

Контрольная работа № 1

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.

В контрольную работу входит 4 задания.

Первое задание относится к теме “Векторная алгебра“ и состоит из восьми вопросов к одному условию.

Во втором задании используются основные определения кривых второго порядка.

Третье посвящено разделу математики “Линейная алгебра“ и относится к теме “Системы линейных уравнений“.

В четвёртом задании требуется получить канонический вид уравнения кривой второго порядка и построить её.

Задание 1.1

Даны координаты вершин пирамиды $A_1(3, 2, 5)$, $A_2(3, 7, 2)$, $A_3(0, 2, 7)$, $A_4(1, 5, 0)$.

Найти:

- длину ребра A_1A_2 ;
- угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 ;
- угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;
- площадь грани $A_1A_2A_3$;
- объём пирамиды;
- уравнение прямой A_1A_2 ;
- уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
- уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Задание 1.2

Составить уравнение и построить линию, расстояния каждой точки которой от начала координат и от точки $A(3 + 1, 3)$ относятся как 2 : 1.

Задание 1.3

Дана система линейных уравнений. Доказать её совместность и решить методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 + 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + (m - 1)x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

Задание 1.4

Привести к каноническому виду уравнения линий второго порядка. Сделать чертежи.

$$3x^2 + 2y^2 = 2, \quad \frac{x^2}{4} - \frac{3y^2}{2} = 3, \quad 2x^2 - 12x + 2y + 1 = 0$$

Контрольная работа № 2.

Вычисление пределов. Производная и её приложения.

В контрольную работу входит 4 заданий.

В 1-ом задании требуется вычислить предел функции. 2-е, 3-е и 4-е задания посвящены производной и её применению в исследовании функций.

Задание 2.1

Вычислить пределы.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - x^2}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sqrt[3]{x} \sin 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 5x}{3 + 5x} \right)^{1-x}$$

Задание 2.2

Найти производные $\frac{dy}{dx}$ данных функций

а) $y = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x^2$,

б) $y = \sqrt[3]{1 + \cos 6x}$,

в) $y = \sqrt{x} \ln^2 \arctg \sqrt{x}$,

г) $y = \frac{1}{(x)^x}$,

д) $y = e^{x+y}$.

Задание 2.3

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

$$y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2, [0; 2]$$

Задание 2.4

Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить её график.

1) $y = (x + 1)(x + 2)^2$

2) $y = \cos 3x$

Контрольная работа № 3. Функции многих переменных.

Состав контрольной работы:

В контрольную работу входит три задания. 1-е задание относится к теме “Частные производные”. 2-е задание посвящено нахождению градиента функции в заданной точке. В 3-м задании необходимо найти производную по направлению.

Задание 3.1

Дана функция $z = f(x, y)$. Показать, что

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}) = 0. \text{ При } z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1); F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Задание 3.2

Дана функция $z = f(x, y)$ и точка $A(x_0; y_0)$. Найти $\text{grad } z$ в точке A . При $z = 2x^2 + 4xy$; $A(3; 2)$.

Задание 3.3

Дана функция $z = f(x, y)$ и вектор $\bar{a} = (a_1; a_2)$. Найти производную в точке A по направлению вектора \bar{a} . При $z = \ln(x^2 + 2y^2) + e^x$; $A(0; 1)$; $\bar{a} = (0; 2)$.

Контрольная работа № 4.

Неопределённые, определённые, кратные и криволинейные интегралы.

Задание 4.1

Вычислить неопределённые интегралы.

Непосредственное интегрирование.

а) $\int x e^{-x^2} dx$

б) $\int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$

в) $\int \frac{(1 + \operatorname{tg} x) dx}{\cos^2 x}$

Интегрирование по частям.

$$\int (x - 2)2^x dx$$

Интегрирование дробно-рациональных функций.

$$\int \frac{(2x + 1)dx}{(x + 1)(x - 1)(x + 2)}$$

Интегрирование иррациональных функций. Вычисление определённого интеграла.

$$\int_1^8 \frac{2x dx}{\sqrt[3]{x} + 1}$$

Задание 4.2

Найти длину указанной кривой.

$$x = t^2/2, y = t^3/3, 1 \leq t \leq 3$$

Задание 4.3

Изменить порядок интегрирования, сделать чертеж.

$$\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy.$$

Задание 4.4

Вычислить криволинейный интеграл вдоль линии L (в случае замкнутой кривой обход в положительном направлении).

$$\oint_L y dx - x dy, \text{ где } L \text{ — контур треугольника } ABC, \text{ причём } A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1).$$