**Задача 1.** *Решить систему линейных уравнений с данной расширенной матрицей*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

*методом Гаусса.*

*Решение:*

Напоминание: для нахождения решения системы линейных уравнений с данной расширенной матрицей последнюю следует подвергать элементарным преобразованиям над строками. При этом множества решений систем уравнений, соответствующих матрице до применения элементарного преобразования и после - совпадают.

Элементарные преобразования над строчками матрицы бывают трёх типов:

(a) Обмен местами рядов с номерами $i$ и $j$ (сокращённо $R_i \leftrightarrow R_j$),
(b) Умножение ряда с номером $i$ на ненулевое число $r$ (сокращённо $R_i \to rR_i$),
(c) Замена ряда с номером $i$ на него минус кратное ряда $j$ (сокращённо $R_i \to R_i - rR_j$),

Цель заключается в приведении расширенной матрицы системы к трапециевидной форме, причём так, чтобы в каждой строчке первым ненулевым элементом была единица, и все элементы матрицы над этой единицей были нулями. Из такой приведённой трапециевидной формы расширенной матрицы системы легко получается её решение.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 3R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -7 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_5 \to R_5 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_5 \to R_5 - R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 2R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3/7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & | & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6/7 & | & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & | & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/7 & | & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 & 6/7 & | & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & | & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Обозначим переменные в системе уравнений с данной расширенной матрицей через $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$. Систему уравнений с последней матрицей в качестве расширенной можно записать как

$$\begin{cases} t_1 + t_4/7 = 2/7 \\ t_2 + t_4/7 = 1/7 \\ t_3 + t_4/7 = 2/7 \end{cases}.$$

Отсюда

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/7 - t_4/7 \\ 1/7 - t_4/7 \\ 2/7 - t_4/7 \\ 0 + t_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ 1/7 \\ 2/7 \\ 0 \end{bmatrix} + t_4 \begin{bmatrix} \frac{-5}{7} \\ -6/7 \\ -5/7 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где $t_4$ – произвольное вещественное число. Так как среди получившихся в ответе векторов, которые могут быть умножены на произвольное вещественное число, есть вектора из дробей, то мы можем избавиться от знаменателей, умножив вектор на их наименьшее общее кратное. Поэтому

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ 1/7 \\ 2/7 \\ 0 \end{bmatrix} + 7\alpha \begin{bmatrix} \frac{-5}{7} \\ -6/7 \\ -5/7 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ 1/7 \\ 2/7 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix},$$

где $\alpha$ – произвольное вещественное число.

**Ответ:** система совместна и имеет бесконечное количество решений вида

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ 1/7 \\ 2/7 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix},$$

где $\alpha$ – произвольное вещественное число.

Решение выполнено автоматически.
Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.
Web-интерфейс Павла Лапина.