

**Задача 1.** Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 9 & -1 \\ -2 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & -9 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти обратную матрицу, путём проведения элементарных преобразований.

*Решение:*

Напоминание: для нахождения обратной матрицы справа к ней следует дописать единичную и, подвергая первую элементарным преобразованиям над её строками, попытаться сделать из неё единичную матрицу. Если это удалось, то дописанная справа единичная матрица, подвергнутая тем же преобразованиям, и будет обратной. Если привести матрицу к единичной таким способом не удаётся, то обратной у неё не существует.

Элементарные преобразования над строчками матрицы бывают трёх типов:

- (a) Обмен местами рядов с номерами  $i$  и  $j$  (сокращённо  $R_i \leftrightarrow R_j$ ),
- (b) Умножение ряда с номером  $i$  на ненулевое число  $r$  (сокращённо  $R_i \rightarrow rR_i$ ),
- (c) Замена ряда с номером  $i$  на него минус кратное ряда  $j$  (сокращённо  $R_i \rightarrow R_i - rR_j$ ),

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 9 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 6 & 4 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 3 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 3 & 3 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 6 & 4 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 3 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 3 & 3 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 2 & | & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 3 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 3 & 3 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 2 & | & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 3 & 3 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 5 & | & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2/3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & | & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 5 & | & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow -R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & | & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 5 & | & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 5R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & | & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & | & 9 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3/12}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & | & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 3/4 & -1/3 & 1/12 & 5/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & | & -4/3 & 2/3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 3/4 & -1/3 & 1/12 & 5/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 2R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 0 & | & -3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & | & -4/3 & 2/3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 3/4 & -1/3 & 1/12 & 5/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 0 & | & -3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & | & -7/12 & 1/3 & 1/12 & -7/12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 3/4 & -1/3 & 1/12 & 5/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2/3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 0 & | & -3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -7/36 & 1/9 & 1/36 & -7/36 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 3/4 & -1/3 & 1/12 & 5/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & | & -21/4 & 3 & -1/4 & -13/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -7/36 & 1/9 & 1/36 & -7/36 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 3/4 & -1/3 & 1/12 & 5/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1/2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & -21/8 & 3/2 & -1/8 & -13/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -7/36 & 1/9 & 1/36 & -7/36 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 3/4 & -1/3 & 1/12 & 5/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -161/72 & 23/18 & -13/72 & -89/72 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -7/36 & 1/9 & 1/36 & -7/36 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 3/4 & -1/3 & 1/12 & 5/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Ответ:** обратная матрица равна

$$\begin{pmatrix} -161/72 & 23/18 & -13/72 & -89/72 \\ -7/36 & 1/9 & 1/36 & -7/36 \\ 3/4 & -1/3 & 1/12 & 5/12 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение выполнено автоматически.

Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.

Web-интерфейс Павла Лапина.