg}(8x)\,dx$

4.32 $\int x^2 \sin(4x)\,dx$ $\int x^2 e^{-10x}\,dx$ $\int x^{8} \ln(7x)\,dx$
$\int \ln(x + \sqrt{x^2-7})\,dx$

4.33 $\int x^2 \cos(5x)\,dx$ $\int x^3 e^{7x}\,dx$ $\int x^{10} \ln(3x)\,dx$
$\int \arcsin(2x)\,dx$

4.34 $\int x^2 \sin(6x)\,dx$ $\int x^3 e^{x}\,dx$ $\int x^{7} \ln(2x)\,dx$
$\int \arccos(7x)\,dx$

4.35 $\int x^3 \sin(4x)\,dx$ $\int x^3 e^{-6x}\,dx$ $\int x^{9} \ln(2x)\,dx$
$\int \operatorname{arcctg}(7x)\,dx$

4.36 $\int x^3 \sin(12x)\,dx$ $\int x^2 e^{x}\,dx$ $\int x^{8} \ln(8x)\,dx$
$\int \ln(x + \sqrt{x^2+10})\,dx$

4.37 $\int x^3 \cos(5x)\,dx$ $\int x^3 e^{-7x}\,dx$ $\int x^{4} \ln(9x)\,dx$
$\int \arcsin(7x)\,dx$

4.38 $\int x^2 \sin(11x)\,dx$ $\int x^2 e^{x}\,dx$ $\int x^{5} \ln x\,dx$
$\int \arccos(10x)\,dx$

4.39 $\int x^3 \sin(4x)\,dx$ $\int x^3 e^{-x}\,dx$ $\int x^{8} \ln x\,dx$
$\int \operatorname{arcctg}(7x)\,dx$

4.40 $\int x^2 \sin(12x)\,dx$ $\int x^2 e^{-8x}\,dx$ $\int x^{2} \ln(10x)\,dx$
$\int \ln(x + \sqrt{x^2+2})\,dx$

4.41 $\int x^3 \cos(11x)\,dx$ $\int x^2 e^{x}\,dx$ $\int x^{9} \ln(9x)\,dx$
$\int \arcsin x\,dx$

4.42 $\int x^2 \sin(8x)\,dx$ $\int x^3 e^{10x}\,dx$ $\int x^{2} \ln(2x)\,dx$
$\int \arccos(2x)\,dx$

4.43 $\int x^3 \sin(9x)\,dx$ $\int x^2 e^{-8x}\,dx$ $\int x^{3} \ln(10x)\,dx$
$\int \operatorname{arcctg}(2x)\,dx$

4.44 $\int x^2 \sin(5x)\,dx$ $\int x^3 e^{3x}\,dx$ $\int x^{3} \ln(4x)\,dx$
$\int \ln(x + \sqrt{x^2+10})\,dx$

4.45 $\int x^3 \cos(8x)\,dx$ $\int x^3 e^{-x}\,dx$ $\int x^5 \ln(2x)\,dx$
$\int \arcsin(6x)\,dx$

4.46 $\int x^3 \sin(12x)\,dx$ $\int x^2 e^{-8x}\,dx$ $\int x^{11} \ln(3x)\,dx$
$\int \arccos(5x)\,dx$

4.47 $\int x^2 \sin(3x)\,dx$ $\int x^2 e^{-9x}\,dx$ $\int x^2 \ln(6x)\,dx$
$\int \mathrm{arcctg}(7x)\,dx$

4.48 $\int x^2 \sin(6x)\,dx$ $\int x^2 e^{10x}\,dx$ $\int x^7 \ln(4x)\,dx$
$\int \ln(x + \sqrt{x^2-3})\,dx$

4.49 $\int x^2 \cos(8x)\,dx$ $\int x^2 e^{6x}\,dx$ $\int x^5 \ln(5x)\,dx$
$\int \arcsin(9x)\,dx$

4.50 $\int x^3 \sin(10x)\,dx$ $\int x^3 e^{-9x}\,dx$ $\int x^6 \ln(3x)\,dx$
$\int \arccos x\,dx$

4.51 $\int x^2 \sin(11x)\,dx$ $\int x^3 e^{-2x}\,dx$ $\int x^8 \ln(3x)\,dx$
$\int \mathrm{arcctg}(6x)\,dx$

4.52 $\int x^2 \sin(11x)\,dx$ $\int x^2 e^{3x}\,dx$ $\int x^2 \ln(5x)\,dx$
$\int \ln(x + \sqrt{x^2-8})\,dx$

4.53 $\int x^3 \cos(5x)\,dx$ $\int x^2 e^{-x}\,dx$ $\int x^7 \ln(10x)\,dx$
$\int \arcsin x\,dx$

4.54 $\int x^2 \sin(7x)\,dx$ $\int x^3 e^{-10x}\,dx$ $\int x^2 \ln(4x)\,dx$
$\int \arccos x\,dx$

4.55 $\int x^2 \sin(9x)\,dx$ $\int x^2 e^{x}\,dx$ $\int x^2 \ln(7x)\,dx$
$\int \mathrm{arcctg}(8x)\,dx$

4.56 $\int x^2 \sin(12x)\,dx$ $\int x^3 e^{4x}\,dx$ $\int x^2 \ln(3x)\,dx$
$\int \ln(x + \sqrt{x^2+2})\,dx$

4.57 $\int x^3 \cos(7x)\,dx$ $\int x^3 e^{-5x}\,dx$ $\int x^9 \ln(2x)\,dx$
$\int \arcsin(6x)\,dx$

4.58 $\int x^3 \sin(11x)\,dx$ $\int x^3 e^{-10x}\,dx$ $\int x^2 \ln(2x)\,dx$
$\int \arccos(10x)\,dx$

4.59 $\int x^3 \sin(5x)\,dx$ $\int x^3 e^{-x}\,dx$ $\int x^2 \ln(5x)\,dx$
$\int \mathrm{arcctg}(4x)\,dx$

4.60 $\int x^2 \sin(7x)\,dx$ $\int x^3 e^{-9x}\,dx$ $\int x^{10} \ln(8x)\,dx$
$\int \ln(x + \sqrt{x^2-10})\,dx$

4 Интегрирование рациональных дробей

4.1 Разложение дробно-рациональной функции на простейшие рациональные дроби

Напомним, что дробно-рациональная функция – это отношение двух многочленов

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0 x^m + \ldots + b_m}{a_0 x^n + \ldots + a_n}. \tag{27}$$

Если $m < n$, то дробь называется ***правильной***, в противном случае – ***неправильной***. Неправильную дробь всегда можно (а при интегрировании и нужно) представить в виде суммы целой части (многочлена) и правильной дроби. Это можно сделать, разделив числитель на знаменатель столбиком, например, поделим $x^2+2x-12$ на $x+5$.

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x-12 & x+5 \\ \underline{x^2+5x} & \overline{x-3} \\ -3x-12 & \\ \underline{-3x-15} & \\ 3 & \end{array}$$

Получим
$$\frac{x^2+2x-12}{x+5} = x-3+\frac{3}{x+5},$$
следовательно,
$$\int \frac{x^2+2x-12}{x+5}\,dx = \int \left(x-3+\frac{3}{x+5}\right)\,dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} - 3x + 3\ln|x+5| + C.$$

Пусть дробь (27) правильная, причем знаменатель разложен на множители. Тогда эту дробь можно представить в виде суммы простейших рациональных дробей

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} =$$
$$= \frac{Q_m(x)}{a_0(x-x_1)^{\alpha_1}\ldots(x-x_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}} =$$
$$= \frac{A_1}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{\alpha_1-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha_1}}{x-x_1} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{D_1}{(x-x_r)^{\alpha_r}} + \frac{D_2}{(x-x_r)^{\alpha_r-1}} + \ldots + \frac{D_{\alpha_r}}{x-x_r} +$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}} + \ldots + \frac{M_{\beta_1}x+N_{\beta_1}}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots$$
$$+\frac{U_1x+V_1}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}} + \frac{U_2x+V_2}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}} + \ldots + \frac{U_{\beta_s}x+V_{\beta_s}}{x^2+p_sx+q_s},$$

Здесь квадратные трехчлены $x^2+p_ix+q_i$ имеют только комплексные корни.

4.2 Интегрирование рациональных функций

Как мы видели, всякую дробно-рациональную функцию можно представить в виде суммы целой части (если дробь неправильная) и простейших рациональных дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}} \quad \text{и} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\beta}},$$

интегрирование которых подробно разобрано далее.

Задание № 5.

Вычислим интеграл

$$\int \frac{4}{(x-3)(2x+5)}\,dx. \tag{28}$$

Знаменатель дроби $\frac{4}{(x-3)(2x+5)}$ имеет два простых действительных корня $x_1 = 3$ и $x_2 = -2.5$. Разложение дроби на сумму простейших дробей ищем в виде:

$$\frac{4}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5}, \tag{29}$$

где A и B — неопределенные коэффициенты. Приводя в (29) к общему знаменателю правую часть, получим

$$\frac{4}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A(2x+5)+B(x-3)}{(x-3)(2x+5)}. \tag{30}$$

Приравнивая числители дробей, получим тождество

$$4 = A(2x+5) + B(x-3). \tag{31}$$

Перепишем его в виде

$$4 = (2A + B)x + (5A - 3B). \qquad (32)$$

Рассмотрим способ нахождения неопределенных коэффициентов ***методом приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях переменной*** x. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x многочленов, стоящих в левой и правой частях тождества (31):

$$\begin{array}{c|l} x^1 & 0 = 2A + B, \\ x^0 & 4 = 5A - 3B. \end{array}$$

Получим систему двух уравнений с двумя неизвестными A и B:

$$\begin{cases} 0 = 2A + B, \\ 4 = 5A - 3B. \end{cases} \qquad (33)$$

Решим систему (33) и получим: $A = \frac{4}{11}$, $B = -\frac{8}{11}$.

Часто бывает полезно в равенство (31) подставлять вместо x некоторые специально подобранные числа (обычно действительныые корни знаменателя рациональной дроби, а также числа 0, ± 1 и другие) – ***метод подстановки***. В результате получаются уравнения относительно искомых коэффициентов.

В рассматриваемом примере подставим в (31) $x = 3$, получим $4 = 11A$, откуда $A = \frac{4}{11}$. Подставим $x = -2.5$ получим $4 = -5.5B$, откуда $B = -\frac{8}{11}$.

После того, как неопределенные коэффициенты в разложении (29) найдены, исходный интеграл сводится к вычислению двух табличных интегралов, а именно:

$$\int \frac{4}{(x-3)(2x+5)}\,dx = \frac{4}{11}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{8}{11}\int \frac{dx}{2x+5} =$$

$$= \frac{4}{11}\ln|x-3| - \frac{8}{11}\,\frac{1}{2}\ln|2x+5| + C = \frac{4}{11}\ln\left|\frac{x-3}{2x+5}\right| + C.$$

Варианты задания № 5.

5.1	$\int \frac{-9x-23}{x^2+4x-21}\,dx$	5.2	$\int \frac{10x+6}{x^2-3x-10}\,dx$
5.3	$\int \frac{-11x+31}{x^2-5x-6}\,dx$	5.4	$\int \frac{5x-79}{x^2-x-72}\,dx$
5.5	$\int \frac{-5x+30}{x^2-12x+36}\,dx$	5.6	$\int \frac{2x-47}{x^2-7x+6}\,dx$
5.7	$\int \frac{17x+103}{x^2+12x+35}\,dx$	5.8	$\int \frac{3x-30}{x^2-17x+72}\,dx$
5.9	$\int \frac{-10x+4}{x^2-2x-8}\,dx$	5.10	$\int \frac{-3x+33}{x^2-2x-3}\,dx$
5.11	$\int \frac{14x+14}{x^2-2x-48}\,dx$	5.12	$\int \frac{4x+96}{x^2+6x-27}\,dx$
5.13	$\int \frac{-2x-36}{x^2-4x-12}\,dx$	5.14	$\int \frac{-3x+42}{x^2-3x-4}\,dx$
5.15	$\int \frac{4x-25}{x^2-11x+28}\,dx$	5.16	$\int \frac{14x-12}{x^2-x-6}\,dx$
5.17	$\int \frac{-6x+9}{x^2+3x-18}\,dx$	5.18	$\int \frac{-5x+24}{x^2-3x-28}\,dx$
5.19	$\int \frac{-13x-25}{x^2+2x-15}\,dx$	5.20	$\int \frac{-x+33}{x^2-x-42}\,dx$
5.21	$\int \frac{-16x-130}{x^2+16x+63}\,dx$	5.22	$\int \frac{-6x-87}{x^2+3x-40}\,dx$
5.23	$\int \frac{-6x+48}{x^2-12x+35}\,dx$	5.24	$\int \frac{14x+119}{x^2+17x+72}\,dx$

5.25 $\int \frac{-10x+39}{x^2-9x+18}\,dx$ 5.26 $\int \frac{5x+43}{x^2-7x-18}\,dx$

5.27 $\int \frac{-3x-42}{x^2+2x-8}\,dx$ 5.28 $\int \frac{-8x+62}{x^2+2x-48}\,dx$

5.29 $\int \frac{-4x-4}{x^2+14x+45}\,dx$ 5.30 $\int \frac{6x-42}{x^2+6x-27}\,dx$

5.31 $\int \frac{12x-60}{x^2-10x+24}\,dx$ 5.32 $\int \frac{9x+62}{x^2+11x+24}\,dx$

5.33 $\int \frac{-3x-25}{x^2+8x+15}\,dx$ 5.34 $\int \frac{-4x+32}{x^2-16x+64}\,dx$

5.35 $\int \frac{13x-51}{x^2-4x-21}\,dx$ 5.36 $\int \frac{13x-49}{x^2-6x+5}\,dx$

5.37 $\int \frac{-7x-4}{x^2+5x+4}\,dx$ 5.38 $\int \frac{9x-33}{x^2-7x+12}\,dx$

5.39 $\int \frac{-13x-57}{x^2+9x+20}\,dx$ 5.40 $\int \frac{-7x+49}{x^2-14x+49}\,dx$

5.41 $\int \frac{-9x+30}{x^2-9x+8}\,dx$ 5.42 $\int \frac{-12x-22}{x^2+4x+3}\,dx$

5.43 $\int \frac{-10x-29}{x^2+3x-10}\,dx$ 5.44 $\int \frac{10x+72}{x^2+15x+56}\,dx$

5.45 $\int \frac{-12x-12}{x^2+2x-24}\,dx$ 5.46 $\int \frac{6x-38}{x^2-10x+9}\,dx$

5.47 $\int \frac{-3x+36}{x^2+3x-18}\,dx$ 5.48 $\int \frac{-2x+87}{x^2+x-30}\,dx$

5.49 $\int \frac{5x-38}{x^2-4x-12}\,dx$ 5.50 $\int \frac{-9x+1}{x^2-8x-9}\,dx$

5.51 $\int \frac{2x+11}{x^2-7x-8}\,dx$ 5.52 $\int \frac{8x-51}{x^2-15x+54}\,dx$

5.53 $\int \frac{-3x-21}{x^2+14x+49}\,dx$ 5.54 $\int \frac{-5x-18}{x^2+3x-10}\,dx$

5.55 $\int \frac{3x-42}{x^2-8x+12}\,dx$ 5.56 $\int \frac{-x+71}{x^2+8x-9}\,dx$

5.57 $\int \frac{9x-11}{x^2-4x-45}\,dx$ 5.58 $\int \frac{-2x-38}{x^2+5x-24}\,dx$

5.59 $\int \frac{-5x-87}{x^2+x-42}\,dx$ 5.60 $\int \frac{-8x-56}{x^2+14x+45}\,dx$

Задание № 6.

Рассмотрим случай, когда знаменатель рациональной дроби имеет кратные действительные корни.

Вычислим интеграл

$$\int \frac{x^2+5}{(x+1)(x-2)^3}\,dx. \qquad (34)$$

Разложение дроби $\frac{x^2+5}{(x+1)(x-2)^3}$ на сумму простейших дробей ищем в виде

$$\frac{x^2+5}{(x+1)(x-2)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2} + \frac{B_3}{(x-2)^3}, \qquad (35)$$

где A, B_1, B_2 и B_3 — неопределенные коэффициенты. Приводя в (35) к общему знаменателю правую часть, получим

$$\frac{x^2+5}{(x+1)(x-2)^3} = \frac{A(x-2)^3 + B_1(x+1)(x-2)^2 + B_2(x+1)(x-2) + B_3(x+1)}{(x+1)(x-2)^3}. \qquad (36)$$

Приравнивая числители дробей, получаем тождество

$$x^2+5 = A(x-2)^3 + B_1(x+1)(x-2)^2 + B_2(x+1)(x-2) + B_3(x+1). \qquad (37)$$

Найдем коэффициенты A, B_1, B_2 и B_3, для этого в тождестве (37) положим $x = 2$, получим

$$2B_3 = 9, \quad B_3 = 3,$$

$$x = -1: \quad -27A = 6, \quad A = -\tfrac{2}{9}.$$

При подстановке в (37) $x = 0$ и $x = 1$, а также уже найденных $A = -\frac{2}{9}$ и $B_3 = 3$, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2B_1 - B_2 = \frac{1}{9}, \\ B_1 - B_2 = -\frac{1}{9}. \end{cases} \qquad (38)$$

Решим систему (38) и получим: $B_1 = \frac{2}{9}$, $B_2 = \frac{1}{3}$.

Исходный интеграл (34) сводится к вычислению четых табличных интегралов, а именно:

$$\int \frac{x^2+5}{(x+1)(x-2)^3}\,dx = -\frac{2}{9}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-2} + \\ + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-2)^2} + 3\int \frac{dx}{(x-2)^3} = -\frac{2}{9}\ln|x+1| + \\ + \frac{2}{9}\ln|x-2| - \frac{1}{3(x-2)} - \frac{3}{2(x-2)^2} + C. \qquad (39)$$

Варианты задания № 6.

6.1. $\int \frac{-x^3-18x^2-28x+4}{(x+4)(x+1)^3}\,dx$ 6.2. $\int \frac{-2x^3-17x^2-16x+5}{(x-3)(x+2)^3}\,dx$

6.3. $\int \frac{2x^3-5x^2-20x+59}{(x-4)^2(x-1)^2}\,dx$ 6.4. $\int \frac{-5x^3-11x^2+36x+26}{(x-3)^2(x+2)^2}\,dx$

6.5. $\int \frac{3x^3+19x^2+29x+34}{(x-5)(x+2)^3}\,dx$ 6.6. $\int \frac{-2x^3-11x^2+20x-32}{(x-3)^2(x+2)^2}\,dx$

6.7. $\int \frac{3x^3-24x^2+56x-28}{(x-5)(x-2)^3}\,dx$ 6.8. $\int \frac{-3x^3-8x^2+15}{(x+3)(x+1)^3}\,dx$

6.9. $\int \frac{x^3-7x^2-40x-96}{(x+5)^2(x-2)^2}\,dx$ 6.10. $\int \frac{-3x^3+30x^2-85x+68}{(x+4)(x-2)^3}\,dx$

6.11. $\int \frac{4x^3+22x^2+35x+17}{(x+5)(x+2)^3}\,dx$ 6.12. $\int \frac{x^3-27x-62}{(x+4)^2(x+1)^2}\,dx$

6.13. $\int \frac{4x^3+13x^2-36x+29}{(x+4)(x-1)^3}\,dx$ 6.14. $\int \frac{-x^3+11x^2-3x-36}{(x+4)(x-2)^3}\,dx$

6.15. $\int \frac{-x^3+x^2+8x+9}{(x+2)(x+1)^3}\,dx$ 6.16. $\int \frac{5x^3+18x^2+23x+16}{(x+4)(x+1)^3}\,dx$

6.17. $\int \frac{x^3+6x^2-9x+1}{(x-4)(x+1)^3}\,dx$ 6.18. $\int \frac{-3x^3+11x^2+x+62}{(x-4)^2(x+1)^2}\,dx$

6.19. $\int \frac{7x^3+24x^2+26x+8}{(x+2)(x+1)^3}\,dx$ 6.20. $\int \frac{3x^3-8x^2+5x-15}{(x+2)(x-1)^3}\,dx$

6.21. $\int \frac{3x^2+5x+1}{(x+2)(x+1)^3}\,dx$ 6.22. $\int \frac{3x^3+30x^2+96x+108}{(x+4)^2(x+2)^2}\,dx$

6.23. $\int \frac{4x^3+11x^2+10x+19}{(x-3)(x+1)^3}\,dx$ 6.24. $\int \frac{2x^3-3x^2+20x-128}{(x-5)^2(x+2)^2}\,dx$

6.25. $\int \frac{-3x^3+4x^2+21x-27}{(x+5)(x-2)^3}\,dx$ 6.26. $\int \frac{-x^3+7x^2-13x-12}{(x+4)(x-2)^3}\,dx$

6.27. $\int \frac{-x^3+4x^2-8x+12}{(x-4)^2(x-2)^2}\,dx$ 6.28. $\int \frac{-4x^3-17x^2-21x-7}{(x+2)(x+1)^3}\,dx$

6.29. $\int \frac{-3x^3-5x^2-14x-24}{(x-3)(x+1)^3}\,dx$ 6.30. $\int \frac{-2x^3+19x^2-56x+54}{(x-3)^2(x-2)^2}\,dx$

6.31. $\int \frac{4x^3-8x^2-2x+8}{(x-2)(x-1)^3}\,dx$ 6.32. $\int \frac{-4x^3+27x^2-65x+59}{(x-3)(x-2)^3}\,dx$

6.33. $\int \frac{3x^3+7x^2-x-8}{(x+2)^2(x+1)^2}\,dx$ 6.34. $\int \frac{-3x^3-17x^2-21x+1}{(x+3)(x+1)^3}\,dx$

6.35. $\int \frac{2x^3+16x^2+47x+49}{(x+3)(x+2)^3}\,dx$ 6.36. $\int \frac{5x^3-40x^2+104x-90}{(x-3)^2(x-2)^2}\,dx$

6.37. $\int \frac{2x^3+17x^2+42x+42}{(x-3)(x+2)^3}\,dx$ 6.38. $\int \frac{-3x^3+19x^2-32x+24}{(x+4)(x-2)^3}\,dx$

6.39. $\int \frac{4x^3-7x^2-14x-21}{(x-2)^2(x+1)^2}\,dx$ 6.40. $\int \frac{8x^3-8x^2-13x-7}{(x+3)(x-1)^3}\,dx$

6.41. $\int \frac{-5x^3+20x^2-x-19}{(x+4)(x-1)^3}\,dx$ 6.42. $\int \frac{10x^3+65x^2+143x+109}{(x+3)(x+2)^3}\,dx$

6.43. $\int \frac{2x^3-4x^2+8x+3}{(x+2)^2(x-1)^2}\,dx$ 6.44. $\int \frac{3x^3+16x^2+42x+32}{(x-4)(x+2)^3}\,dx$

6.45. $\int \frac{x^3+11x^2+34x+33}{(x+3)^2(x+2)^2}\,dx$ 6.46. $\int \frac{-6x^3+30x^2-49x+20}{(x+4)(x-2)^3}\,dx$

6.47. $\int \frac{2x^3+9x^2+4x-9}{(x+5)(x+2)^3}\,dx$ 6.48. $\int \frac{-4x^3-4x^2+50x-101}{(x+5)^2(x-2)^2}\,dx$

6.49. $\int \frac{2x^3-5x^2-x+10}{(x-3)(x-1)^3}\,dx$ 6.50. $\int \frac{3x^3+28x^2+78x+58}{(x-3)(x+2)^3}\,dx$

6.51. $\int \frac{3x^3-2x^2-2x-119}{(x-5)^2(x+2)^2}\,dx$ 6.52. $\int \frac{-7x^3+36x^2-54x+34}{(x-4)(x-1)^3}\,dx$

6.53. $\int \frac{5x^3+25x^2+26x-5}{(x+5)(x+2)^3}\,dx$ 6.54. $\int \frac{2x^3+3x^2+4x+64}{(x+3)^2(x-2)^2}\,dx$

6.55. $\int \frac{x^3-7x^2+6x-20}{(x+3)(x-1)^3}\,dx$ 6.56. $\int \frac{-4x^3+25x^2-55x+44}{(x-3)(x-2)^3}\,dx$

6.57. $\int \frac{x^3-8x^2+16x-6}{(x-3)^2(x-2)^2}\,dx$ 6.58. $\int \frac{6x^3+29x^2+47x+5}{(x-5)(x+2)^3}\,dx$

6.59. $\int \frac{x^3-5x^2+16x-8}{(x+4)(x-2)^3}\,dx$ 6.60. $\int \frac{5x^3+46x^2+100x+20}{(x+5)^2(x+2)^2}\,dx$

Задание № 7.

Вычислим интеграл

$$\int \frac{x-1}{(x+3)(x^2+2x+4)}\,dx. \tag{40}$$

Знаменатель дроби $\frac{x-1}{(x+3)(x^2+2x+4)}$ имеет один действительный $(x=-3)$ и два комплексных корня, так как дискриминант выражения x^2+2x+4 отрицательный. Следовательно, разложение на простейшие дроби будем искать в виде

$$\frac{x-1}{(x+3)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+c}{x^2+2x+4}, \tag{41}$$

где A, B и C — неопределенные коэффициенты. Приводя в (41) к общему знаменателю правую часть, получим

$$\frac{x-1}{(x+3)(x^2+2x+4)} = \frac{A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x+3)}{(x+3)(x^2+2x+4)}. \tag{42}$$

Приравнивая числители дробей, получим тождество

$$x-1 = A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x+3), \tag{43}$$

перепишем его в виде

$$x-1 = (A+B)x^2+(2A+3B+C)x+(4A+3C) \tag{44}$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x. Получим систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} A+B=0, \\ 2A+3B+C=1, \\ 4A+3C=-1. \end{cases} \tag{45}$$

Решим систему (45) и получим: $A=-\frac{4}{7}$, $B=\frac{4}{7}$, $C=\frac{3}{7}$.

Следовательно,

$$\int \frac{x-1}{(x+3)(x^2+2x+4)}\,dx = -\frac{4}{7}\int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{\frac{4}{7}x+\frac{3}{7}}{x^2+2x+4}\,dx. \tag{46}$$

Первый интеграл в правой части (46) табличный и равен $-\frac{4}{7}\ln|x+3|$, а второй интеграл рассмотрим подробно, для удобства вынеся $\frac{1}{7}$ за знак интеграла. Имеем

$$\int \frac{4x+3}{x^2+2x+4}\,dx. \tag{47}$$

Чтобы взять интеграл (47), выделим полный квадрат в знаменателе, а затем сделаем замену переменных,

получим
$$\int \frac{4x+3}{(x+1)^2+3}\,dx = \int \frac{4(x+1)-1}{(x+1)^2+3}\,d(x+1). \qquad (48)$$
Обозначим $x+1=t$, получим
$$\int \frac{4t-1}{t^2+3}\,dt = 2\int \frac{2t\,dt}{t^2+3} - \int \frac{dt}{t^2+3} = 2\int \frac{d(t^2+3)}{t^2+3} -$$
$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} = 2\ln|t^2+3| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}. \quad (49)$$
Делая в (49) обратную замену, получаем, с учетом уже проинтегрированного слагаемого из (46) и вынесенной константы $\frac{1}{7}$, ответ:
$$\int \frac{x-1}{(x+3)(x^2+2x+4)}\,dx = -\frac{4}{7}\ln|x+3| +$$
$$+\frac{2}{7}\ln(x^2+2x+4) - \frac{1}{7\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}. \qquad (50)$$
Заметим, что в ответе у второго логарифма аргумент (x^2+2x+4) всегда положителен, поэтому модуль можно не писать.

Замечание 1. Иногда целесообразно применять ***комбинированный метод***: уравнения для неопределенных коэффициентов можно получать как подставляя значения переменной x, так и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях (при этом следует следить, чтобы количество линейно независимых уравнений совпадало с количеством неизвестных). Например, тождество (43) приводит к системе
$$\begin{array}{l|ll} x=-3 & -4 & =7A, \\ x=0 & -1 & =4A+3C, \\ x^2 & \ \ 0 & =A+B. \end{array}$$

Замечание 2. Отметим, что в некоторых случаях нет необходимости составлять и решать систему уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов, например,
$$\frac{3x+7}{(x-2)^4} = \frac{3(x-2)+13}{(x-2)^4} = \frac{3}{(x-2)^3} + \frac{13}{(x-2)^4}.$$

Варианты задания № 7.

7.1	$\int \frac{-11x^2-24x-64}{(x+2)(x^2+8x+32)}\,dx$	7.2	$\int \frac{-6x^2+10x+32}{(x-1)(x^2+4x+13)}\,dx$
7.3	$\int \frac{-10x^2+1x-61}{(x+1)(x^2-4x+13)}\,dx$	7.4	$\int \frac{-4x^2+5x+35}{(x-1)(x^2+4x+13)}\,dx$
7.5	$\int \frac{-5x^2+18x+107}{(x+2)(x^2+6x+25)}\,dx$	7.6	$\int \frac{10x^2+13x+54}{(x+2)(x^2-6x+18)}\,dx$
7.7	$\int \frac{6x^2-32x}{(x-2)(x^2+4x+8)}\,dx$	7.8	$\int \frac{-4x^2+8x+48}{(x+2)(x^2+4x+8)}\,dx$
7.9	$\int \frac{9x^2+9x+30}{(x+1)(x^2+4x+13)}\,dx$	7.10	$\int \frac{-11x^2-34x-83}{(x+1)(x^2+6x+25)}\,dx$
7.11	$\int \frac{10x^2-24x+76}{(x-2)(x^2-6x+25)}\,dx$	7.12	$\int \frac{-9x^2-14x-16}{(x-1)(x^2+4x+8)}\,dx$
7.13	$\int \frac{-4x^2+24}{(x-2)(x^2-4x+8)}\,dx$	7.14	$\int \frac{-5x^2-38x+42}{(x+1)(x^2-6x+18)}\,dx$
7.15	$\int \frac{3x^2+24x-18}{(x+1)(x^2-4x+8)}\,dx$	7.16	$\int \frac{12x^2-20x+88}{(x-1)(x^2-6x+25)}\,dx$
7.17	$\int \frac{-12x^2-52x-112}{(x+1)(x^2+8x+25)}\,dx$	7.18	$\int \frac{-x^2+23x+93}{(x-2)(x^2+8x+25)}\,dx$
7.19	$\int \frac{5x^2+10x-30}{(x-1)(x^2-4x+8)}\,dx$	7.20	$\int \frac{-8x^2-12x-74}{(x+2)(x^2-6x+25)}\,dx$
7.21	$\int \frac{-11x^2-6x-55}{(x+2)(x^2-6x+13)}\,dx$	7.22	$\int \frac{10x^2-56x+124}{(x-2)(x^2-8x+25)}\,dx$

7.23 $\int \frac{9x^2+12x+42}{(x+1)(x^2+6x+18)}\,dx$ 7.24 $\int \frac{-2x^2-34x+40}{(x+2)(x^2-4x+13)}\,dx$

7.25 $\int \frac{5x^2-8x-52}{(x+1)(x^2+8x+20)}\,dx$ 7.26 $\int \frac{5x^2+4x-27}{(x+2)(x^2+6x+13)}\,dx$

7.27 $\int \frac{-12x^2+48x-136}{(x-1)(x^2-8x+32)}\,dx$ 7.28 $\int \frac{-7x^2-10x-43}{(x+2)(x^2+6x+25)}\,dx$

7.29 $\int \frac{2x^2+24x-42}{(x+1)(x^2-6x+25)}\,dx$ 7.30 $\int \frac{-6x^2-8}{(x-2)(x^2-4x+20)}\,dx$

7.31 $\int \frac{6x^2-4x+24}{(x-1)(x^2+4x+8)}\,dx$ 7.32 $\int \frac{2x^2+30x-24}{(x+1)(x^2-4x+8)}\,dx$

7.33 $\int \frac{6x^2+26x-52}{(x+2)(x^2-8x+20)}\,dx$ 7.34 $\int \frac{6x^2+8x-48}{(x+1)(x^2-4x+20)}\,dx$

7.35 $\int \frac{-10x^2-28x-32}{(x+2)(x^2+8x+20)}\,dx$ 7.36 $\int \frac{2x^2-28x-32}{(x-2)(x^2+8x+20)}\,dx$

7.37 $\int \frac{36x+136}{(x+1)(x^2+8x+32)}\,dx$ 7.38 $\int \frac{6x^2+7x-35}{(x+1)(x^2-4x+13)}\,dx$

7.39 $\int \frac{6x^2+17x+32}{(x-2)(x^2+8x+25)}\,dx$ 7.40 $\int \frac{-6x^2+41x+32}{(x-2)(x^2+8x+25)}\,dx$

7.41 $\int \frac{-3x^2+28x+91}{(x+1)(x^2+6x+25)}\,dx$ 7.42 $\int \frac{10x^2+12x+96}{(x-2)(x^2+8x+20)}\,dx$

7.43 $\int \frac{x^2+16x-60}{(x+1)(x^2-6x+18)}\,dx$ 7.44 $\int \frac{-8x^2+27x-45}{(x-1)(x^2-6x+18)}\,dx$

7.45 $\int \frac{-2x^2-16x+38}{(x+1)(x^2-4x+8)}\,dx$ 7.46 $\int \frac{-11x^2-28x-84}{(x-1)(x^2+8x+32)}\,dx$

7.47 $\int \frac{-6x^2-12x+52}{(x-1)(x^2-4x+20)}\,dx$ 7.48 $\int \frac{10x^2-9x+32}{(x+2)(x^2-8x+25)}\,dx$

7.49 $\int \frac{3x^2-18x-78}{(x-2)(x^2+6x+18)}\,dx$ 7.50 $\int \frac{-5x^2+28x+87}{(x+1)(x^2+8x+25)}\,dx$

7.51 $\int \frac{-3x^2-4x+31}{(x-1)(x^2-6x+13)}\,dx$ 7.52 $\int \frac{-2x^2+14x+32}{(x+1)(x^2+6x+13)}\,dx$

7.53 $\int \frac{5x^2+8x-48}{(x+1)(x^2+4x+20)}\,dx$ 7.54 $\int \frac{11x^2+4x+45}{(x-1)(x^2+6x+13)}\,dx$

7.55 $\int \frac{6x^2+20}{(x+1)(x^2-4x+8)}\,dx$ 7.56 $\int \frac{4x^2+39x-118}{(x+2)(x^2-8x+25)}\,dx$

7.57 $\int \frac{6x^2-4x+8}{(x-1)(x^2-4x+8)}\,dx$ 7.58 $\int \frac{8x^2+18x+24}{(x+2)(x^2+6x+18)}\,dx$

7.59 $\int \frac{-2x^2-25x+8}{(x+2)(x^2-4x+13)}\,dx$ 7.60 $\int \frac{2x^2+6x-32}{(x+1)(x^2-4x+13)}\,dx$

Задание № 8.

В данном задании знаменатель дроби имеет один действительный корень, который можно ”угадать”. Многочлен $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами имеет рациональный корень вида $\frac{m}{k}$, где m – делитель коэффициента a_n, k – делитель a_0.

Рассмотрим пример: попытаемся найти рациональный корень многочлена

$$2x^3 - x^2 + x + 1.$$

Коэффициенты равны: $a_0 = 2$, $a_3 = 1$, следовательно, $m = +1, -1$, $k = +1, -1, +2, -2$. Рациональным корнем могут являться числа $\frac{m}{k} = +1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. Подстановкой убеждаемся, что $x = -\frac{1}{2}$ является корнем многочлена $2x^3 - x^2 + x + 1$. Следовательно, многочлен можно разложить на два множителя, поделив его на $\left(x + \frac{1}{2}\right)$, получим

$$2x^3 - x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 2x + 2).$$

Варианты задания № 8.

8.1 $\int \frac{2x^2-13x-70}{x^3+6x^2+21x+26}\,dx$ 8.2 $\int \frac{4x^2-12x-32}{x^3-10x^2+48x-64}\,dx$

8.3 $\int \frac{9x^2+12x+81}{x^3+7x^2+17x-25}\,dx$ 8.4 $\int \frac{-6x^2+12x+38}{x^3+5x^2+17x+13}\,dx$

8.5 $\int \frac{-9x^2+6x-78}{x^3+4x^2+6x-36}\,dx$ 8.6 $\int \frac{4x^2+22x-52}{x^3-6x^2+4x+40}\,dx$

8.7 $\int \frac{7x^2-22x+30}{x^3-4x^2+6x+36}\,dx$ 8.8 $\int \frac{-10x^2+8x-60}{x^3-4x^2+x+26}\,dx$

8.9 $\int \frac{8x^2+18x+24}{x^3+3x^2+16x-20}\,dx$ 8.10 $\int \frac{-16x+48}{x^3-7x^2+19x-13}\,dx$

8.11 $\int \frac{7x^2+32x+63}{x^3+7x^2+17x-25}\,dx$ 8.12 $\int \frac{-10x^2-48x-124}{x^3+8x^2+37x+50}\,dx$

8.13 $\int \frac{-12x^2-60x-152}{x^3+10x^2+48x+64}\,dx$ 8.14 $\int \frac{8x^2+32x+88}{x^3+5x^2+19x-25}\,dx$

8.15 $\int \frac{-5x^2-16x+112}{x^3-10x^2+48x-64}\,dx$ 8.16 $\int \frac{-4x^2-26x+28}{x^3-3x^2+16x+20}\,dx$

8.17 $\int \frac{8x-64}{x^3-3x^2+9x+13}\,dx$ 8.18 $\int \frac{-8x^2+14x-14}{x^3-3x^2+9x+13}\,dx$

8.19 $\int \frac{10x^2+32x+94}{x^3+7x^2+17x-25}\,dx$ 8.20 $\int \frac{5x^2+8x-63}{x^3-6x^2+21x-26}\,dx$

8.21 $\int \frac{-2x^2+38x+44}{x^3+5x^2+7x-13}\,dx$ 8.22 $\int \frac{-7x^2+14x-81}{x^3-7x^2+17x+25}\,dx$

8.23 $\int \frac{8x^2-32x+66}{x^3-8x^2+37x-50}\,dx$ 8.24 $\int \frac{-8x^2+36x-60}{x^3-7x^2+19x-13}\,dx$

8.25 $\int \frac{11x^2-8x+42}{x^3-4x^2+6x+36}\,dx$ 8.26 $\int \frac{-7x^2-20x-42}{x^3+8x^2+30x+36}\,dx$

8.27 $\int \frac{-8x^2+30x-62}{x^3-7x^2+31x-25}\,dx$ 8.28 $\int \frac{10x^2-4x+14}{x^3-5x^2+17x-13}\,dx$

8.29 $\int \frac{8x^2+19x+63}{x^3+7x^2+24x+18}\,dx$ 8.30 $\int \frac{12x^2+52x+112}{x^3+9x^2+33x+25}\,dx$

8.31 $\int \frac{9x^2+66}{x^3-5x^2+12x+18}\,dx$ 8.32 $\int \frac{-9x^2-6x-87}{x^3+7x^2+17x-25}\,dx$

8.33 $\int \frac{-3x^2-12x+69}{x^3-9x^2+33x-25}\,dx$ 8.34 $\int \frac{7x^2-12x+44}{x^3-6x^2+28x-40}\,dx$

8.35 $\int \frac{8x^2-36x+76}{x^3-6x^2+21x-26}\,dx$ 8.36 $\int \frac{4x^2+14x-34}{x^3-7x^2+19x-13}\,dx$

8.37 $\int \frac{-7x^2+26x-48}{x^3-10x^2+36x-40}\,dx$ 8.38 $\int \frac{-4x^2+36x+68}{x^3+3x^2+16x-20}\,dx$

8.39 $\int \frac{-3x^2+26x+52}{x^3+3x^2+16x-20}\,dx$ 8.40 $\int \frac{4x^2+31x-109}{x^3-7x^2+17x+25}\,dx$

8.41 $\int \frac{-6x^2-4x-24}{x^3-2x^2+16}\,dx$ 8.42 $\int \frac{x^2+40x-80}{x^3-6x^2+16x+64}\,dx$

8.43 $\int \frac{-7x^2-31x-63}{x^3+7x^2+24x+18}\,dx$ 8.44 $\int \frac{-4x^2+8x+22}{x^3+5x^2+12x+8}\,dx$

8.45 $\int \frac{11x^2+14x+63}{x^3+6x^2+9x-50}\,dx$ 8.46 $\int \frac{5x^2-30x-47}{x^3+4x^2+x-26}\,dx$

8.47 $\int \frac{-2x^2-12x+42}{x^3-8x^2+25x-26}\,dx$ 8.48 $\int \frac{-10x^2-34x-44}{x^3+6x^2+16x+16}\,dx$

8.49 $\int \frac{11x^2-32x+44}{x^3-10x^2+36x-40}\,dx$ 8.50 $\int \frac{-6x^2-26x+52}{x^3-6x^2+4x+40}\,dx$

8.51 $\int \frac{-4x^2-6x+24}{x^3+8x^2+30x+36}\,dx$ 8.52 $\int \frac{10x^2+4x+68}{x^3+4x^2+x-26}\,dx$

8.53 $\int \frac{x^2+36x-112}{x^3-9x^2+40x-32}\,dx$ 8.54 $\int \frac{-10x+60}{x^3-8x^2+30x-36}\,dx$

8.55 $\int \frac{4x^2+16x-46}{x^3-9x^2+28x-20}\,dx$ 8.56 $\int \frac{5x^2+2x-36}{x^3-6x^2+16x-16}\,dx$

8.57 $\int \frac{-6x^2+4x+38}{x^3+3x^2+9x-13}\,dx$ 8.58 $\int \frac{8x^2-12x+30}{x^3-7x^2+24x-18}\,dx$

8.59 $\int \frac{8x^2-30x+48}{x^3-9x^2+28x-20}\,dx$ 8.60 $\int \frac{-4x^2+28x+84}{x^3+7x^2+24x+18}\,dx$

5 Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим способы вычисления неопределенных интегралов от тригонометрических функций. Пусть надо вычислить

$$\int \sin(7x)\cos(4x)\,dx.$$

Из тригонометрии известна формула

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]. \qquad (51)$$

Применяя ее, получим

$$\int \sin(7x)\cos(4x)\,dx = \frac{1}{2}\int(\sin(11x)+\sin(3x))dx =$$
$$= -\frac{1}{22}\cos(11x) - \frac{1}{6}\cos(3x) + C.$$

В аналогичных случаях применяются также формулы

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)], \qquad (52)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]. \qquad (53)$$

5.1 Интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических функций

Рассмотрим интеграл вида

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx, \qquad (54)$$

где m и n – целые числа.

1) Если хотя бы одно из m и n нечетное положительное число, то применяются формулы

$$\sin x\,dx = -d\cos x, \quad \cos x\,dx = d\sin x.$$

Далее с помощью основного тригонометрического тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ следует выразить синус через косинус или наоборот так, чтобы в подинтегральном выражении остались только косинусы или только синусы. Например, вычислим интеграл

$$\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\cos^2 x\cos x\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{(1-\sin^2 x)\,d\sin x}{\sin^2 x} =$$
$$= |t=\sin x| = \int\left(\frac{1}{t^2}-1\right)dt = -\frac{1}{t} - t + C =$$
$$= -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C.$$

2) Если и m и n – четные числа, или $m+n$ – четное отрицательное число, то применима подстановка $\operatorname{tg} x = t$. Например,

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}\,dx = \left|\begin{array}{ll} \operatorname{tg} x = t, & x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2}, & \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array}\right| =$$
$$= \int \frac{t^2(1+t^2)^3}{1+t^2}\,dt = \int t^2(1+t^2)^2 dt = \int(t^2+2t^4+t^6)dt =$$
$$= \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{2\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + C$$

3) Если и m и n – четные неотрицательные числа, то применяются формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad (55)$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad (56)$$

например, вычислим интеграл

$$\int \cos^2 x\sin^4 x\,dx.$$

Применим формулы (56) и (55), $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$, получим:

$$\int \cos^2 x \sin^4 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{1+\cos 4x}{2}dx + \int \cos^3 2x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + \int \cos^2 2x \cos 2x\,dx\right) =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin 2x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{1}{16}\int (1-\sin^2 2x)d\sin 2x =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin 2x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{1}{16}\left(\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3}\right) + C.$$

Варианты задания № 9.

9.1	$\int \cos(11x)\sin(5x)\,dx$	$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^{10} x}\,dx$	$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$
	$\int \sin^4(5x)\cos^2(5x)\,dx$		
9.2	$\int \cos(3x)\sin(7x)\,dx$	$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x}\,dx$	$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}\,dx$
	$\int \sin^2(9x)\cos^4(9x)\,dx$		
9.3	$\int \cos(6x)\sin(11x)\,dx$	$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^8 x}\,dx$	$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$
	$\int \sin^2(8x)\cos^2(8x)\,dx$		
9.4	$\int \cos(4x)\sin(3x)\,dx$	$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}\,dx$	$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^{10} x}\,dx$
	$\int \sin^4(3x)\cos^2(3x)\,dx$		
9.5	$\int \cos(6x)\sin(5x)\,dx$	$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^{10} x}\,dx$	$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$
	$\int \sin^2(6x)\cos^2(6x)\,dx$		

9.6	$\int \cos(8x)\sin(11x)\,dx$	$\int \frac{\sin^7 x}{\cos^8 x}\,dx$	$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}\,dx$
	$\int \sin^2(11x)\cos^2(11x)\,dx$		
9.7	$\int \cos(6x)\sin(9x)\,dx$	$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^{10} x}\,dx$	$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$
	$\int \sin^4(3x)\cos^2(3x)\,dx$		
9.8	$\int \cos(11x)\sin(12x)\,dx$	$\int \frac{\sin^7 x}{\cos^8 x}\,dx$	$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx$
	$\int \sin^2(8x)\cos^4(8x)\,dx$		
9.9	$\int \cos(10x)\sin(9x)\,dx$	$\int \frac{\cos^7 x}{\sin^{10} x}\,dx$	$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\,dx$
	$\int \sin^2(11x)\cos^4(11x)\,dx$		
9.10	$\int \cos(7x)\sin(9x)\,dx$	$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x}\,dx$	$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx$
	$\int \sin^2(6x)\cos^4(6x)\,dx$		
9.11	$\int \cos(12x)\sin(5x)\,dx$	$\int \frac{\cos^7 x}{\sin^{10} x}\,dx$	$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\,dx$
	$\int \sin^4(7x)\cos^4(7x)\,dx$		
9.12	$\int \cos(8x)\sin(10x)\,dx$	$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x}\,dx$	$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx$
	$\int \sin^2(11x)\cos^2(11x)\,dx$		
9.13	$\int \cos(4x)\sin(9x)\,dx$	$\int \frac{\cos^7 x}{\sin^8 x}\,dx$	$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$
	$\int \sin^2(3x)\cos^2(3x)\,dx$		
9.14	$\int \cos(4x)\sin(6x)\,dx$	$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x}\,dx$	$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx$
	$\int \sin^2(7x)\cos^4(7x)\,dx$		
9.15	$\int \cos(3x)\sin(8x)\,dx$	$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^8 x}\,dx$	$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$
	$\int \sin^2(2x)\cos^2(2x)\,dx$		
9.16	$\int \cos(11x)\sin(7x)\,dx$	$\int \frac{\sin^7 x}{\cos^8 x}\,dx$	$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx$
	$\int \sin^2(8x)\cos^4(8x)\,dx$		

9.17 $\int \cos(9x)\sin(11x)\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^5 x}{\sin^8 x}\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\,dx$
$\int \sin^2(8x)\cos^2(8x)\,dx$

9.18 $\int \cos(7x)\sin(11x)\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^5 x}{\cos^{10} x}\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,d$
$\int \sin^2(6x)\cos^2(6x)\,dx$

9.19 $\int \cos(8x)\sin(4x)\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^7 x}{\sin^8 x}\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$
$\int \sin^4(10x)\cos^2(10x)\,dx$

9.20 $\int \cos(10x)\sin(9x)\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^5 x}{\cos^{10} x}\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}\,dx$
$\int \sin^4(2x)\cos^2(2x)\,dx$

9.21 $\int \cos(10x)\sin(8x)\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^7 x}{\sin^8 x}\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$
$\int \sin^2(8x)\cos^2(8x)\,dx$

9.22 $\int \cos(8x)\sin(7x)\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^7 x}{\cos^{10} x}\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx$
$\int \sin^2(7x)\cos^2(7x)\,dx$

9.23 $\int \cos(4x)\sin(11x)\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^7 x}{\sin^{10} x}\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$
$\int \sin^4(4x)\cos^2(4x)\,dx$

9.24 $\int \cos(14x)\sin(2x)\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^5 x}{\cos^{10} x}\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx$
$\int \sin^4(8x)\cos^4(8x)\,dx$

9.25 $\int \cos(7x)\sin(10x)\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^7 x}{\sin^8 x}\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$
$\int \sin^2(9x)\cos^2(9x)\,dx$

9.26 $\int \cos(9x)\sin(12x)\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^5 x}{\cos^{10} x}\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx$
$\int \sin^2(8x)\cos^4(8x)\,dx$

9.27 $\int \cos(11x)\sin(6x)\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^5 x}{\sin^{10} x}\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$
$\int \sin^2(4x)\cos^2(4x)\,dx$

9.28 $\int \cos(12x)\sin(11x)\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^7 x}{\cos^{10} x}\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}\,dx$
$\int \sin^4(6x)\cos^2(6x)\,dx$

9.29 $\int \cos(3x)\sin(10x)\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^5 x}{\sin^{10} x}\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\,dx$
$\int \sin^2(6x)\cos^4(6x)\,dx$

9.30 $\int \cos(10x)\sin(12x)\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x}\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx$
$\int \sin^4(3x)\cos^4(3x)\,dx$

9.31 $\int \cos(8x)\sin(9x)\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^7 x}{\sin^8 x}\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\,dx$
$\int \sin^4(8x)\cos^4(8x)\,dx$

9.32 $\int \cos(10x)\sin(7x)\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^7 x}{\cos^8 x}\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}\,dx$
$\int \sin^4(10x)\cos^4(10x)\,dx$

9.33 $\int \cos(6x)\sin(3x)\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^7 x}{\sin^{10} x}\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\,dx$
$\int \sin^2(10x)\cos^2(10x)\,dx$

9.34 $\int \cos(3x)\sin(5x)\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x}\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}\,dx$
$\int \sin^2(6x)\cos^4(6x)\,dx$

9.35 $\int \cos(6x)\sin(8x)\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^5 x}{\sin^8 x}\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$
$\int \sin^2(6x)\cos^2(6x)\,dx$

9.36 $\int \cos(8x)\sin(11x)\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^7 x}{\cos^8 x}\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx$
$\int \sin^4(11x)\cos^4(11x)\,dx$

9.37 $\int \cos(10x)\sin(9x)\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^5 x}{\sin^{10} x}\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$
$\int \sin^2(4x)\cos^4(4x)\,dx$

9.38 $\int \cos(7x)\sin(3x)\,dx$ $\quad \int \frac{\sin^5 x}{\cos^{10} x}\,dx$ $\quad \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}\,dx$
$\int \sin^4(11x)\cos^2(11x)\,dx$

9.39 $\int \cos(12x)\sin(6x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^7 x}{\sin^8 x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$
$\int \sin^4(9x)\cos^4(9x)\,dx$

9.40 $\int \cos(6x)\sin(4x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^{10} x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}\,dx$
$\int \sin^4(9x)\cos^4(9x)\,dx$

9.41 $\int \cos(9x)\sin(7x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin^{10} x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$
$\int \sin^2(9x)\cos^4(9x)\,dx$

9.42 $\int \cos(6x)\sin(5x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^7 x}{\cos^{10} x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx$
$\int \sin^2(4x)\cos^4(4x)\,dx$

9.43 $\int \cos(10x)\sin(8x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin^8 x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\,dx$
$\int \sin^2(2x)\cos^4(2x)\,dx$

9.44 $\int \cos(12x)\sin(8x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^{10} x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx$
$\int \sin^2(10x)\cos^4(10x)\,dx$

9.45 $\int \cos(7x)\sin(3x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin^{10} x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$
$\int \sin^2(3x)\cos^4(3x)\,dx$

9.46 $\int \cos(9x)\sin(12x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx$
$\int \sin^2(11x)\cos^2(11x)\,dx$

9.47 $\int \cos(5x)\sin(3x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^7 x}{\sin^{10} x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\,dx$
$\int \sin^2(2x)\cos^2(2x)\,dx$

9.48 $\int \cos(3x)\sin(8x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^{10} x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx$
$\int \sin^2(8x)\cos^4(8x)\,dx$

9.49 $\int \cos(3x)\sin(8x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin^{10} x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$
$\int \sin^2(9x)\cos^2(9x)\,dx$

9.50 $\int \cos(7x)\sin(9x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^7 x}{\cos^8 x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx$
$\int \sin^4(8x)\cos^4(8x)\,dx$

9.51 $\int \cos(10x)\sin(10x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^7 x}{\sin^{10} x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$
$\int \sin^2(3x)\cos^2(3x)\,dx$

9.52 $\int \cos(11x)\sin(7x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^7 x}{\cos^8 x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}\,dx$
$\int \sin^4(10x)\cos^4(10x)\,dx$

9.53 $\int \cos(9x)\sin(12x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin^8 x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$
$\int \sin^4(7x)\cos^4(7x)\,dx$

9.54 $\int \cos(8x)\sin(9x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^{10} x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}\,dx$
$\int \sin^2(10x)\cos^4(10x)\,dx$

9.55 $\int \cos(7x)\sin(3x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin^{10} x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$
$\int \sin^4(4x)\cos^4(4x)\,dx$

9.56 $\int \cos(8x)\sin(12x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^7 x}{\cos^8 x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}\,dx$
$\int \sin^2(8x)\cos^2(8x)\,dx$

9.57 $\int \cos(6x)\sin(3x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^7 x}{\sin^{10} x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$
$\int \sin^4(2x)\cos^4(2x)\,dx$

9.58 $\int \cos(10x)\sin(12x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx$
$\int \sin^4(2x)\cos^2(2x)\,dx$

9.59 $\int \cos(10x)\sin(10x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin^{10} x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$
$\int \sin^4(11x)\cos^2(11x)\,dx$

9.60 $\int \cos(6x)\sin(4x)\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x}\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx$
$\int \sin^4(10x)\cos^2(10x)\,dx$

5.2 Универсальная тригонометрическая подстановка

Интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx, \qquad (57)$$

где $R(u, v)$ – рациональная функция от u и v всегда можно выразить через элементарные функции, сделав подстановку (24):

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Получим интеграл от рациональной дроби вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Универсальная подстановка (24) часто приводит к довольно громоздким рациональным дробям, однако она очень удобна для вычисления интегралов вида

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}.$$

Например,

$$\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 3} = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(\frac{4t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3\right)} =$$

$$= 2\int \frac{(1+t^2)dt}{(1+t^2)(4t+1-t^2+3+3t^2)} = 2\int \frac{dt}{2t^2+4t+4} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t^2+2t+1)+1} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(t+1) + C =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right) + C.$$

Варианты задания № 10.

10.1	$\int \frac{10\,dx}{3\sin x - 5\cos x - 3}$	10.2	$\int \frac{16\,dx}{4\sin x + 13\cos x + 11}$
10.3	$\int \frac{16\,dx}{6\sin x + 4\cos x + 6}$	10.4	$\int \frac{15\,dx}{3\sin x - 5\cos x - 3}$
10.5	$\int \frac{12\,dx}{6\sin x + 4\cos x + 6}$	10.6	$\int \frac{10\,dx}{3\sin x - 5\cos x - 3}$
10.7	$\int \frac{4\,dx}{6\sin x + 7\cos x + 9}$	10.8	$\int \frac{8\,dx}{6\sin x + 7\cos x + 9}$
10.9	$\int \frac{14\,dx}{3\sin x + 11\cos x + 9}$	10.10	$\int \frac{12\,dx}{4\sin x - 6\cos x - 4}$
10.11	$\int \frac{8\,dx}{6\sin x + 4\cos x + 6}$	10.12	$\int \frac{10\,dx}{-7\sin x + 5\cos x + 7}$
10.13	$\int \frac{9\,dx}{-7\sin x + 9\cos x + 11}$	10.14	$\int \frac{18\,dx}{2\sin x - 9\cos x - 7}$
10.15	$\int \frac{15\,dx}{-7\sin x + 5\cos x + 7}$	10.16	$\int \frac{16\,dx}{4\sin x - 13\cos x - 11}$
10.17	$\int \frac{9\,dx}{5\sin x + 3\cos x + 5}$	10.18	$\int \frac{15\,dx}{3\sin x - 5\cos x - 3}$
10.19	$\int \frac{28\,dx}{3\sin x - 11\cos x - 9}$	10.20	$\int \frac{14\,dx}{3\sin x + 11\cos x + 9}$
10.21	$\int \frac{18\,dx}{4\sin x - 6\cos x - 4}$	10.22	$\int \frac{24\,dx}{4\sin x + 13\cos x + 11}$
10.23	$\int \frac{28\,dx}{3\sin x - 11\cos x - 9}$	10.24	$\int \frac{20\,dx}{3\sin x + 5\cos x + 3}$
10.25	$\int \frac{9\,dx}{5\sin x + 3\cos x + 5}$	10.26	$\int \frac{24\,dx}{4\sin x - 6\cos x - 4}$
10.27	$\int \frac{15\,dx}{3\sin x - 5\cos x - 3}$	10.28	$\int \frac{28\,dx}{5\sin x - 7\cos x - 5}$
10.29	$\int \frac{12\,dx}{6\sin x + 4\cos x + 6}$	10.30	$\int \frac{24\,dx}{4\sin x + 6\cos x + 4}$

10.31 $\int \frac{18\,dx}{4\sin x+6\cos x+4}$

10.32 $\int \frac{9\,dx}{-7\sin x+9\cos x+11}$

10.33 $\int \frac{12\,dx}{5\sin x+3\cos x+5}$

10.34 $\int \frac{21\,dx}{5\sin x-7\cos x-5}$

10.35 $\int \frac{14\,dx}{5\sin x+7\cos x+5}$

10.36 $\int \frac{10\,dx}{3\sin x+5\cos x+3}$

10.37 $\int \frac{16\,dx}{4\sin x+13\cos x+11}$

10.38 $\int \frac{16\,dx}{6\sin x+4\cos x+6}$

10.39 $\int \frac{8\,dx}{-6\sin x+7\cos x+9}$

10.40 $\int \frac{24\,dx}{4\sin x+6\cos x+4}$

10.41 $\int \frac{10\,dx}{-7\sin x+5\cos x+7}$

10.42 $\int \frac{15\,dx}{3\sin x-5\cos x-3}$

10.43 $\int \frac{6\,dx}{5\sin x+3\cos x+5}$

10.44 $\int \frac{9\,dx}{-5\sin x+3\cos x+5}$

10.45 $\int \frac{9\,dx}{7\sin x+9\cos x+11}$

10.46 $\int \frac{18\,dx}{2\sin x-9\cos x-7}$

10.47 $\int \frac{12\,dx}{2\sin x-9\cos x-7}$

10.48 $\int \frac{6\,dx}{-6\sin x+7\cos x+9}$

10.49 $\int \frac{24\,dx}{2\sin x-9\cos x-7}$

10.50 $\int \frac{12\,dx}{2\sin x-9\cos x-7}$

10.51 $\int \frac{6\,dx}{-6\sin x+7\cos x+9}$

10.52 $\int \frac{15\,dx}{3\sin x+5\cos x+3}$

10.53 $\int \frac{16\,dx}{4\sin x-13\cos x-11}$

10.54 $\int \frac{12\,dx}{7\sin x+9\cos x+11}$

10.55 $\int \frac{24\,dx}{4\sin x-6\cos x-4}$

10.56 $\int \frac{8\,dx}{8\sin x+11\cos x+13}$

10.57 $\int \frac{24\,dx}{4\sin x+6\cos x+4}$

10.58 $\int \frac{6\,dx}{6\sin x+7\cos x+9}$

10.59 $\int \frac{16\,dx}{4\sin x-13\cos x-11}$

10.60 $\int \frac{4\,dx}{6\sin x+7\cos x+9}$

Если подынтегральная функция в (57) четна относительно $\sin x$ и $\cos x$, т.е. если $R(-\sin x, -\cos x) \equiv$

$\equiv R(\sin x, \cos x)$, то применима подстановка $\operatorname{tg} x = t$ (25). Например,

$$\int \frac{dx}{\sin 2x+\cos^2 x} = \int \frac{dt}{\left(\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{2t+1} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|2t+1|+C = \frac{1}{2}\ln|2\operatorname{tg} x+1|+C.$$

Варианты задания № 11.

11.1 $\int \frac{\operatorname{tg} x-26}{-5\sin 2x-2\cos 2x+18\cos^2 x-\sin^2 x}\,dx$

11.2 $\int \frac{4\operatorname{tg} x+28}{7\sin 2x-\cos 2x+41\cos^2 x}\,dx$

11.3 $\int \frac{6\operatorname{tg} x-28}{-6\sin 2x+\cos 2x+19\cos^2 x+2\sin^2 x}\,dx$

11.4 $\int \frac{\operatorname{tg} x-26}{-5\sin 2x+\cos 2x+15\cos^2 x+2\sin^2 x}\,dx$

11.5 $\int \frac{6\operatorname{tg} x}{-2\sin 2x-\cos 2x-31\cos^2 x}\,dx$

11.6 $\int \frac{2\operatorname{tg} x-40}{4\sin 2x+2\cos 2x-50\cos^2 x+3\sin^2 x}\,dx$

11.7 $\int \frac{-30}{7\sin 2x-\cos 2x+25\cos^2 x}\,dx$

11.8 $\int \frac{4\operatorname{tg} x-12}{-3\sin 2x+2\cos 2x-18\cos^2 x+3\sin^2 x}\,dx$

11.9 $\int \frac{-\operatorname{tg} x+14}{7\sin 2x-\cos 2x+41\cos^2 x}\,dx$

11.10 $\int \frac{2\operatorname{tg} x-32}{2\sin 2x-2\cos 2x-30\cos^2 x-\sin^2 x}\,dx$

11.11 $\int \frac{32}{-6\sin 2x+\cos 2x+19\cos^2 x+2\sin^2 x}\,dx$

11.12 $\int \frac{-5\operatorname{tg} x-22}{3\sin 2x-2\cos 2x-38\cos^2 x-\sin^2 x}\,dx$

11.13 $\displaystyle\int \frac{-12}{5\sin 2x+\cos 2x+15\cos^2 x+2\sin^2 x}\,dx$

11.14 $\displaystyle\int \frac{8\operatorname{tg} x-56}{-7\sin 2x-2\cos 2x+26\cos^2 x-\sin^2 x}\,dx$

11.15 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x+20}{5\sin 2x-2\cos 2x+18\cos^2 x-\sin^2 x}\,dx$

11.16 $\displaystyle\int \frac{24}{5\sin 2x-2\cos 2x+18\cos^2 x-\sin^2 x}\,dx$

11.17 $\displaystyle\int \frac{2\operatorname{tg} x+44}{7\sin 2x+\cos 2x+23\cos^2 x+2\sin^2 x}\,dx$

11.18 $\displaystyle\int \frac{24}{-4\sin 2x-\cos 2x-19\cos^2 x}\,dx$

11.19 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x-34}{-4\sin 2x-2\cos 2x-18\cos^2 x-\sin^2 x}\,dx$

11.20 $\displaystyle\int \frac{-24}{2\sin 2x-2\cos 2x-30\cos^2 x-\sin^2 x}\,dx$

11.21 $\displaystyle\int \frac{6\operatorname{tg} x-52}{-7\sin 2x-\cos 2x+25\cos^2 x}\,dx$

11.22 $\displaystyle\int \frac{-30}{-3\sin 2x+\cos 2x-17\cos^2 x+2\sin^2 x}\,dx$

11.23 $\displaystyle\int \frac{6\operatorname{tg} x-40}{-4\sin 2x-\cos 2x-47\cos^2 x}\,dx$

11.24 $\displaystyle\int \frac{-8\operatorname{tg} x-40}{5\sin 2x+\cos 2x-25\cos^2 x+2\sin^2 x}\,dx$

11.25 $\displaystyle\int \frac{-6\operatorname{tg} x+18}{-3\sin 2x-\cos 2x-39\cos^2 x}\,dx$

11.26 $\displaystyle\int \frac{-\operatorname{tg} x-52}{-4\sin 2x-\cos 2x-47\cos^2 x}\,dx$

11.27 $\displaystyle\int \frac{-6\operatorname{tg} x+4}{-3\sin 2x+\cos 2x-41\cos^2 x+2\sin^2 x}\,dx$

11.28 $\displaystyle\int \frac{6\operatorname{tg} x+36}{4\sin 2x-2\cos 2x-18\cos^2 x-\sin^2 x}\,dx$

11.29 $\displaystyle\int \frac{-18}{5\sin 2x+\cos 2x+15\cos^2 x+2\sin^2 x}\,dx$

11.30 $\displaystyle\int \frac{-6\operatorname{tg} x+48}{-7\sin 2x+2\cos 2x+38\cos^2 x+3\sin^2 x}\,dx$

11.31 $\displaystyle\int \frac{6\operatorname{tg} x+36}{6\sin 2x-\cos 2x+21\cos^2 x}\,dx$

11.32 $\displaystyle\int \frac{-4\operatorname{tg} x+8}{-2\sin 2x+\cos 2x-33\cos^2 x+2\sin^2 x}\,dx$

11.33 $\displaystyle\int \frac{-6\operatorname{tg} x+24}{-5\sin 2x-\cos 2x+17\cos^2 x}\,dx$

11.34 $\displaystyle\int \frac{-4\operatorname{tg} x-16}{4\sin 2x+2\cos 2x-50\cos^2 x+3\sin^2 x}\,dx$

11.35 $\displaystyle\int \frac{8\operatorname{tg} x-40}{-5\sin 2x+\cos 2x-25\cos^2 x+2\sin^2 x}\,dx$

11.36 $\displaystyle\int \frac{2\operatorname{tg} x-8}{5\sin 2x+2\cos 2x+14\cos^2 x+3\sin^2 x}\,dx$

11.37 $\displaystyle\int \frac{-\operatorname{tg} x-28}{-2\sin 2x-2\cos 2x-30\cos^2 x-\sin^2 x}\,dx$

11.38 $\displaystyle\int \frac{7\operatorname{tg} x+16}{3\sin 2x-\cos 2x-15\cos^2 x}\,dx$

11.39 $\displaystyle\int \frac{-16}{8\sin 2x+\cos 2x+47\cos^2 x+2\sin^2 x}\,dx$

11.40 $\displaystyle\int \frac{7\operatorname{tg} x-46}{-6\sin 2x-2\cos 2x+22\cos^2 x-\sin^2 x}\,dx$

11.41 $\displaystyle\int \frac{7\operatorname{tg} x-38}{-6\sin 2x-\cos 2x+21\cos^2 x}\,dx$

11.42 $\displaystyle\int \frac{-18}{-5\sin 2x+2\cos 2x+14\cos^2 x+3\sin^2 x}\,dx$

11.43 $\displaystyle\int \frac{-\operatorname{tg} x+22}{-7\sin 2x-2\cos 2x+42\cos^2 x-\sin^2 x}\,dx$

11.44 $\displaystyle\int \frac{8}{6\sin 2x+2\cos 2x+30\cos^2 x+3\sin^2 x}\,dx$

11.45 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x+52}{-4\sin 2x-\cos 2x-47\cos^2 x}\,dx$

11.46 $\displaystyle\int \frac{-\operatorname{tg} x-22}{-6\sin 2x+\cos 2x+19\cos^2 x+2\sin^2 x}\,dx$

11.47 $\int \frac{-16}{-6\sin 2x - 2\cos 2x + 34\cos^2 x - \sin^2 x}\,dx$

11.48 $\int \frac{2\operatorname{tg} x - 32}{5\sin 2x - \cos 2x - 23\cos^2 x}\,dx$

11.49 $\int \frac{-4\operatorname{tg} x + 12}{-3\sin 2x - \cos 2x - 15\cos^2 x}\,dx$

11.50 $\int \frac{-7\operatorname{tg} x + 28}{-5\sin 2x - 2\cos 2x - 22\cos^2 x - \sin^2 x}\,dx$

11.51 $\int \frac{-6\operatorname{tg} x + 24}{-4\sin 2x + \cos 2x - 21\cos^2 x + 2\sin^2 x}\,dx$

11.52 $\int \frac{5\operatorname{tg} x + 28}{4\sin 2x + 2\cos 2x - 50\cos^2 x + 3\sin^2 x}\,dx$

11.53 $\int \frac{-6\operatorname{tg} x - 12}{4\sin 2x - \cos 2x - 19\cos^2 x}\,dx$

11.54 $\int \frac{-7\operatorname{tg} x + 36}{-4\sin 2x - \cos 2x - 47\cos^2 x}\,dx$

11.55 $\int \frac{6\operatorname{tg} x + 24}{4\sin 2x + 2\cos 2x - 22\cos^2 x + 3\sin^2 x}\,dx$

11.56 $\int \frac{8\operatorname{tg} x - 56}{-7\sin 2x + 2\cos 2x + 22\cos^2 x + 3\sin^2 x}\,dx$

11.57 $\int \frac{-6\operatorname{tg} x + 36}{-6\sin 2x + 2\cos 2x + 30\cos^2 x + 3\sin^2 x}\,dx$

11.58 $\int \frac{6\operatorname{tg} x + 16}{5\sin 2x - \cos 2x - 23\cos^2 x}\,dx$

11.59 $\int \frac{\operatorname{tg} x + 18}{-7\sin 2x + \cos 2x + 23\cos^2 x + 2\sin^2 x}\,dx$

11.60 $\int \frac{2\operatorname{tg} x + 36}{6\sin 2x + \cos 2x + 19\cos^2 x + 2\sin^2 x}\,dx$

Список литературы

[1] *Бермант А. Ф., Араманович И. Г.* Краткий курс математического анализа для втузов. – 9-е изд. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2002.

[2] *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. А.* Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: 2003.

[3] *Зверкина Г. А., Иванова А. П.* Неопределённые интегралы. Часть 1. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине ”Математический анализ” – М.: МИИТ, 2007.

[4] *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для втузов. – М.: 2003.

[5] *Мышкис А. Д.* Лекции по высшей математике. – М.: 1973.

[6] *Пискунов Н. С.* Дифференицальное и интегральное исчисление: учебник для ВТУЗов. Том 1. – М.: Наука, 1976.

[7] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. – М.: Наука, 1966.

Учебно-методическое издание

Зверкина Галина Александровна,
Иванова Александра Петровна

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ЧАСТЬ 2

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине "Математический анализ"

Подписано в печать		Тираж ?00
Усл. печ. л. – 2,75	Формат 60x84/16	
Заказ	Изд. № ???-09	

127994, Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9
Типография МИИТа