Задача 1. *Найти определитель матрицы*

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 8 & 2 & 3 & 3 & 7 \\ 10 & 2 & 5 & 3 & 11 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Напоминание: для вычисления определителя квадратной матрицы можно использовать элементарные преобразования как над строчками, так и над столбцами матрицы в силу того, что определитель матрицы совпадает с определителем транспонированной матрицы.

Элементарные преобразования над строчками матрицы бывают трёх типов:

(a) Обмен местами рядов с номерами i и j (сокращённо $R_i \leftrightarrow R_j$) (при данном преобразовании определитель матрицы умножается на -1),

(b) Умножение ряда с номером i на ненулевое число r (сокращённо $R_i \to rR_i$) (при данном преобразовании определитель матрицы умножается на r),

(c) Замена ряда с номером i на него минус кратное ряда j (сокращённо $R_i \to R_i - rR_j$) (при данном преобразовании определитель матрицы не меняется).

Ввиду того, что определитель матрицы совпадает с определителем транспонированной матрицы, те же самые операции с тем же эффектом можно производить и над столбцами (тогда в обозначении производимой операции буква R заменяется на букву C).

Цель заключается в приведении матрицы к верхнетреугольному или нижнетреугольному виду, определитель которой есть произведение диагональных элементов, а каков определитель первоначальной матрицы можно определить, следя за ходом проведённых операций.

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 8 & 2 & 3 & 3 & 7 \\ 10 & 2 & 5 & 3 & 11 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_3 \to R_3 - 2R_5} \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 8 & 2 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_2 \to R_2 - R_1}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det\times(-1)]{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_2 \to R_2 - 7R_1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -13 & 3 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_4 \to R_4 - 6R_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -13 & 3 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -10 & 4 & -13 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_5 \to R_5 - 5R_1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -13 & 3 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -10 & 4 & -13 \\ 0 & 1 & -8 & 2 & -12 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det\times(-1)]{R_2 \leftrightarrow R_5} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -8 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -10 & 4 & -13 \\ 0 & 2 & -13 & 3 & -17 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_4 \to R_4 - 3R_2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -8 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 14 & -2 & 23 \\ 0 & 2 & -13 & 3 & -17 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_5 \to R_5 - 2R_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -8 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 14 & -2 & 23 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_4 \to R_4 - 14R_3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -8 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -47 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_5 \to R_5 - 3R_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -8 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -47 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det \times \frac{1}{2}]{R_5 \to R_5/2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -8 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -47 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det \times (-1)]{R_4 \leftrightarrow R_5} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -8 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -47 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_5 \to R_5 - 12R_4}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -8 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Определитель треугольной матрицы (т.е. такой, у которой либо под, либо над главной диагональю все элементы равны 0) равен произведению диагональных элементов.

Поскольку получившейся матрицы определитель равен 1 , и при проведении операций определитель первоначальной матрицы умножился на $-1/2$, то определитель первоначальной матрицы равен -2.

Ответ: определитель равен -2.

Решение выполнено автоматически.

Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.

Web-интерфейс Павла Лапина.